ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXV.

1888

SERIE QUARTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME V.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1888

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

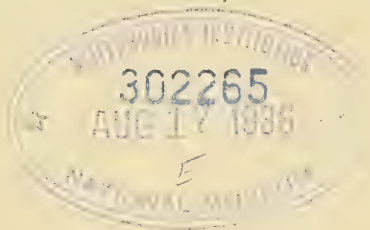
ANNO CCLXXXV.

1888

SERIE QUARTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME V.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1888

RELAZIONE

letta dal Socio STRUEVER, relatore, a nome anche del Socio BLASERNA, nella seduta dell'8 aprile 1888, sulla Memoria del dott. ETTORE ARTINI intitolata: *Quarzo di Val Malenco.*

« Dopo i numerosi ed estesi lavori pubblicati da gran numero di autori sulla forma cristallina del quarzo poteva sembrare quasi impossibile di trovare ancora delle cose nuove in questa specie di minerale sotto tanti aspetti importante. Pure, prendendo ad esame una numerosa serie di cristalli provenienti dai filoni di quarzo entro al gneiss talcoso che in Val Malenco e in Val Brutta riveste i serpentini, il dott. Artini ha potuto arricchire l'elenco delle forme del quarzo di non poche nuove. Dai suoi studî risulta, di fatti, che nel quarzo di Val Malenco esistono 12 romboedri diretti e 3 inversi, il prisma di prim'ordine, la solita emipiramide $\{41\bar{2}\}$ tanto destra che sinistra, 15 emiscalenoedri tanto destrorsi quanto sinistrorsi, e altri 4 emiscalenoedri soltanto sinistrorsi; e fra queste forme sarebbero nuove non meno di 9 emiscalenoedri che s'incontrano tanto a destra che a sinistra, oltre ad un emiscalenoedro sinistrorso, il cui simbolo però è dato dall'autore come alquanto dubbio. Presentando, di più, i cristalli per il loro modo di sviluppo, una *facies* che non pare osservata sinora in alcun altro luogo, i filoni di quarzo di Val Malenco si aggiungono ora al già grande numero di giacimenti italiani i cui quarzi furono argomento a tanti importanti lavori, come quelli di Traversella, dell'Elba, di Carrara, della Porretta.

« La vostra Commissione ritiene quindi, che la Memoria del dott. Artini, accompagnata da una tavola di dodici figure egregiamente disegnate, sia un interessante contributo alle nostre cognizioni sulla forma cristallina del quarzo, e ne propone l'inserzione nei volumi dell'Accademia ».

Quarzo di Val Malenco.

Memoria del dott. ETTORE ARTINI.

(Con una tavola)

In Val Malenco e in Val Brutta, entro al gneis talcoso che riveste i serpentini, si trovano dei filoni di quarzo; da questi provengono i numerosi cristalli da me presi a studiare [1]. Si trovano sulla quarzite compatta, in croste più o meno grandi nelle quali i cristalli sono terminati ad una sola estremità; ma si vedono pure assai spesso cristalli o gruppetti di cristalli, sciolti, terminati da ogni parte da superficie cristalline. Essi sono quasi sempre in parte ricoperti da una fine argilla bianca steatitosa, proveniente dal gneis talcoso; e su questa argilla pare siano cresciuti i cristalli sciolti sopra menzionati, che difatti sono disugualmente terminati alle due estremità: da una parte sono perfetti, a facce piane, ampie, regolari, simili in tutto a quelli delle croste sopra nominate; dall'altra parte, la pseudo-piramide esagonale formata dai due romboedri si scinde in più punte cristalline, pure a sei facce, ma curve, distorte e spezzate in varia guisa, così da rendere manifesto essere avvenuto l'accrescimento di questa estremità nel seno dell'argilla su cui era piantato il cristallo. E in fatto, trovasi questa insinuata nei più stretti vani di tali punte cristalline, e spesso, essendo rimasta in piccola parte inclusa nel cristallo, ne rende torbida una estremità. Io feci argomento del mio studio tanto quelli delle croste quanto quelli isolati, e di questi la sola estremità perfetta, che si mostra del resto conformata precisamente come nei primi.

[1] Rendo grazie al prof. F. Sansoni che mise gentilmente a mia disposizione la grande quantità di materiale raccolto e donato al nostro Museo dal prof. T. Taramelli; come pure al dott. L. Bozzi, che mi concesse di sottoporre a studio alcuni suoi bellissimi esemplari di questa località.

Elenco delle forme osservate.

Simboli di Miller	Simboli di Bravais	Simboli (1) di Naumann (piramidale)	Simboli di Naumann (romboedrico)	Simboli di Lévy (romboedrico)
100	$10\bar{1}1$	P	R	p
$15.\bar{1}.\bar{1}$	$16.0.\bar{16}.\bar{13}$	$\frac{16}{13}$ P	$\frac{16}{13}$ R	e^{15}
$3\bar{1}\bar{1}$	$40\bar{4}1$	4 P	4 R	e^{3}
$29.\bar{10}.\bar{10}$	$13.0.\bar{13}.3$	$\frac{13}{3}$ P	$\frac{13}{3}$ R	$e^{\frac{29}{10}}$
$11.\bar{4}.\bar{4}$	$50\bar{5}1$	5 P	5 R	$e^{\frac{11}{4}}$
$8\bar{3}\bar{3}$	$11.0.\bar{11}.2$	$\frac{11}{2}$ P	$\frac{11}{2}$ R	$e^{\frac{8}{3}}$
$13.\bar{5}.\bar{5}$	$60\bar{6}1$	6 P	6 R	$e^{\frac{13}{5}}$
$28.\bar{11}.\bar{11}$	$13.0.\bar{13}.2$	$\frac{13}{2}$ P	$\frac{13}{2}$ R	$e^{\frac{28}{11}}$
$5\bar{2}\bar{2}$	$70\bar{7}1$	7 P	7 R	$e^{\frac{5}{2}}$
$17.\bar{7}.\bar{7}$	$80\bar{8}1$	8 P	8 R	$e^{\frac{17}{7}}$
$19.\bar{8}.\bar{8}$	$90\bar{9}1$	9 P	9 R	$e^{\frac{19}{8}}$
$9\bar{4}\bar{4}$	$13.0.\bar{13}.1$	13 P	13 R	$e^{\frac{9}{4}}$
$22\bar{1}$	$01\bar{1}1$	— P	— R	$e^{\frac{1}{2}}$
$77\bar{5}$	$04\bar{4}3$	$-\frac{4}{3}$ P	$-\frac{4}{3}$ R	$e^{\frac{5}{7}}$
$11\bar{1}$	$02\bar{2}1$	— 2 P	— 2 R	e^{1}
$2\bar{1}\bar{1}$	$10\bar{1}0$	∞ P	∞ R	e^{2}
$41\bar{2}$	$11\bar{2}1$	$\frac{2\,P\,2}{4}$	——	$d^{1}\,d^{\frac{1}{4}}\,b^{\frac{1}{2}}$
$7.10.\bar{5}$ $10.7.\bar{5}$	$\bar{1}5\bar{4}4$ $14\bar{5}4$	$-\frac{\frac{5}{4}P\frac{5}{4}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{3}{4}R\frac{5}{3}}{2}$, d, s.	$d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{5}{7}}\,b^{1}$

(1) Le lettere d, s, che seguono il simbolo di Naumann, indicano *destro* o *sinistro*.

Simboli di Miller	Simboli di Bravais	Simboli di Naumann (piramidale)	Simboli di Naumann (romboedrico)	Simboli di Lévy (romboedrico)
$5.11.\overline{10}$ $11.5.\overline{10}$	$\bar{2}7\bar{5}2$ $25\bar{7}2$	$-\frac{\frac{7}{2}P\frac{7}{5}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{3}{2}R\frac{7}{3}}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{5}{11}} b^{\frac{1}{2}}$
(1) ★ $5.12.\overline{10}$ $12.5.\overline{10}$	$\bar{7}.22.\overline{15}.7$ $7.15.\overline{22}.7$	$-\frac{\frac{22}{7}P\frac{22}{15}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{8}{7}R\frac{11}{4}}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{5}{12}} b^{\frac{1}{2}}$
$25\bar{4}$ $52\bar{4}$	$\bar{1}3\bar{2}1$ $12\bar{3}1$	$-\frac{3P\frac{3}{2}}{4}$, d, s.	$-\frac{R3}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{2}{5}} b^{\frac{1}{2}}$
——— $14.5.\overline{10}$	——— $35\bar{8}3$	$-\frac{\frac{8}{3}P\frac{8}{5}}{4}$, s.	$-\frac{\frac{2}{3}R4}{2}$, s.	$d^1 d^{\frac{5}{14}} b^{\frac{1}{2}}$
——— $31\bar{2}$	——— $23\bar{5}2$	$-\frac{\frac{5}{2}P\frac{5}{3}}{4}$, s.	$-\frac{\frac{1}{2}R5}{2}$, s.	$d^1 d^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}$
★ $4.13.\bar{8}$ $13.4.\bar{8}$	$\bar{3}7\bar{4}3$ $34\bar{7}3$	$-\frac{\frac{7}{3}P\frac{7}{4}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{1}{3}R7}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{4}{13}} b^{\frac{1}{2}}$
$3.10.\bar{6}$ $10.3.\bar{6}$	$\bar{7}.16.\bar{9}.7$ $7.9.\overline{16}.7$	$-\frac{\frac{16}{7}P\frac{16}{9}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{2}{7}R8}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{3}{10}} b^{\frac{1}{2}}$
★ $5.17.\overline{10}$ $17.5.\overline{10}$	$\bar{4}9\bar{5}4$ $45\bar{9}4$	$-\frac{\frac{9}{4}P\frac{9}{5}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{1}{4}R9}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{5}{17}} b^{\frac{1}{2}}$
★ $3.11.\bar{6}$ $11.3.\bar{6}$	$\bar{8}.17.\bar{9}.8$ $8.9.\overline{17}.8$	$-\frac{\frac{17}{8}P\frac{17}{9}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{1}{8}R17}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{3}{11}} b^{\frac{1}{2}}$
$4.15.\bar{8}$ $15.4.\bar{8}$	$\overline{11}.23.\overline{12}.11$ $11.12.\overline{23}.11$	$-\frac{\frac{23}{11}P\frac{23}{12}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{1}{11}R23}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{4}{15}} b^{\frac{1}{2}}$

(1) Le forme contrassegnate dall'asterisco sono nuove per il quarzo.

Simboli di Miller	Simboli di Bravais	Simboli di Naumann (piramidale)	Simboli di Naumann (romboedrico)	Simboli di Lévy (romboedrico)
⋆ $92\bar{4}$ $9\bar{4}2$	$7.6.\bar{13}.7$ $13.\bar{6}.\bar{7}.7$	$\frac{\frac{13}{7}P\frac{13}{7}}{4}$, d, s.	$\frac{\frac{1}{7}R13}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{2}{9}} b^{\frac{1}{2}}$
—— $19.\bar{8}.4$	—— $9\bar{4}\bar{5}5$	$\frac{\frac{9}{5}P\frac{9}{5}}{4}$, s.	$\frac{\frac{1}{5}R9}{2}$, s.	$d^1 d^{\frac{4}{19}} b^{\frac{1}{2}}$
⋆ $29.5.\bar{10}$ $29.\bar{10}.5$	$8.5.\bar{13}.8$ $13.\bar{5}.\bar{8}.8$	$\frac{\frac{13}{8}P\frac{13}{8}}{4}$, d, s.	$\frac{\frac{3}{8}R\frac{13}{3}}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{5}{29}} b^{\frac{1}{2}}$
⋆ $22.1.\bar{2}$ $22.\bar{2}.1$	$71\bar{8}7$ $8\bar{1}\bar{7}7$	$\frac{\frac{8}{7}P\frac{8}{7}}{4}$, d, s.	$\frac{\frac{6}{7}R\frac{4}{3}}{2}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{1}{22}} b^{\frac{1}{2}}$
$28.1.\bar{2}$ $28.\bar{2}.1$	$9.1.\bar{10}.9$ $10.\bar{1}.\bar{9}.9$	$\frac{\frac{10}{9}P\frac{10}{9}}{4}$, d, s.	$\frac{\frac{8}{9}R\frac{5}{4}}{4}$, d, s.	$d^1 d^{\frac{1}{28}} b^{\frac{1}{2}}$
⋆ $78\bar{5}$ $87\bar{5}$	$\bar{1}.13.\bar{12}.10$ $1.12.\bar{13}.10$	$-\frac{\frac{13}{10}P\frac{13}{12}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{11}{10}R\frac{13}{11}}{2}$, d, s.	$d^{\frac{1}{7}} d^{\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{5}}$
⋆ $79\bar{5}$ $97\bar{5}$	$\bar{2}.14.\bar{12}.11$ $2.12.\bar{14}.11$	$-\frac{\frac{14}{11}P\frac{7}{6}}{4}$, d, s.	$-\frac{\frac{10}{11}R\frac{7}{5}}{2}$, d, s.	$d^{\frac{1}{7}} d^{\frac{1}{9}} b^{\frac{1}{5}}$
⋆ —— $49.37.\bar{23}$?	—— $4.20.\bar{24}.21$	$-\frac{\frac{8}{7}P\frac{6}{5}}{4}$, s.	$-\frac{\frac{16}{21}R\frac{3}{2}}{2}$, s.	$d^{\frac{1}{37}} d^{\frac{1}{49}} b^{\frac{1}{23}}$

Queste sono riunite in combinazioni numerose, le quali variano molto anche colla grossezza del cristallo; nei più grossi dominano i trapezoedri, nei più piccoli invece i romboedri.

Passeremo ora in breve rassegna le singole forme, dando gli angoli trovati, che servirono a stabilirne i simboli:

Zona $[2\bar{1}\bar{1} . 100]$. (Zona dei romboedri diretti).

$(2\bar{1}\bar{1})$. Questa forma è costante, con facce grandi e splendenti; le facce che stanno sotto al romboedro (100) sono sempre striate parallelamente alla loro intersezione colle facce di questa forma; invece quelle che stanno sotto al romboedro $(22\bar{1})$, sono terse, splendenti, e perfettamente lisce. Spesso le sue facce presentano estese infossature, abbastanza profonde, a margini netti e irregolari, a fondo scabro e opaco (fig. 11),

le quali qualche volta si prolungano lateralmente in sottili bande argillose, ricoperte da uno strato cristallino di accrescimento più o meno grosso. Questa scabrosità si estende talora a due o tre facce contigue del prisma, e allora precisamente a quelle che sono adiacenti alle facce meno sviluppate di (100) e $(22\bar{1})$.

Le tre facce del prisma che ho detto sopra essere striate, sono qualche volta finamente scabre in una porzione della loro superfice, limitata per lo più nettamente da due linee che formano un angolo assai acuto, rivolto verso la relativa faccia di (100) (fig. 4, 5).

(100). Non manca in nessun caso, e le sue facce si distinguono da quelle di $(22\bar{1})$ per il loro sviluppo generalmente maggiore; nel caso, assai frequente, in cui una sola delle sei facce della pseudo-piramide solita sia ampiamente sviluppata (fig. 3, 12), questa è sempre una faccia di (100). Inoltre, su queste sono più marcate le solite ondulazioni in forma di triangoli sferici, che qualche volta si presentano; ma per lo più, sì queste facce, come quelle di $(22\bar{1})$, sono ammirabilmente piane e splendenti, e si prestano a misure della massima precisione.

$(15.\bar{1}.\bar{1})$. Facce di questa forma, di varia estensione, si trovano abbastanza frequentemente. Sono splendenti, ma sempre più o meno curve, qualche rara volta striate parallelamente all'asse della zona (fig. 6), più di frequente un po' solcate in senso normale all'asse stesso. Raramente ne trovai alcune suscettibili di una discreta misura.

$15\bar{1}\bar{1}.100$ = Mis. med. 5.27. Calc. 5.36

Trovati: 5.18 — I; 5.53 — I; 5.32 — II; 5.00 — I.

$(3\bar{1}\bar{1})$. Di rado manca questa forma nei cristalli di piccole dimensioni, ma è pure abbastanza frequente nei più grossi; le sue facce, bene sviluppate, sono pianissime e assai splendenti, raramente curve.

$3\bar{1}\bar{1}.100$ = Mis. med. 27.7. Calc. [1] 27.5.

Trovati: 27.3 — III; 26.59 — III; 27.9 — III; 27.7 — I; 27.12 — III; 27,1 — III; 27,2 — III; 26,59 — II; 27,3 — III; 27,12 — III; 27,19 — II; 27.14 — II; 27.13 — III; 27.7 — III; 27.15 — III.

$(29.\overline{10}.\overline{10})$, $(11.\bar{4}.\bar{4})$, $(8\bar{3}\bar{3})$, $(13.\bar{5}.\bar{5})$, $(28.\overline{11}.\overline{11})$, $(5.\bar{2}.\bar{2})$, $(17.\bar{7}.\bar{7})$, $(19.\bar{8}.\bar{8})$, $(9\bar{4}\bar{4})$.

Tutte queste forme potei osservare parecchie volte, e per stabilirne il simbolo con sicurezza, volli non solo che le imagini fossero nette ed uniche, ma che le facce relative fossero chiaramente distinte, anche ad occhio nudo. Queste faccette, di varia estensione, assai frequenti nei piccoli cristallini, sono assai piane e splendenti, salve rare eccezioni in cui sono un po' curve.

$29\,\overline{10}\,\overline{10}.100$ = Mis. med. 27.45. Calc. 27.55.

Trovati: 27.34 — II; 27.45 — III; 27.57 — II.

$11\,\bar{4}\,\bar{4}.100$ = Mis. med. 29.18. Calc. 29.16.

Trovati: 29,10 — II; 29.27 — I; 29.21 — III.

$8\bar{3}\bar{3}.100$ = Mis. med. 30.8. Calc. 30.4

Trovati: 29.58 — I; 29.53 — I; 30.6 — I; 30.13 — II; 30.18 — II;

[1] Nei calcoli mi servii del rapporto parametrico dato dal Kupffer: $a:c = 1:1,0999$.

$13\ \bar{5}\ \bar{5}$. 100 = Mis. med. 30.36 . Calc. 30.44.

Trovati: 30.28 — III; 30.47 — I; 30.21 — II; 30.43 — III; 30.46 — II.

$28 . \bar{1}\bar{1}\ \bar{1}\bar{1}$. 100 = Mis. med. 31.6. Calc. 31.19.

Trovati: 31.00 — I; 31.5 — III; 31.8 — II; 31.12 — III; 31.2 — II.

$5\bar{2}\bar{2}$. 100 = Mis med. 31.36 . Calc. 31.48.

Trovati: 31.38 — I; 31.31 — II; 31.34 — II; 31.40 — II; 31.39 — II; 31.42 — III; 31.38 — II.

$17\ \bar{7}\ \bar{7}$. 100 = Mis. med. 32.33 . Calc. 32.36.

Trovati: 32.25 — III; 32.31 — II; 32 34 — III; 32.46 — II; 32.29 — III; 32.33 — III; 32 35 — II; 32.35 — III.

$19\ \bar{8}\ \bar{8}$. 100 = Mis. med. 33.1 . Calc. 33.13.

Trovati: 32.55 — II; 32.55 — II; 33.9 — III.

$9\bar{4}\bar{4}$. 100 = Mis. med. 34.37 . Calc. 34.45.

Trovati: 34.42 — II; 34.25 — I; 34.37 — I; 34.38 — II.

Zona [$11\bar{2}$. $22\bar{1}$] (Zona dei romboedri inversi).

($22\bar{1}$). Le sue facce, generalmente bene sviluppate, piane e brillanti, sono presenti in tutti i cristalli [V. (100)].

($77\bar{5}$). Forma non molto frequente, e che si presenta con facce curve e solcate, come ($15 . \bar{1} . \bar{1}$); il simbolo fu determinato dalle zone [$87\bar{5}$. 100] e [$11\bar{2}$. $22\bar{1}$]; una sola volta potei trovarne una faccia misurabile:

$77\bar{5}$. $22\bar{1}$ = Mis.: 8.17 — I . Calc. 7.39.

($11\bar{1}$). Una sola faccia ne trovai, ampia, splendente, ma finamente solcata parallelamente all'asse della zona.

$11\bar{1}$. $22\bar{1}$ = Mis. 17.5 — II . Calc. 16.44.

Zona [$2\bar{1}\bar{1}$. $22\bar{1}$].

In questa zona, così ricca di facce nel quarzo di altre località, nessun trapezoedro troviamo al di sotto della solita piramide trigonale, e uno solo al di sopra.

($41\bar{2}$). Questa forma non manca se non in rarissimi casi, affatto eccezionali, e le sue facce, di vario sviluppo, sono sempre piane e splendentissime; qualche volta sono un po' striate parallelamente allo spigolo [$11\bar{2}$. 100], ma in modo da non toglierne lo splendore. Spesso si presentano delle vicinali bellissime, che danno immagini assai nette, e stanno fra ($41\bar{2}$) e ($22\bar{1}$); ne vidi anche tre insieme, però l'angolo che fanno è assai variabile; in diversi cristalli trovai che 13 di queste vicinali erano inclinate sulla faccia di ($41\bar{2}$) rispettivamente di:

0°,5′; 0°,8′; 0°,9′; 0°,11′; 0°,11′; 0°,12′; 0°,12′; 0°,12′; 0°,12′; 0°,14′; 0°,14′; 0°,14′; 0°,17′.

Ne osservai anche assai più lontane, e allora sono ampie, sostituiscono interamente la ($41\bar{2}$), e quasi parrebbero costituire una forma a parte; ma la soverchia complicazione del simbolo fa dubitare assai; questo simbolo sarebbe:

($31 . 8 . \bar{1}6$) ($23 . 24 . \bar{4}7 . 23$),*

e l'angolo su ($22\bar{1}$) trovai in quattro cristalli = 29.37; 29.52; 29.38; 29.34.

(1) Tutti questi angoli hanno peso = III.

41$\bar{2}$. 22$\bar{1}$ = Mis. med. 28.53 . Calc. 28.54.

Trovati [1]: 28.51 ; 28.52 : 28.51 ; 28.54 ; 28.54 ; 28.48 ; 28.52 ; 28.52 ; 28.53 ; 28.53 ; 28.53 ; 28.54 ; 28.53 ; 28.52 ; 28.55 ; 28.53 ; 28.52 ; 28.54 : 28.53.

(10 . 7 . $\bar{5}$). Forma abbastanza frequente, a facce generalmente curve, ma splendenti, di varía ampiezza. Il simbolo fu verificato colle zone [87$\bar{5}$. 100] e [2$\bar{1}\bar{1}$. 22$\bar{1}$].

Misurai: 10 7 $\bar{5}$. 22$\bar{1}$ = 9.37 — I . (Calc. 9.31).

10.23 approssimativo.

10.13 id.

Zona [11$\bar{2}$. 100].

È degno di nota lo straordinario sviluppo di questa zona; le forme che vi appartengono hanno le facce abbastanza piane, e più o meno striate parallelamente all'asse della zona stessa, eccezione fatta per le due più vicine al romboedro (100), e cioè (28 . 1 . $\bar{2}$) e (22 . 1 . $\bar{2}$), che sono curve. Tutte queste forme sono abbastanza frequenti, fuorchè nei minori cristallini, nei quali si trova solamente la (12 . 5 . $\bar{1}\bar{0}$). Parlerò solo della forma che più interessa, dando per le altre i valori degli angoli misurati e calcolati.

(12 . 5 . $\bar{1}\bar{0}$). Sono rari i cristalli in cui questa forma non compaia con qualche faccia, piccola o grande; la sua relativa vicinanza a una forma di simbolo semplice, la (5 2 $\bar{4}$), potrebbe far credere trattarsi di facce spostate di questa forma; ma le molteplici misure istituite su tutti i cristalli che me lo permisero mi fecero tosto escludere questa idea: la (52$\bar{4}$) non si presenta che insieme ad altri trapezoedri, e neppure frequentemente; la differenza fra i valori angolari delle due forme è troppo forte e costante per lasciar dubbio, e finalmente mi venne fatto di trovarle insieme tutt'e due in un bellissimo cristallo (fig. 11), e misurate sul romboedro mi diedero:

52$\bar{4}$. 100 = 41 . 57 — II . (Calc. 41 . 47)

12 5 $\bar{1}\bar{0}$. 100 = 42.57 — II . (Calc. 42.59).

Le facce di questa forma sono brillantissime, ma per lo più curve, e spesso non si ha che una sola superfice curva, o intaccata da faccette, o scanellata parallelamente all'asse della zona, la quale va da (41$\bar{2}$) a (11$\bar{2}$); in parecchi cristalli ne trovai però alcune facce atte a buone misurazioni; eccone i risultati:

12 5 $\bar{1}\bar{0}$. 100 = Mis. med. 43.9 . Calc. 42.59.

Trovati: 43.12 — II; 43.19 — II; 43.16 — II ; 42.48 — I; 43.27 — I; 43.11 — I ; 42.57 — II ; 43.9 — II ; 43.8 — I; 43.4 — III.

e per la (52$\bar{4}$):

52$\bar{4}$. 100 = Mis. med. 42.2 . Calc. 41.47.

Trovati : 42.24 — I ; 42.9 — I ; 41.57 — II; 41.47 — II ; 42.13 — I.

Sempre riguardo alla (I2 . 5 . $\bar{1}\bar{0}$), dall'angolo misurato su (100), dubitai sul principio che ci potesse essere identità colla nuova forma (31 . 13 . $\bar{2}\bar{6}$) (6 . 13 . $\bar{1}\bar{9}$. 6), data dal vom Rath [2], per la quale si calcola: 31 13 $\bar{2}\bar{6}$. 100 = 43.10; ma la soverchia complicazione del simbolo milleriano mi persuase subito essere questa ipotesi inverosimile; sarebbe infatti assurdo, per una differenza di *0°,11'* nel valore calcolato,

[1] Tutti questi angoli hanno peso = III.

[2] Quarze aus Nord Carolina. — Z. für Kryst. X, 158.

preferire un simbolo così complesso, quando se ne ha uno semplice che corrisponde assai bene coi valori misurati. Non potei istituire misure di controllo con facce di altre forme, perchè le immagini diventavano scalari, non permettendo più l'esattezza richiesta, e d'altra parte le numerose misure nella zona, che sono anche le più sensibili, mi paiono sufficientissime a mettere fuori di dubbio il simbolo dato da me.

11 5 $\overline{10}$. 100 = Mis. med. 45.24 . Calc. 45.33.

Trovati: 45.19 — I; 45.27 — II.

14 5 $\overline{10}$. 100 = Mis. med. 38.1 . Calc. 38.29.

Trovati: 38.5 — II; 37.54 — I.

31$\bar{2}$. 100 = Mis. med. 36.12 . Calc. 36.32.

Trovati: 36.24 — II; 36.9 — II; 35.54 — I.

13 4 $\bar{8}$. 100 = Mis. med. 34.38 . Calc. 34.19.

Trovati: 34.41 — II: 34.53 — I; 34.46 — II; 34.28 — II; 34.40 — II; 34.35 — II; 34.33 — III.

10 3 $\bar{6}$. 100 = Mis. med. 33.37 . Calc. 33.38.

Trovati: 33.36 — I; 33.37 — II; 33.37 — III.

17 5 $\overline{10}$. 100 = Mis. med. 32.49 . Calc. 33.6.

Trovati: 32.40 — II; 32.58 — II; 32.56 — II; 32.44 — II.

11 3 $\bar{6}$. 100 = Mis. med. 31.6 . Calc. 31.6.

Trovati: 31.9 — II; 31.3 — II.

15 4 $\bar{8}$. 100 = Mis. med. 30.31 . Calc. 30.32.

Trovati: 30.30 — II; 30.17 — II; 30.26 — II; 30.41 — II; 30.41 — II; 30.19 — II; 30.47 — II; 30.21 — II; 30.38 — II.

92$\bar{4}$. 100 = Mis. med. 26.1 . Calc. 26.6.

Trovati: 25.52 — II; 25.52 — II; 26.7 — III; 26.3 — III; 25.47 — II; 26.18 — II.

19 4 $\bar{8}$. 100 = Mis. med. 24.37 . Calc. 24.52.

Trovati: 24.32 — II; 24.42 — II.

29 5 $\overline{10}$. 100 = Mis. med. 20.47 . Calc. 20.44.

Trovati: 20.52 — II; 20.50 — III; 21,00 — I; 20.38 — II; 20.38 — II.

22 1 $\bar{2}$. 100 = Mis. med. 5.24 . Calc. 5.39.

Trovati; 5.40 — I; 5.36 — II; 5.3 — I; 5.21 — I; 5.17 — II.

28 1 $\bar{2}$. 100 = Mis. med. 4.24 . Calc. 4.26.

Trovati: 4.6 — II; 4.58 — I; 4.30 — II; 4.8 — II; 4.47 — I; 3.46 — I; 4.57 — I.

22$\bar{1}$. 100 = Mis. med. 46.17 . Calc. 46.16.

Trovati [1]: 46.15; 46.19; 46.17; 46.19; 46.19; 46.20; 46.16; 46.19; 46.15; 46.17; 46.18; 46.17; 46.15; 46.15; 46.16; 46.16; 46.14; 46.16; 46.17; 46.18; 46.19; 46.17; 46.17; 46.15; 46,17.

[1] Tutti questi angoli hanno peso = III.

$11\bar{2} . 100$ = Mis. med. 66.51 . Calc. 66.52.

Trovati [1]: 66,52 ; 66.51 ; 66.48 ; 66.51 ; 66.50 ; 66 52 ; 66.54 ; 66.52 ; 66.51 ; 66.50 ; 66.52 ; 66.52 ; 66.51 ; 66.52 ; 66.52 ; 66.48 ; 66.52 ; 66.50 ; 66.52 ; 65.52 ; 66.49 ; 66.52 ; 66.50 ; 66.51 ; 66.52 ; 66.51.

$41\bar{2} . 11\bar{2}$ = Mis. med. 37.55 . Calc. 37.58.

Trovati [1]: 37.55 ; 37.54 ; 37.57 ; 37.54 ; 37.58 ; 37.56 ; 37.54 ; 37.56 ; 37.53 ; 37.55 ; 37.54 ; 37.56 ; 37.54 ; 37.54 ; 37.54 ; 37.53 ; 37.55 ; 37.55 ; 37.53 ; 37.57 ; 37.55 ; 37.55 ; 37.56.

Zona [$77\bar{5} . 100$].

($77\bar{5}$). Vedi sopra.

($87\bar{5}$) Nella maggior parte dei cristalli, di tutte le dimensioni, si può notare questa forma, con facce splendenti, di varia estensione, talora molto ampie, ma quasi sempre assai curve, e profondamente solcate normalmente alla direzione dello spigolo [$87\bar{5} . 22\bar{1}$]. Non mi fu per altro difficile trovare 5 bei cristalli, nei quali le facce di questa forma, più piccole del solito e piane, si prestarono ad ottime misure. Eccone i risultati, che non permettono alcun dubbio sull'esattezza del simbolo dato più sopra.

		$87\bar{5} . 22\bar{1}$	$87\bar{5} . 41\bar{2}$	$87\bar{5} . 11\bar{2}$
Cristallo I.	mis. . . .	6.52 — II ;	24.2 — II ;	32.27 — II.
" II.	" . . .	7.00 — I ;	23.56 — I ;	32.8 — I.
" III.	" . . .	7.3 — I ;	24.24 — I ;	31.46 — I.
" IV.	" . . .	6.56 — II ;	23.51 — I ;	32.19 — I.
" V.	" . . .	7.14 — I ;	23.37 — I ;	32.20 — I.
Mis. med.		6.58	23.59	32.15.
Calcol.		6.55	24.7	32.22.

($97\bar{5}$). Benchè meno frequenti di quelle della precedente, pure non sono rare le facce di questa forma, ma in generale così fortemente solcate, che in due soli cristalli mi permisero buone misure. Non le ho trovate mai disgiunte da quelle di ($87\bar{5}$), dalle quali però sono separate per uno spigolo ben netto e distinto. Calcolai il simbolo, nel quale anche la semplicità è garanzia di esattezza, dalla zona, che verificai scrupolosamente, e dall'angolo su ($87\bar{5}$). Però in un cristallo che si prestò a tale scopo, eseguii tre misure di controllo sulle facce adiacenti.

$97\bar{5} . 87\bar{5}$ = Mis. med. 3.37 . Calc. 3.18.

Trovati: 3.36 — II; 3.38 — I.

	$97\bar{5} . 22\bar{1}$	$97\bar{5} . 41\bar{2}$	$97\bar{5} . 11\bar{2}$
Mis.	7.57 — II ;	21.9 — I ;	34.48 — I.
Calc.	7.47 ;	21.31 ;	34.12.

Zona [$22\bar{1} . 3\bar{1}\bar{1}$].

($49 . 37 . \bar{23}$)? In tre cristalli trovai facce di questa forma, ma due sole misurabili; tutte tre le volte verificai che stava perfettamente nella zona, e calcolai

[1] Tutti questi angoli hanno peso = III.

il simbolo dall'angolo che fa con $(22\bar{1})$. Ora, siccome questo simbolo è eccessivamente complicato, e gli angoli che potei misurare son pochi nè perfettamente concordanti nei loro valori, ma d'altra parte non mi riuscì di trovare in questa zona un simbolo più semplice che tornasse poi bene al calcolo, e lo splendore e la nettezza di quelle faccette non mi permettono di tacerne, così do il simbolo come incerto.

$49\ 37\ \bar{2}\bar{3}\ .\ 22\bar{1}$ = Mis. med. 7.27 . Calc. 7.17.

Trovati: 7.17 — II; 7.48 — I.

$49\ 37\ \bar{2}\bar{3}\ .\ 3\bar{1}\bar{1}$ = Mis. med. 51.56 . Calc. 52.23.

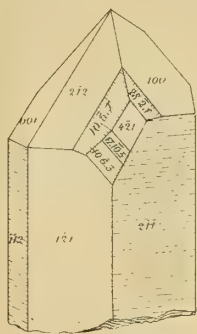
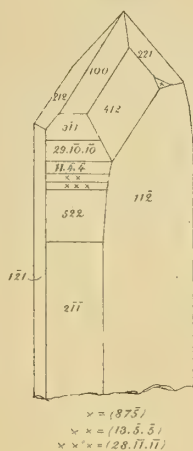
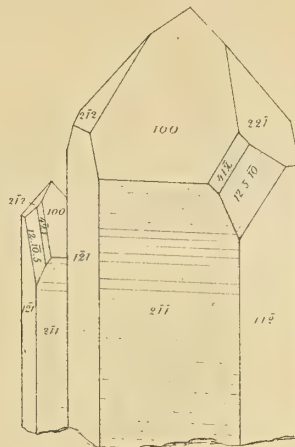
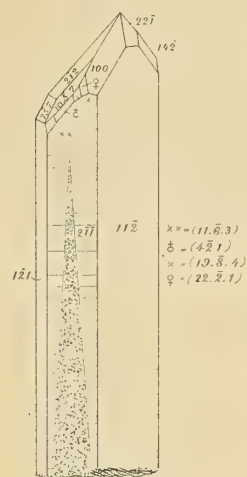
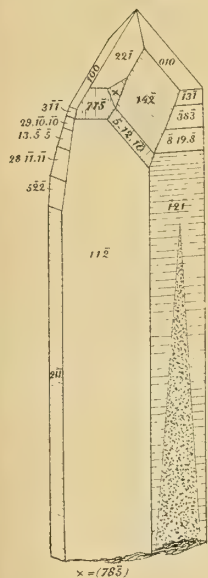
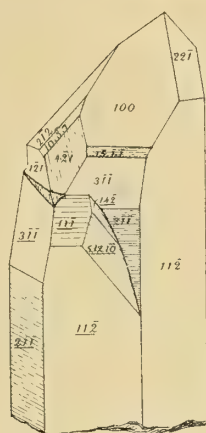
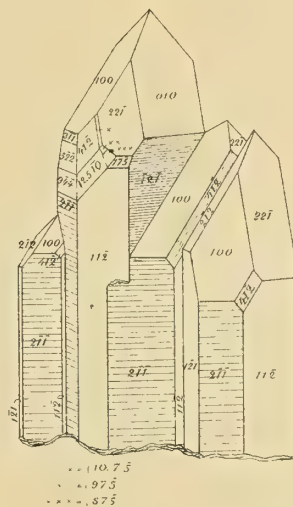
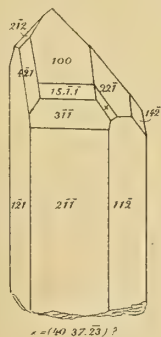
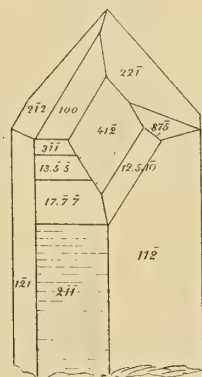
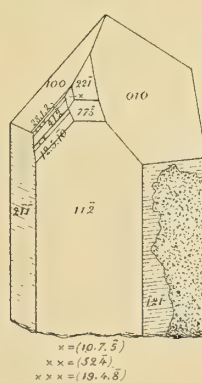
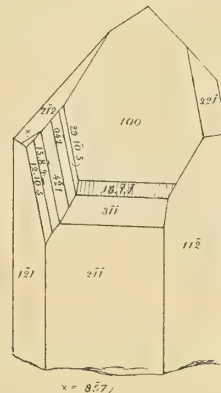
Trovati: 52.11 — II; 51.26 — I.

$49\ 37\ \bar{2}\bar{3}\ .\ 11\bar{2}$ = Mis. 37.52 — II; Calc. 37.31.

Dal complesso di quanto si disse più sopra, dallo sviluppo della zona $[100\ .\ 11\bar{2}]$, dalla frequenza e apparenza delle facce del trapezoedro di questa zona $(12\ .\ 5\ .\ \bar{1}\bar{0})$, dalle faccette brillantissime e generalmente curve (di $87\bar{5}$), dalla mancanza quasi assoluta dei trapezoedri, anche più comuni, della zona $[2\bar{1}\bar{1}\ .\ 22\bar{1}]$, risulta per questo quarzo una *facies* tutta speciale, caratteristica, ben distinta da quella dei quarzi delle altre località a me note.

Si trovano abbastanza frequentemente geminati a penetrazione, secondo la più comune maniera del quarzo. È sempre facile distinguerli dal numero e dalla disposizione delle facce di $(41\bar{2})$, e dalla diversa apparenza delle facce del prisma, come fu detto più sopra. Invece non aiutano nella distinzione le facce di (100) e $(22\bar{1})$ che in questi geminati sono sempre del pari brillanti, e di sviluppo variabilissimo.

Spesso i due individui sono solo parzialmente compenetrati (fig. 6); e qualche volta tanto poco da riuscire affatto distinti (fig. 7).

E. Artini dis. Lit. Bruno e Salomone, Roma.

RELAZIONE

letta dal Socio A. Cossa, relatore, a nome anche del Socio E. Paternò, nella seduta del 20 maggio 1888 sulla Memoria di Luigi Balbiano, intitolata: *Sopra alcuni derivati monosostituiti del pirazolo e sui composti idrogenati che ne derivano.*

« Il prof. Luigi Balbiano il quale già da qualche tempo ha comunicato alla nostra Accademia una Nota preliminare sopra un fenilpirazolo ottenuto facendo agire la fenilidrazina sulla epicloridrina, nella Memoria che ora presenta, riferisce distesamente le ricerche da lui eseguite sul fenilpirazolo, sul para-tolilpirazolo, sull'orto-tolilpirazolo e sui composti che da questi derivano per la loro limitata o completa idrogenazione.

« L'intento principale che il professore Balbiano si propose col suo pregevole lavoro fu quello di scoprire se il nucleo pirazolico dei derivati monosostituiti del pirazolo, che egli per il primo riuscì ad ottenere, è isomero, oppure identico col nucleo pirazolico dei derivati polisostituiti del pirazolo studiati da Knorr e da altri. Per decidere tale importante questione l'autore ha ideato molto opportunamente di idrogenare parzialmente i pirazoli ottenuti coll'epicloridrina e di paragonare i piroazolini prodotti con quelli che si ottengono dall'acroleina seguendo il metodo del Fischer. Tale studio di confronto fu pure esteso alle trimetilendiammine sostituite che derivano dall'idrogenazione completa, tanto dei pirazolini quanto dei pirazoli.

« La conclusione che evidentemente scaturisce dalle diligenti ed ingegnose ricerche del Balbiano è che il nucleo pirazolo dei derivati monosostituiti, da lui fatti conoscere, è identico col pirazolo dei derivati polisostituiti del Knorr.

« L'autore si riserva di progredire nelle sue ricerche sui pirazoli monosostituiti, su quelli polisostituiti che potrà ottenere dai loro derivati bromurati, e sulle diammine che risulteranno dalle due serie di composti.

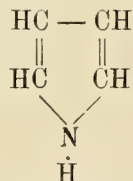
« La Memoria del prof. Luigi Balbiano è, a nostro parere, notevole per l'importanza e la novità dei fatti bene accertati che essa contiene, e pertanto proponiamo che sia per intiero inserta nei volumi della nostra Accademia ».

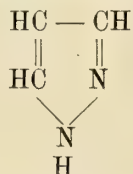
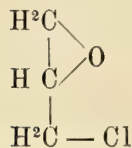
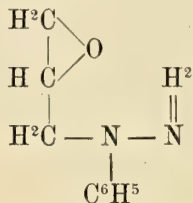
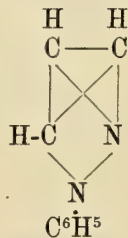
Sopra alcuni derivati monosostituiti del pirazolo e sui composti idrogenati che ne derivano.

Memoria I. del dott. LUIGI BALBIANO.

Nell'aprile dell'anno scorso ho presentato all'Accademia dei Lincei (1) una Nota preliminare sopra un fenilpirazolo ottenuto per azione della fenilidrazina sull'epicloridrina. Il modo d'origine e sopratutto il compiersi la reazione a temperatura poco elevata ed alla pressione ordinaria, mi autorizzarono allora a supporre che non avvenissero trasposizioni molecolari; perciò emisi l'idea, come conseguenza logica di questa supposizione, che il nucleo pirazolico del mio composto potesse essere isomero col nucleo pirazolico al quale si rannodano i diversi derivati polisostituiti preparati da L. Knorr (2) e dai suoi collaboratori.

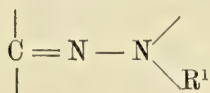
Partendo dalla formola del pirrolo

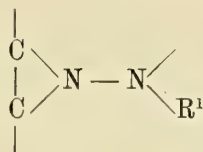
```
HC — CH
||    ||
HC    CH
  \  /
   N
   H
```

suggerita dal Baeyer (3) ed appoggiata dai lavori del Knorr stesso, di C. Paal, di G. Ciamician, il Knorr assegna al pirazolo una costituzione analoga

```
HC — CH
||    ||
HC    N
  \  /
   N
   H
```

Invece partendo dall'epicloridrina io arrivavo al fenilpirazolo, prodotto monosostituito di un pirazolo isomero:

```
                                              H   H²          H   H
H²C\             H²C\                         C —— C          C —— C
 |  >O            |  >O                       |\   |          |\  /|
H C/             H C/        H²               | \  |          | \/ |
 |                |          ||               |  \ |          | /\ |
H²C — Cl         H²C — N — N                 H²C   N         H-C   N
                       |                        \ /             \ /
                       C⁶H⁵                      N               N
                                                C⁶H⁵            C⁶H⁵
Epicloridrina    Composto intermedio    Derivato pirazolinico    Fenilpirazolo
```

(1) Rendic. Accad. Lincei, t. III, p. 339.
(2) Liebig's Annalen, t. CCXXXVIII, p. 137.
(3) Berl. Berich., t. III, p. 514.

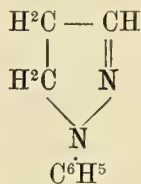
La quistione pareva dovesse essere risolta subito dopo dal prof. E. Fischer, perchè il Knorr accennava nell'importante Memoria sopra citata (Liebig's Ann., t. CCXXXVIII) ad una comunicazione privata del primo egregio chimico che lo avvertiva di avere ottenuto dalle aldeidi ed acetoni non saturi colla fenilidrazina alcuni derivati pirazolici, e nel caso speciale dell'acroleina era da supporsi un fenilpirazolo.

Ora l'ottenere un fenilpirazolo dall'acroleina, composto che contiene un carbonile aldeidico, significa che nel composto azotato deve necessariamente aversi il concatenamento:

$$\overset{|}{\underset{|}{C}} = N - N \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown R^1 \end{smallmatrix}$$

perciò esclusa la concatenazione:

$$\begin{matrix} | & & & \\ C & \diagdown & & \\ | & & N - N & \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown R^1 \end{smallmatrix} \\ C & \diagup & & \\ | & & & \end{matrix}$$

solo possibile in un nucleo pirazolico a parziale aggruppamento interno.

Il prof. E. Fischer pubblicò nel maggio dell'anno passato [1] col signor Oskar Knoevenagel i risultati delle sue esperienze; ma al posto di un derivato pirazolico ottenne dall'acroleina un derivato pirazolinico al quale, seguendo l'esempio del Knorr, assegnò la formola:

$$\begin{matrix} H^2C & - & CH \\ | & & \| \\ H^2C & & N \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & N & \\ & C^6H^5 & \end{matrix}$$

La quistione posta nella mia Nota preliminare è perciò tuttora insoluta e per risolverla mi si presentano ora due vie:

1° Tentare di togliere 2 atomi di idrogeno ai pirazolini che si possono avere dall'acroleina e convertirli in pirazoli,

2° Addizionare 2 atomi di idrogeno ai pirazoli che si possono ottenere dall'epicloridrina.

Se i due nuclei pirazoli sono identici, queste due serie di composti devono essere reciprocamente eguali.

Da saggi fatti mi sono convinto che la prima via non è effettuabile, per la profonda trasformazione che subiscono i derivati pirazolinici per mezzo degli agenti ossidanti; ho perciò scelto la seconda via, ed in questa prima Memoria riferisco gli studi fatti sul fenil, p-tolil ed o-tolil-pirazoli.

In secondo luogo la preparazione di derivati monosostituiti del pirazolo ha una importanza speciale, perchè tanto Knorr quanto altri chimici, fra i quali mi è obbligo citare particolarmente L. Claisen, non hanno potuto ottenere finora che dei derivati polisostituiti di questa interessantissima sostanza che potrà un giorno venire isolata.

(1) Liebig's. Annalen, t. CCXXXIX, p. 195.

I.

Fenilpirazolo $C^3 H^3 N^2 C^6 H^5$.

Nella Nota sopracitata ho descritto dettagliatamente il metodo seguito per la preparazione di questo composto; perciò, non avendo nulla da modificare a quanto scrissi allora, non credo conveniente ripeterlo. Solo debbo notare che, anche eliminando il cloridrato di fenilidrazina, che si forma nella prima fase della reazione, si produce sempre il fenilpirazolo. In tutte le preparazioni fatte ebbi una rendita oscillante fra il 45 ed il 54 % della quantità teorica.

Ho determinato le costanti fisiche di questo composto con un campione che all'analisi diede

C 74,89 H 5,62 N 19,23

mentre la teoria per la formola $C^9 H^8 N^2$ richiede

C 75,00 H 5,55 N 19,44.

Il fenilpirazolo è un liquido oleoso di color giallo d'oro, che raffreddato col ghiaccio si rappiglia in una massa di cristalli aghiformi raggruppati a ciuffo che fondono alla temperatura di $+11°$—$11°,5$; bolle alla pressione ridotta a 0° di millimetri 765,4 alla temperatura corretta di 246°,5. La sua densità allo stato liquido è espressa dai numeri:

a $+16°$ riferita all'acqua a $0° = 1,1138$
a $+16°$ " " a $+16° = 1,1125$
a $+99°,7$ " " a $0° = 1,0451$

È un po' solubile nell'acqua calda, quasi insolubile nell'acqua fredda.

Cloroplatinato $(C^9 H^8 N^2 H Cl)^2 Pt Cl^4 . 2H^2O$.

Questo composto che ho già descritto nella Nota preliminare contiene 2 molecole di acqua di cristallizzazione che perde alla temperatura di $+100°$ come lo dimostrano le seguenti determinazioni:

I gr. 0,1985 di sale asciugato fra carta, perdono gr. 0,0101 di H^2O
II gr. 0,2044 " " " " gr. 0,0108 di H^2O.

Da questi dati si calcola:

	trovato		calcolato
	I	II	
H^2O %	5,08	5,28	4,90

Il sale secco fonde decomponendosi alla temperatura di 171°-172°.

Fenilpirazolino $C^3 H^5 N^2 C^6 H^5$ *dal fenilpirazolo.*

Non ho potuto avere il fenilpirazolino direttamente dall'epicloridrina e fenilidrazina. Lasciando in riposo per più giorni la soluzione benzinica che contiene il composto $C^3 H^5O N^2 H^2 C^6 H^5$. non si ha eliminazione di acqua; eliminazione che avviene solo col riscaldamento; ma allora si sviluppano anche 2 atomi di idrogeno e si ottiene il fenilpirazolo. Sono ricorso perciò all'idrogenazione mediante il sodio e l'alcool.

Una parte di fenilpirazolo si scioglie in 10 a 15 parti di alcole assoluto e nella

soluzione bollente si introduce poco alla volta ed a piccoli pezzi $^{1}/_{2}$ p. di sodio. La soluzione alcoolica viene aggiunta di acqua; svaporata la maggior parte dell'alcool a bagno maria ed il liquido acquoso sul quale galleggia un olio giallo, si estrae ripetutamente con etere. La soluzione eterea, dopo lavacro acquoso, viene agitata vivamente con una soluzione diluita di acido ossalico, e le acque acide messe da parte per un ulteriore studio.

La porzione eterea viene disseccata con idrato potassico fuso, ed infine distillato l'etere. Il residuo liquido viene sottoposto alla distillazione continuando il riscaldamento fino a che il termometro segna 255°; la porzione che distilla al disotto di questa temperatura è una miscela di fenilpirazolo inalterato e di fenilpirazolino. La porzione rimasta nella stortina, porzione bollente sopra 255°, viene trattata con etere di petrolio (frazione bollente 70°-90°) caldo, il quale lascia indisciolta un po' di resina bruniccia: la soluzione petrolica raffreddata lentamente deposita dapprima un po' di sostanza oleosa bruna simile alla resina; si decanta, e con successivo raffreddamento seguita a deporsi un po' di materia resinosa; si decanta ancora ed infine col raffreddamento si ha una sostanza cristallizzata in belle lamine che si ottengono perfettamente bianche mediante ricristallizzazione dall'etere di petrolio bollente a 70°-90°.

L'analisi dimostra che questa sostanza è un fenilpirazolino.

Difatti:

I gr. 0,2321 di sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero gr. 0,6319 di CO^2 e gr. 0,1475 di H^2O

II gr. 0,160 Azoto $V_{13°}^{764^{mm},5}$ cc. 25,4 $V_{0°}^{76^{mm}}$ 24,12.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^9H^{10}N^2$
C	74,24	73.97
H	7,05	6,86
N	18,92	19,17

Per lo studio di confronto ho preparato il fenilpirazolino dall'acroleina seguendo esattamente le prescrizioni date dal prof. E. Fischer ed ho avuto una rendita un po' migliore di quella che cita nella sua bella Memoria. La rendita in pirazolino puro nella mia preparazione è stata di 45 grammi per 50 grammi di acroleina adoperati. Il campione col quale ho determinato le costanti fisiche conteneva 19,25 % di azoto invece di 19,17.

Il derivato pirazolinico ottenuto per idrogenazione del fenilpirazolo fonde alla temperatura corretta di 51°,5-52° e bolle alla pressione ridotta a 0° di mm. 763,5 alla temperatura corretta di 273°,5-274°.

Il fenilpirazolino dall'acroleina fonde alla temperatura corretta di 51°,5-52° e bolle alla pressione ridotta a 0° di mm. 763,5 alla temperatura corretta di 273°,5-274°.

Tutti e due i pirazolini cristallizzano in belle tavole ben distinte, appartenenti al sistema trimetrico [1], e hanno gli assi ottici nello stesso piano e collo stesso angolo; i due composti sono cristallograficamente identici.

[1] Questi dati li debbo alla cortesia del dott. Lorenzo Bucca assistente nell'Istituto mineralogico dell'Università di Roma, e colgo l'occasione per porgergli i più vivi ringraziamenti.

Il fenilpirazolino dal pirazolo, come quello dall'acroleina, si scioglie un po' nell'acqua calda, è solubile nell'alcool, nell'etere e nella benzina; tutti e due danno la colorazione rosso-violetta col dicromato potassico in soluzione acida, e se la soluzione è molto diluita danno una colorazione azzurra. Anche pel derivato dal pirazolo si può riconoscere $^1/_{25000}$ di composto coll'anzidetta reazione.

L'identità dei due derivati pirazolinici è quindi stabilita, e le esperienze che seguono non fanno che confermarla.

Trimetilenfenildiamina $C^3 H^6 NH^2 NHC^6 H^5$ *dal fenilpirazolo.*

Le acque acide di acido ossalico risultanti dal lavaggio della soluzione eterea del fenilpirazolino contengono l'ossalato di una base, che si può facilmente isolare. Dapprima si svapora la maggior parte dell'acqua perchè dalla soluzione calda si depositi col raffreddamento l'ossalato cristallizzato in piccoli mammelloni, che viene ulteriormente depurato mediante bollitura con carbone animale e successive cristallizzazioni dall'acqua. Infine, asciugato fra carta e disseccato nel vuoto sull'acido solforico, dà all'analisi il seguente risultato:

gr. 0,116 sostanza Azoto $V_{13^\circ}^{770^{mm},5}$ cc. 11,2 $V_{0^\circ}^{76^{cm}}$ cc. 10,7

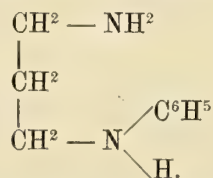
In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^9 H^{14} N^2 C^2 H^2 O^4$
N	11,58	11,66

Questo sale è adunque l'ossalato della base che deriva per addizione di 6 atomi di idrogeno al fenilpirazolo

$$C^9 H^7 N^2 + 6H = C^9 H^{14} N^2$$

la quale base non può essere altro che la trimetilenfenildiamina

```
CH² — NH²
|
CH²
|       /C⁶H⁵
CH² — N<
        \H.
```

L'ossalato di trimetilenfenildiamina cristallizza in piccoli mammelloni bianchi, poco solubile nell'acqua fredda, di più a caldo; riscaldato a 165°-170° imbrunisce e si decompone con sviluppo gassoso a 185°-190°.

La base messa in libertà mediante l'idrato potassico è un liquido incoloro appena preparata, ma diventa poco dopo gialliccia e col tempo anche fuori del contatto dell'aria s'imbruna; è insolubile nell'acqua, solubile nell'alcole e nell'etere; ha odore ammoniacale e rammenta quello dell'anilina; bolle senza decomposizione alla temperatura di 276°-278°, e non si solidifica a — 15°.

All'analisi diede i seguenti risultati:

I	gr. 0,170 sostanza	CO^2 gr. 0,4471		H^2O gr. 0,1481
II	gr. 0,3006	Azoto $V_{15^\circ}^{764,4}$ cc. 47		$V_{0^\circ}^{76}$ cc. 44,2
III	gr. 0,2026	» $V_{10^\circ}^{765}$ cc. 30,6		$V_{0^\circ}^{76}$ cc. 29,4

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C^9 H^{14} N^2$
C	71,70		72,00
H	9,64		9,33
N	18,47	18,22	18,66.

La trimetilenfenildiamina in soluzione acida non dà più la colorazione violacea col dicromato potassico. Riscaldata con soluzione alcoolica d' idrato potassico ed alcune goccie di cloroformio svolge l'odore nauseante degli isonitrili, reazione caratteristica delle basi primarie.

Cloridrato $C^9 H^{14} N^2 . 2HCl$.

Il cloridrato venne ottenuto per azione diretta di una corrente di acido cloridrico gassoso e secco, sopra la soluzione della base nell'etere puro: Si precipitano dei fiocchi bianchi cristallini solubilissimi nell'acqua, dalla quale cristallizzano in aghi raggruppati, pure solubili nell'alcool. Il cloridrato sottoposto all'azione del calore si decompone prima di fondere. All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,1051 sostanza disseccata nel vuoto dell'acido solforico richiesero cc. 9,5 di soluzione $\frac{N}{10}$ di argento.

gr. 0,1595 Azoto $V^{751}_{14^o}$ cc. 17,5 $V^{76}_{0^o}$ cc. 16,1.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^9 H^{16} N^2 Cl^2$
Cl	32,08	31,83
N	12,67	12,55.

La soluzione acquosa del cloridrato riduce a freddo i sali di platino e di oro, non riduce, nemmeno a caldo, il liquido cupro-potassico di Fehling.

Trimetilenfenildiamina dal Fenilpirazolino.

Per dimostrare sempre più l'identità dei due fenilpirazolini, ho anche studiato la base che deriva per idrogenazione completa del fenilpirazolino dall'acroleina.

Una parte di fenilpirazolino, si sciolse in 10 a 12 parti di alcole assoluto ed alla soluzione mantenuta in viva ebollizione si aggiunse poco alla volta 1 p. di sodio tagliato a piccoli pezzi: terminata l'aggiunta del sodio si diluì con acqua e si svaporò a bagno maria la maggior parte dell'alcool, indi il residuo si agitò diverse volte con etere, successivamente l'etere con soluzione diluita di acido ossalico ed infine colla concentrazione della soluzione acquosa si ottenne cristallizzato l'ossalato che mediante ricristallizzazione dall'acqua bollente si depurò completamente.

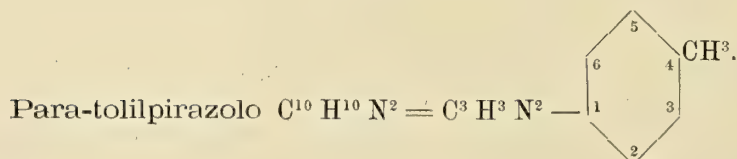
Esso cristallizza in piccoli mammelloni bianchi che imbruniscono a 165°-170° e si decompongono con sviluppo di gas a 185°-190°.

La base libera è un liquido incoloro che pure ingiallisce ed imbrunisce col tempo; è insolubile nell'acqua, non dà la reazione colorata col dicromato potassico in soluzione acida; la sua soluzione cloridrica riduce i sali d'oro e di platino a freddo, non riduce il liquido di Fehling: bolle senza decomporsi a 276°-277°.

All'analisi diede il seguente risultato:
gr. 0,1412 diedero gr. 0,3718 di CO^2 gr. 0,1231 H^2O
ossia in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^6H^{14}N^2$
C	71,81	72,00
H	9,63	9,33.

II.

Para-tolilpirazolo $C^{10}H^{10}N^2 = C^3H^3N^2 - C_6H_4 - CH^3$.

Riscaldando a ricadere un peso molecolare di epicloridina con due pesi molecolari di paratolilidrazina sciolta in egual peso di benzina secca si ha un deposito cristallino di cloridrato di paratolilidrazina. Si continua l'ebollizione per 6 a 7 ore, indi si distilla la benzina e si sovrascalda il residuo in bagno ad olio alla temperatura di 140°-150°. Succede una viva reazione e distilla dell'acqua. Il prodotto della reazione si ripiglia con acqua, si distilla in corrente di vapore e l'olio giallo d'oro, che passa col vapor d'acqua, si estrae con etere. La soluzione eterea si agita con acido cloridrico diluito e la sostanza cristallizzata che si ottiene colla distillazione dell'etere si ricristallizza dall'alcool o dall'etere di petrolio (frazione bollente 70°-90°). L'analisi dimostra che questa sostanza è il p-tolilpirazolo e la rendita è all'incirca il 65 % della quantità teorica.
gr. 0,3042 sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero gr. 0,8463 CO^2, gr. 0,175 H^2O.
gr. 0,1654 Azoto $V_{13°}^{758^{mm},5}$ cc. 24,5 $V_{0°}^{76}$ cc. 23,08
ossia in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10}H^{10}N^2$
C	75,87	75,94
H	6,39	6,32
N	17,52	17,72

Il p-tolilpirazolo cristallizza in belle lamine splendenti, untuose al tatto, di colore bianco con una leggera punta di giallo; fonde a + 32°,5-33° (temp. corretta) in un liquido giallo; bolle senza decomposizione alla pressione ridotta a 0° di mm. 756,9 alla temperatura di 258°-259° (termometro nel vapore). È solubile nell'alcool, nell'etere e nell'etere di petrolio; un po' solubile nell'acqua calda e col raffreddamento la soluzione diventa lattiginosa ed infine si separa il pirazolo cristallizzato in belle laminette micacee. Si scioglie nell'acido cloridrico fumante e coll'aggiunta di acqua precipita inalterato, il che dimostra la debole funzione basica del composto. La soluzione alcolica bollente trattata con un pezzettino di sodio ed acidificata con acido cloridrico dà col dicromato potassico un'intensa colorazione rosso-violacea.

La soluzione cloridrica dalla quale s'è separata la soluzione eterea del pirazolo contiene il cloridrato di p-toluidina, dal quale mediante l'idrato potassico si ha la p-toluidina cristallizzata in belle lamine fusibili a $+45°$. All'analisi diede:

In 100 parti

	trovato	calcolato
N	12,96	13,08.

Come residuo della distillazione in corrente di vapore rimane una resina rosso bruna e dalla soluzione acquosa coll'evaporazione dell'acqua si ha del cloruro ammonico.

Cloroplatinato $(C^3 H^3 N^2 C^7 H^7 HCl)^2 PtCl^4 . 2H^2 O$.

Se si aggiunge alla soluzione del p-tolilpirazolo nell'acido cloridrico fumante, una soluzione di cloruro platinico si ha un precipitato cristallino che si fa ricristallizzare dall'acqua bollente. Si ottiene così in begli aghi prismatici di colore giallo-rosso, poco solubile a freddo, molto a caldo. All'analisi [1] diede il seguente risultato:

I gr. 0,282 di sale asciugato all'aria perdettero a 100°-110° gr. 0,0136 di $H^2 O$ e lasciarono alla calcinazione gr. 0,0716 di platino.

II gr. 0,2223 H^2O perduto a 100°-110° gr. 0,0116

III gr. 0,2265 " " 0,011.

In 100 parti

	calcolato per $2H^2 O$	trovato I	trovato II	trovato III
$H^2 O$	4,72	4,82	5,21	4,86
Pt sale anidro	26,79	26,67		

Il cloroplatinato anidro fonde decomponendosi alla temperatura di 183°-184°.

Ioduro di etil-p-tolilpirazolammonio $C^3 H^3 N^2 C^7 H^7 . C^2 H^5 . I$.

Quantità equimolecolari di p-tolilpirazolo e di ioduro d'etile si fanno digerire in tubo chiuso per 6 ore alla temperatura di 100-110°; la massa cristallizzata che si ottiene si tratta con acqua alla temperatura ordinaria e la soluzione acquosa si agita con etere per decolorarla. In seguito si concentra a bagno maria e si lascia in riposo nel vuoto sull'acido solforico. Dopo due o tre giorni il liquido sciropposo si rappiglia in una massa di cristalli prismatici bianchi, duri, solubilissimi nell'acqua insolubili nell'etere che fondono a 104°-105°.

All'analisi si ebbe il seguente risultato:

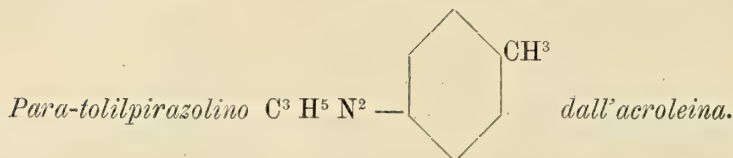
gr. 0,2638 sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico.

Azoto $V_{12°}^{760^{mm},2}$ cc. 19,8 $\quad V_{0°}^{76^{cm}}$ cc. 18,6

[1] Ordinariamente il cloroplatinato del p-tolilpirazolo si depone cristallizzato con 2 mol. di acqua, ma in condizioni speciali dipendenti forse dalla temperatura e dall'acidità della soluzione può deporsi con un numero maggiore di molecole di acqua. Si può infatti avere un idrato con $5H^2 O$ ed un altro con $3H^2 O$. Se si riscaldano questi due idrati a 100°-110° insieme all'acqua si elimina anche l'acido cloridrico e si ha il composto $(C^2 H^3 N^3 C^7 H^7)^2 PtCl^4$. sotto forma di una polvere cristallina giallo-chiaro insolubile nell'acqua e nell'acido cloridrico anche a caldo. Il comportamento di questi idrati è analogo a quello, studiato da Anderson, della chinolina e picolina. Ritornerò sullo studio di questi composti quando avrò nel laboratorio qualche assistente o studente capace di aiutarmi.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{12}H^{15}N^{2}I$
N	8,85	8,80.

Para-tolilpirazolino $C^3H^5N^2$ — [anello benzenico con CH^3] *dall'acroleina.*

Ho preparato questo composto versando una soluzione di 20 gr. di acroleina pura in 50 gr. di etere, in una soluzione raffreddata di 45 gr. di p-tolilidrazina in 500 gr. d'etere ed abbandonando in seguito la miscela alla temperatura ordinaria per 24 ore. Si separa acqua e si deposita una piccola quantità di sostanza fioccosa colorata in giallo-rosso. La soluzione eterea filtrata lascia colla distillazione dello sciogliente un residuo sciropposo, al quale s'aggiunge un 350 a 400 gr. di una soluzione al 2 per cento di acido solforico e si sottopone alla distillazione in corrente di vapore. Col vapor d'acqua passa il p-tolilpirazolino che rende dapprima lattiginosa l'acqua ed infine col raffreddamento si depone cristallizzato in belle lamine madreperlacee bianche. Non è necessario ricristallizzarlo perchè è puro come lo dimostra l'analisi seguente.

gr. 0,1698 di sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero gr. 0,4661 di CO^2 e gr. 0,1163 di H^2O.

ossia in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10}H^{12}N^{2}$
C	74,85	75,00
H	7,59	7,50.

La rendita è incirca la metà dell'acroleina impiegata.

Il p-tolilpirazolino cristallizza in belle lamine, solubile nell'alcool, nell'etere, nell'etere di petrolio, un po' solubile nell'acqua calda. La soluzione acquosa acidulata con acido solforico e trattata con una goccia di dicromato potassico dà un'elegante colorazione rosso-viola. Si scioglie nell'acido cloridrico fumante e l'aggiunta d'acqua lo precipita inalterato. Fonde alla temperatura corretta di $+60°,5$ e bolle indecomposto alla pressione ridotta a 0° di mm. 757,9 alla temperatura di $+281°$-282° (termometro immerso nel vapore).

Para-tolilpirazolino del para-tolilpirazolo.

L'idrogenazione del p-tolilpirazolo si fa nello stesso modo e nelle stesse condizioni di quella del fenilpirazolo. Si scioglie in 10 a 12 p. di alcole assoluto 1 p. di p-tolilpirazolo ed alla soluzione bollente si aggiunge poco alla volta $^1/_2$ p. di sodio. Evaporato l'alcool a bagno maria, previa aggiunta d'acqua, si agita il residuo acquoso con etere e in seguito si lava l'etere con una soluzione diluitissima di acido ossalico. Già nell'imbuto dove si fa questo trattamento si precipita l'ossalato della base trimetilenica che si forma nell'idrogenazione e che studieremo in seguito. La porzione eterea separata dall'acqua acida e filtrata viene disseccata con potassa fusa e distillato l'etere, il residuo cristallino che rimane, viene sottoposto alla distillazione,

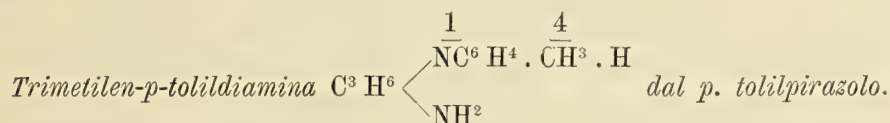
raccogliendo a parte la porzione sotto 275°. Quando il termometro segna questa temperatura si sospende il riscaldamento ed il residuo rimasto nella stortina si cristallizza molte volte dall'alcole a 80° (alcolometro). Si arriva mediante ripetute cristallizzazioni ad ottenere il p-tolilpirazolino puro.

All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,1575 sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico diedero gr. 0,432 di CO^2 gr. 0,108 di H^2O,

	trovato	calcolato per $C^{10}H^{12}N^2$
C	74,79	75,00
H	7,61	7,50.

Il p-tolilpirazolino dal pirazolo è identico a quello preparato col metodo di E. Fischer coll'acroleina. Difatti cristallizza in belle lamine micacee, solubile nell'alcool, nell'etere, nell'etere di petrolio ed anche un po' nell'acqua calda; la soluzione acquosa acidulata con acido solforico dà col dicromato potassico la stessa colorazione rosso-viola. Fonde alla temperatura corretta di + 60°-61° e bolle indecomposto alla pressione ridotta a 0° di mm. 757,6 alla temperatura di 280°-282° (termometro nel vapore).

Trimetilen-p-tolildiamina $C^3H^6 \langle {}^{\overset{1}{N}C^6H^4.\overset{4}{C}H^3.H}_{NH^2}$ *dal p. tolilpirazolo.*

La soluzione acquosa, separata dalla soluzione eterea del pirazolino, evaporata convenientemente lascia depositare col raffreddamento l'ossalato di trimetilen-p-tolildiamina cristallizzato in piccoli mammelloni duri, formati da piccoli aghetti raggruppati a sfera; invece se si tratta la soluzione acquosa concentrata con alcole, si ottiene cristallizzato in minutissime laminette splendenti. Riscaldato lentamente il composto comincia ad imbrunirsi a 201° e fonde decomponendosi con sviluppo gassoso a 207°-208°.

All'analisi diede il seguente risulato:

gr. 0,221 sostanza disseccata nel vuoto sull'acido solforico

Azoto $V^{765^{mm}}_{17^\circ}$ cc. 20,4 $\qquad V^{76^{cm}}_{0^\circ}$ cc. 18,9

ossia in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10}H^{16}N^2C^2H^2O^4$
N	10,74	11,02.

La base libera è un liquido giallognolo che raffreddata a —15° si rappiglia in una massa cristallina, bolle senza decomposizione a 286°-287° (termometro nel vapore). È solubile nell'alcole, nell'etere, negli acidi diluiti, insolubile nell'acqua; la soluzione nell'acido solforico diluito dà col dicromato potassico una colorazione rosso bruno. Riscaldata con alcune goccie di cloroformio e soluzione alcoolica di idrato potassico, svolge l'odore degli isocianuri, caratteristica delle basi primarie.

All'analisi diede il seguente risultato.

gr. 0,235 sostanza $\qquad CO^2$ gr. 0,6288 $\qquad H^2O$ gr. 0,2092.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10} H^{16} N^2$
C	72,98	73,17
H	9,87	9,75

Il cloridrato di trimetilen-p-tolildiamina venne ottenuto saturando con acido cloridrico gassoso la soluzione eterea della base. In queste condizioni si ottiene sotto forma di fiocchi bianchi cristallini che non fondono ancora a 240°; riscaldato su lamina di platino si volatilizza decomponendosi in parte. È solubilissimo nell'acqua, un po' solubile nell'alcool concentrato e caldo, e l'etere lo precipita dalla soluzione alcoolica in polvere microcristallina. La soluzione acquosa riduce a freddo i sali d'oro, lentamente il cloruro platinico, a freddo, immediatamente a caldo; non riduce il liquido di Fehling.

Trimetilen-p-tolildiamina dal p-tolilpirazolino dell'Acroleina.

L'idrogenazione del p-tolilpirazolino si fece nelle stesso modo di quella del fenilpirazolino. L'ossalato ottenuto in seguito alle diverse manipolazioni (che per brevità tralascio di descrivere) cristallizza in piccoli mammelloni se dalla soluzione acquosa; precipitato invece con alcole si ha in piccole squamette lucenti. È pochissimo solubile nell'alcool, molto nell'acqua e riscaldato incomincia ad imbrunire a 201°, e fonde decomponendosi completamente con sviluppo di gas a 207°-208°.

All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,1511 sostanza seccata nel vuoto dell'acido solforico.

$$\text{Azoto } V_{17^\circ}^{mm 764,5} \text{ cc. } 14,2 \qquad V_{0^\circ}^{76^{cm}} \text{ cc. } 13,2.$$

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10} H^{16} N^2 C^2 H^2 O^6$
N	10,98	11,02

La base libera è un liquido oleoso giallognolo, che raffreddata a —15° si rappiglia in massa cristallina, bolle senza decomporsi a 285°-287° (termometro nel vapore). E solubile nell'alcool, nell'etere, negli acidi diluiti, insolubile nell'acqua. La soluzione in acido solforico diluito dà col dicromato potassico una colorazione bruna. Riscaldata con cloroformio e potassa alcoolica svolge l'odore caratteristico delle carbilamine.

Cloridrato $C^{10} H^{16} N^2$ 2HCl.

Ho analizzato il cloridrato, ottenuto col sciogliere la base nell'acido cloridrico, evaporato a secco a bagno maria, e ripreso il residuo leggermente colorato in bruno con alcole assoluto freddo. Rimane indisciolto e bianco il cloridrato che presenta tutti i caratteri di quello ottenuto dalla base preparata coll'idrogenazione del pirazolo.

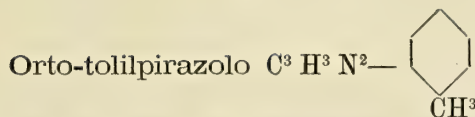
All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,2525 sale seccato nel vuoto sull'acido solforico, richiesero cc. 21,45 soluz. $\frac{N}{10}$ di argento.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10} H^{16} N^2$ 2HCl
Cl	30,15	29,95

III.

Orto-tolilpirazolo $C^3 H^3 N^2$—

Mescolando un peso molecolare di epicloridrina con due pesi molecolari di o-tolilidrazina ed aggiungendo benzina in egual peso dell' idrazina adoperata, si ha, soltanto a caldo, una completa soluzione. Prolungando l'ebollizione della miscela per 4 a 5 ore in matraccio al quale sia unito un refrigerante a ricadere, si ha depositata una piccola quantità di cloridrato di o-tolilidrazina. Si distilla la benzina e si sovrascalda il residuo a bagno d'olio a 140°-150°. Avviene la solita reazione, però meno viva che nei casi precedenti e si separa dell'acqua. Il prodotto diluito con acqua si distilla in corrente di vapore; col vapore distilla un liquido giallo chiaro, che viene estratto con etere e la soluzione eterea agitata con acido cloridrico diluito. La soluzione cloridrica contiene il cloridrato di o-toluidina. dal quale si ha la base libera, bollente a 197°-198° e che contiene 13,10 di Azoto invece di 13,08 quantità teorica.

Come residuo della distillazione a vapore rimane una resina bruna, e dell'acqua che tiene in soluzione grandi quantità di cloruro ammonico, che si può facilmente avere puro per cristallizzazioni successive.

La soluzione eterea, separato l'etere colla distillazione, lascia un residuo liquido che riscaldato bolle quasi tutto alla temperatura di 240°-242° (non corretta). La rendita è il 60 % della quantità teorica. L'analisi di questo liquido dimostra che non è altro se non l'ortotolilpirazolo.

Difatti gr. 0,1764 sostanza, diedero gr. 0,4893 CO^2 e gr. 0,1042 H^2O.
ossia in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10} H^{10} N^2$
C	75,64	75,94
H	6,55	6,32

L'o-tolilpirazolo è un liquido leggermente giallo, insolubile nell'acqua solubile nell'alcool e nell'etere; pure solubile nell'acido cloridrico fumante, ma l'aggiunta di acqua lo precipita inalterato. Raffreddato a —10° si conserva liquido, bolle indecomposto alla temperatura corretta di 246°,5 essendo la pressione ridotta a 0° di mm. 754,1. La sua densità allo stato liquido è espressa dai seguenti numeri:

a 0°	riferita	all'acqua a	0°	1,0868
+ 13°	"	"	0°	1,0746
+ 13°	"	"	+ 13°	1,0753
+ 100°,3	"	"	0°	0,9984.

Cloroplatinato $(C^3 H^3 N^2 C^7 H^7 HCl)^2 Pt Cl^4$

Si ottiene sotto forma di bei prismetti di colore giallo-rosso, poco solubile nell'acqua fredda; non contiene acqua di cristallizzazione; fonde decomponendosi alla temperatura di 200°-201°. All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,1663 di sale asciugato fra carta, non perdettero di peso a 120° e calcinati lasciarono gr. 0,0446 di Platino.

Da questi dati si calcola in 100 parti:

	trovato	calcolato
Pt	26,81	26,79

Joduro di etil-o-tolilpirazolammonio $C^3 H^3 N^2 C^7 H^7 C^2 H^5 I$.

Cristallizza da una soluzione acquosa sciropposa in aghi prismatici bianchi, solubilissimo nell'acqua, insolubile nell'etere. Fonde a 98°-100°.

All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,2582 sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico.

Azoto $V_{13^o}^{753^{mm}}$ cc. 19,8 $V_{0^o}^{76^{cm}}$ cc.18,4.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{12} H^{15} N^2 I$
N	8,95	8,80

Idrogenazione dell' O-tolilpirazolo.

Se si tratta la soluzione alcoolica bollente dell'o-tolilpirazolo con sodio, indi si acidifica con acido solforico e si aggiunge una goccia di soluzione di dicromato potassico non si ha alcuna colorazione. Questa reazione caratteristica di tutti i derivati pirazolici, finora conosciuti non avviene nemmeno se l'idrogenazione è fatta a freddo coll'amalgama di sodio in mezzo lievemente acidificato con acido acetico.

Siccome le diamine, ultimi prodotti di idrogenazione dei due pirazoli studiati, non danno colorazioni caratteristiche cogli ossidanti, la mancanza in questo caso di una colorazione indicante il derivato pirazolinico potrebbe darsi all'idrogenazione più profonda della molecola, perciò ho creduto necessario di ripetere anche per questo pirazolo lo stesso processo di idrogenazione seguito per gli altri.

La parte acquosa proveniente dal trattamento col sodio della soluzione alcoolica dell'o-tolilpirazolo venne estratta con etere, e l'etere agitato con soluzione diluita di acido ossalico.

La soluzione ossalica concentrata non diede altro che un po' d'acido ossalico cristallizzato. La soluzione eterea, dopo agitazione con soluzione diluita di idrato potassico e disseccamento con potassa fusa, lascia alla distillazione un residuo liquido bollente a 246° (termometro nel vapore) che presenta tutti i caratteri dell'o-tolilpirazolo. Inoltre una determinazione di azoto diede il seguente risultato:

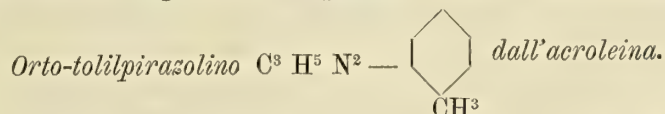
gr. 0,1075 sostanza Azoto $V_{17^o}^{755^{mm}}$ cc. 16,5 $V_{0^o}^{76^{cm}}$ cc. 15,3.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C^3H^3N^2C^7H^7$
N	17,87	17,72

In tal modo rimane dimostrato che nelle condizioni che gli altri pirazoli danno il derivato pirazolinico e la diamina trimetilenica sostituita, l'o-totilpirazolo rimane inalterato. Puo darsi che questa inalterabilità dipenda solo dalle condizioni di temperatura dell'idrogenazione, ma può anche darsi che sia esclusivamente dipendente dalla posizione orto del gruppo metile nel nucleo aromatico, e propendo tanto più per quest'ultima ipotesi, che esperienze ulteriori chiariranno, perchè, tanto l'o-tolilpirazolo

come il derivato pirazolinico, che descriverò in seguito, presentano un complesso di proprietà che li distacca dagli altri due pirazoli e loro derivati pirazolinici.

Orto-tolilpirazolino $C^3 H^5 N^2 - C^6H^4 \cdot CH^3$ *dall'acroleina.*

Per la preparazione di questo composto ho adoperato 40 gr. di acroleina pura sciolta in 100 gr. di etere e 90 gr. di o-tolilidrazina sciolti in 600 gr. di etere. Ho ottenuto all' incirca 20 grammi di un olio giallognolo che distillato passò tutto alla temperatura di 270°-272° (termometro nel vapore).

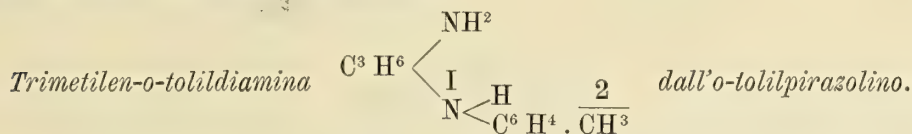
All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,1829 sostanza CO^2 gr. 0,5012 $H^2 O$ gr. 0,1232.

ossia in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10} H^{12} N^2$
C	74,68	75,00
H	7,47	7,50.

L'o-tolilpirazolino è un liquido incoloro, appena distillato, che prende subito una leggera punta di giallo; è pochissimo solubile nell'acqua, solubile nell'alcool e nell'etere. La soluzione acquosa acidulata con $H^2 SO^4$ dà col dicromato potassico una colorazione azzurro indaco; la soluzione acquoso-alcolica una colorazione violacea. Raffreddato a — 15° si conserva liquido; bolle alla temperatura corretta di 271° alla pressione ridotta a 0° di mm. 759,5 senza subire decomposizione. La densità allo stato liquido a 0° riferita all'acqua pure a 0° è eguale a 1,084, si scioglie nell'acido cloridrico fumante e l'acqua lo riprecipita.

Trimetilen-o-tolildiamina $C^3 H^6 \left< \begin{matrix} NH^2 \\ N \left< \begin{matrix} H \\ C^6 H^4 \cdot \overset{2}{CH^3} \end{matrix} \right. \end{matrix} \right.$ *dall'o-tolilpirazolino.*

L'o-tolilpirazolino sciolto in alcole assoluto venne trattato con sodio nello stesso modo tenuto per l'idrogenazione degli altri pirazolini.

L'ossalato della base cristallizza dalla soluzione acquosa in fini aghi bianchi riuniti a sfera, in modo da formare piccoli mammelloni: è solubile nell'acqua a freddo, insolubile nell'alcole. Riscaldato incomincia ad annerirsi a + 175°, e fonde decomponendosi completamente con sviluppo gassoso a 194°-196°.

All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,108 sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico.

Azoto $V_{17^0}^{764^{mm}}$ cc. 10,5 $\qquad V_{0^0}^{76^{cm}}$ cc. 9,7.

Da questi dati si calcola in 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10} H^{16} N^2 . C^2 H^4 O^4$
N	11,27	11,02

La trimetilen-o-tolildiamina, ottenuta per decomposizione dell'ossalato con idrato potassico è un liquido giallognolo insolubile nell'acqua, solubile nell'alcool, e nell'etere; non si solidifica se vien raffreddata a — 15°. È solubile negli acidi diluiti, e la soluzione solforica aggiunta di alcune gocce di dicromato potassico prende una

colorazione bruna. Bolle alla temperatura di 280°-282° ed all'analisi ha dato il seguente risultato:

gr. 0,1815 sostanza gr. 0,4876 CO^2 gr. 0,1615 H^2O.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C^{10} H^{16} N^2$
C	73,32	73,17
H	9,86	9,75.

Bollendo la base con un po' di soluzione alcoolica di idrato potassico ed alcune goccie di cloroformio, si svolge l'odore caratteristico delle carbilamine.

Cloridràto $C^{10} H^{16} N^2 2HCl$.

Ottenuto sciogliendo la base nell' acido cloridrico acquoso e di media concentrazione. Evaporato il liquido a secchezza e ripreso il residuo con alcole, assoluto, rimane indisciolto per la massima parte il cloridrato bianchissimo.

Dall'acqua cristallizza in begli aghi fini solubilissimi, è pure un po' solubile nell'alcool e l'etere lo precipita. La soluzione acquosa riduce i sali di platino lentamente a freddo rapidamente a caldo. Riscaldato lentamente in tubicino di vetro sottile comincia a rammollirsi a 219°, e fonde decomponendosi a 224°.

All'analisi diede il seguente risultato:

gr. 0,1184 sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico richiesero cc. 10 di soluzione $\frac{N}{10}$ di argento.

ossia in 100 parti:

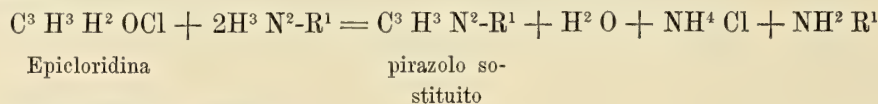
	trovato	calcolato
Cl	29,98	29,95

IV.

Conclusione.

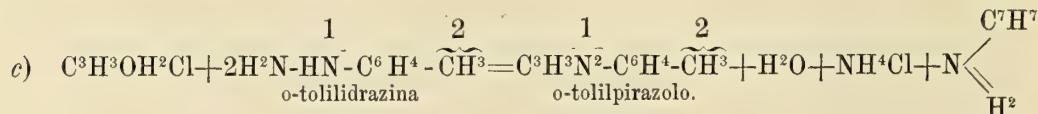
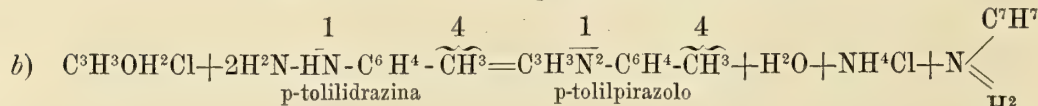
Dalle esperienze descritte posso venire a parecchie conclusioni.

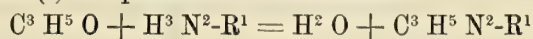
1. L'epicloridrina reagendo colle idrazine aromatiche primarie dà luogo ad un pirazolo monosostituito. Questa reazione posso rappresentarla colla seguente equazione generale:

$$\underset{\text{Epicloridina}}{C^3 H^3 H^2 OCl} + 2H^3 N^2\text{-}R^1 = \underset{\text{pirazolo sostituito}}{C^3 H^3 N^2\text{-}R^1} + H^2 O + NH^4 Cl + NH^2 R^1$$

Casi particolari studiati:

a) $C^3 H^3 OH^2 Cl + 2H^3 N^2\text{-}C^6 H^5 = \underset{\text{Fenilpirazolo}}{C^3 H^3 N^2\text{-}C^6 H^5} + H^2 O + NH^4 Cl + NH^2 C^6 H^5$

b) $C^3H^3OH^2Cl + \underset{\text{p-tolilidrazina}}{2H^2N\text{-}\overset{1}{HN}\text{-}C^6 H^4\text{-}\overset{4}{CH^3}} = \underset{\text{p-tolilpirazolo}}{C^3H^3\overset{1}{N^2}\text{-}C^6H^4\text{-}\overset{4}{CH^3}} + H^2O + NH^4Cl + N\begin{cases} C^7H^7 \\ H^2 \end{cases}$

c) $C^3H^3OH^2Cl + \underset{\text{o-tolilidrazina}}{2H^2N\text{-}\overset{1}{HN}\text{-}C^6 H^4\text{-}\overset{2}{CH^3}} = \underset{\text{o-tolilpirazolo.}}{C^3H^3\overset{1}{N^2}\text{-}C^6H^4\text{-}\overset{2}{CH^3}} + H^2O + NH^4Cl + N\begin{cases} C^7H^7 \\ H^2 \end{cases}$

2. L'acroleina invece reagendo colle idrazine aromatiche primarie genera, come ha trovato E. Fischer (1) un pirazolino monosostituito.

$$C^3 H^5 O + H^3 N^2\text{-}R^1 = H^2 O + C^3 H^5 N^2\text{-}R^1$$

Ho generalizzato questa reazione studiandola nel caso dell'orto e para-tolilidrazine.

3. L'idrogenazione limitata dei pirazoli col sodio ed alcole dà il derivato pirazolinico, il quale è identico a quello che si ottiene dall'acroleina.

Dei tre pirazoli studiati solo l'o-tolilpirazolo non da questa reazione, ma, come ho già detto più sopra, questo dipende con molta probabilità dalla posizione orto del gruppo metile, la quale ha un' influenza sulle proprietà di questo composto.

Riassumo nel seguente quadro le proprietà dei tre pirazoli e dei loro derivati perchè il lettore possa giudicare delle analogie e delle differenze.

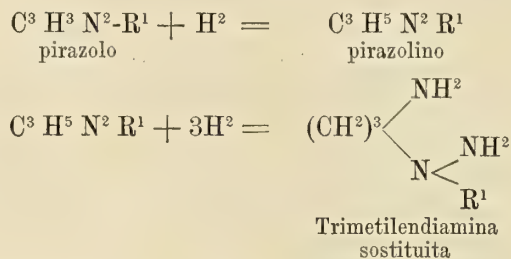
Pirazoli			
	Fenilpirazolo	*p-tolilpirazolo*	*o-tililpirazolo*
Formola	$C^3 H^3 N^2\text{-}C^6 H^5$	$C^3 H^3 N^2$— (anello benzenico con CH^3 in para)	$C^3 H^3 N^2$— (anello benzenico con CH^2 in orto)
Stato fisico alla temperatura ordinaria	liquido giallo	solido bianco	liquido leg. giallo
Punto di fusione . .	+ 11°-11°,5	+ 32°,5-33°	liquido a —10°
Punto di ebollizione	+ 246°,5	+ 258°-259°	+ 246°,5
Densità liquido . . .	1,1138	——	1,0868
Cloroplatinato	Acq. di cristal. 2 mol.	2 mol.	Anidro
Iodoetilato	punto fus. 116°-117°	104°-105°	98°-100°
Pirazolini			
Formola	$C^3 H^5 N^2 C^6 H^5$	$C^3 H^5 \overset{1}{N}NC^6 H^4 . \overset{4}{CH^3}$	$C^3 H^5 \overset{1}{N}NC^6 H^4 . \overset{2}{CH^3}$
Stato fisico	solido	solido	liquido
Punto di fusione . .	+ 51°5-52°	+ 60° 5	liquido a — 15°
Punto di ebollizione	+ 273°,5-274°	+ 281°-282°	+ 271°
Diamine			
Formola	$C^3 H^6 \langle^{NH^2}_{NH . C^6 H^5}$	$C^3 H^6 \langle^{NH^2}_{\overset{1}{N}HC^6 H^4 . \overset{4}{CH^3}}$	$C^3 H^6 \langle^{NH^2}_{\overset{1}{N}H C^6 H^4 . \overset{2}{CH^3}}$
Punto di fusione . .	al disotto di — 15°	superiore a — 15°	al disotto di — 15°
Punto di ebollizione	276°-278°	286°-287°	280°-282°

(1) Liebig's, Annalen, t. CCXXXIX, p. 195.

4. L'idrogenazione completa dei pirazoli e dei pirazolini genera le trimetilendiamine sostituite.

$$\underset{\text{pirazolo}}{C^3H^3N^2\text{-}R^1} + H^2 = \underset{\text{pirazolino}}{C^3H^5N^2R^1}$$

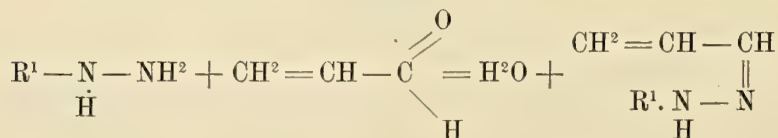
$$C^3H^5N^2R^1 + 3H^2 = (CH^2)^3 \left\langle \begin{array}{l} NH^2 \\ N \left\langle \begin{array}{l} NH^2 \\ R^1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Trimetilendiamina sostituita

5. Finalmente posso ora discutere la quistione proposta nella mia Nota preliminare cioè, se il nucleo pirazolo dei miei derivati sia isomero od identico col pirazolo di Knorr.

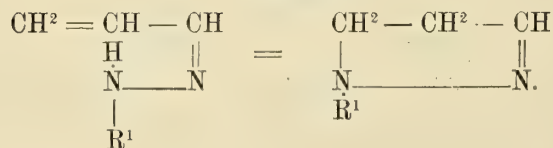
L'eguaglianza delle due coppie di pirazolini, quelli derivanti dall'acroleina e quelli derivanti dai pirazoli, mi dimostrano che il nucleo pirazolico è lo stesso nelle due serie di composti e quest' identità viene riconfermata dall'eguaglianza delle trimetilendiamine sostituite, che si ottengono per idrogenazione completa tanto dei pirazolini quanto dei pirazoli.

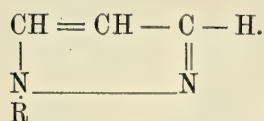
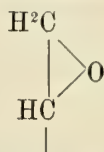
Intorno alla costituzione intima del pirazolo, quantunque nello stato attuale delle nostre cognizioni non si possa assolutamente dimostrare quella suggerita dal Knorr, pure la formazione dei pirazolini dall'acroleina, gli fanno acquistare un grande grado di probabilità, anche se siamo costretti in questo caso ad ammettere una trasposizione molecolare. Difatti le reazioni coll'acroleina avvengono in due fasi già ammesse dal prof. E. Fischer (Liebig's, Annalen tom. CCXXXIX, p, 195) e che io ho avuto occasione di seguire passo a passo nella formazione dei pirazolini studiati.

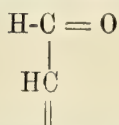
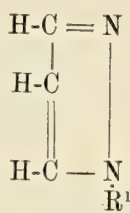
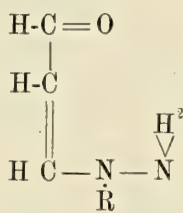
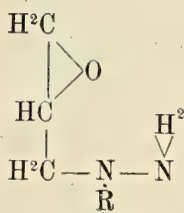
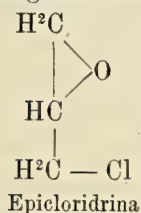
I^a fase.

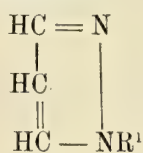
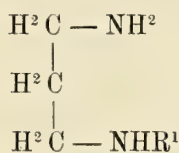
$$\underset{\dot{H}}{R^1-N}-NH^2 + CH^2=CH-C\begin{array}{l} \diagup\!\!\diagup O \\ \diagdown H \end{array} = H^2O + \begin{array}{l} CH^2=CH-CH \\ \qquad\qquad\quad \| \\ R^1.\underset{H}{N}-N \end{array}$$

Questa reazione avviene alla temperatura ordinaria ed il composto idrazinico dell'aldeide acrilica che si forma, non si altera quando si distilla l'etere che lo tiene in soluzione. Allorquando si acidula con acido solforico diluito e si riscalda in corrente di vapore succede la trasformazione molecolare che dà origine al derivato pirazolinico, trasformazione che si riconosce facilmente dalla colorazione col dicromato potassico. Nel caso speciale dell'o-tolilidrazina la trasformazione succede solo dopo un certo tempo di riscaldamento.

II^a fase.

$$\begin{array}{l} CH^2=CH-CH \\ \quad\;\; \dot{H} \quad\;\; \| \\ \quad\;\; N\text{———}N \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; R^1 \end{array} = \begin{array}{l} CH^2-CH^2-CH \\ | \qquad\qquad\quad \| \\ N\text{—————}N. \\ R^1 \end{array}$$

e quindi il pirazolo

```
CH ═ CH — C — H.
|         ||
N ________ N
R
```

Dall'altra parte la epicloridrina in talune reazioni dà dell'acroleina (¹) cioè il gruppo.

si trasforma in gruppo aldeidico di aldeide non satura

```
H-C ═ O
  |
 HC
  ||
```

perdendo due atomi di idrogeno, epperciò la trasformazione in pirazolo può seguire le seguenti fasi.

Epicloridrina — I° composto — composto disidrogenato, e trasformazione in aldeide — Pirazolo sostituito.

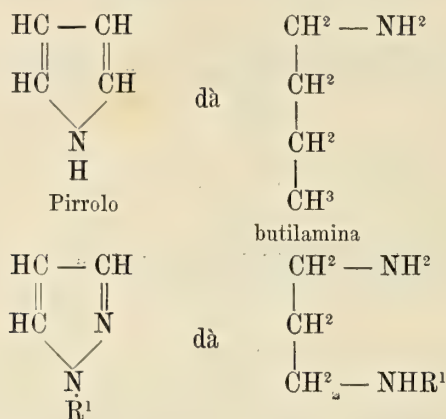
Ammessa questa formola pel pirazolo, come più probabile e come quella che serve a spiegare le reazioni sinora conosciute di questa classe di composti, ne viene di conseguenza che i prodotti finali di idrogenazione, essendo ammoniache primarie perchè danno la reazione delle carbilamine col cloroformio ed idrato potassico, ed inoltre dei cloridrati stabili con 2 mol. di acido cloridrico, non sono altro che trimetilendiamine mono-sostituite.

Della trimetilendiamina, che venne ottenuta la prima volta da E. Fischer e H. Koch (²) non erano finora conosciuti derivati di sostituzione dell' idrogeno del gruppo amidico con radicali. Il metodo ora descritto permette di riempire questa lacuna, e riesce tanto più opportuno ora che s' è dimostrato che la cadaverina non è altro che una diamina poli-metilenica (³) e che questa classe di corpi va perciò acquistando un grandissimo interesse.

(¹) A. Claus e G. Stein Berl. berich. t. XX, p. 858. — Carstanjan. Berl. berich. t. V, p. 810.

(²) Berl. berich. t. XVII, 1799. Vedi anche E. Lellmann e E. Würthner (Berl. berich. Ref. t. XVIII, p. 325).

(³) Ladenburg. (Berl. berich. t. XIX, p. 2585. t. XX, p. 2216).

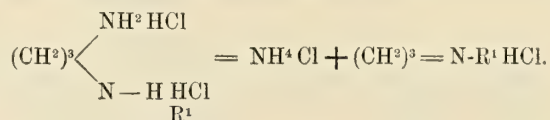
La formazione della trimetilendiamina sostituita rannoda sempre più il pirazolo al pirrolo, perchè anche quest'ultimo come Ciamician e Magnaghi [1] hanno dimostrato, da butilamina normale.

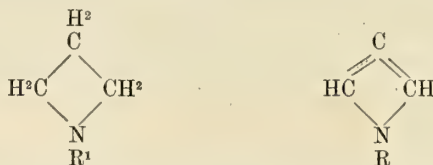
```
HC — CH            CH² — NH²
||   ||            |
HC   CH     dà     CH²
  \ /              |
   N               CH²
   H               |
 Pirrolo           CH³
               butilamina

HC — CH            CH² — NH²
||   ||            |
HC   N      dà     CH²
  \ /              |
   N               CH² — NHR¹
   R¹
```

Prima di terminare debbo esprimere la mia riconoscenza a S. E. il Ministro Boselli, che nell'accordare un'assegno straordinario al laboratorio di chimica generale di questa Università mi ha messo in grado di poter acquistare alcuni prodotti che servirono già per le presenti ricerche ed altri che serviranno per le future esperienze che farò estendendo la reazione alle idrazione della naftalina e a quelle della serie grassa.

Nello stesso tempo, intendo con questa prima Memoria riservarmi il campo di studio sui pirazoli monosostituiti, su quelli polisostituiti che potrò ottenere dai loro derivati bromurati e sulle diamine [2] che risulteranno dalle due serie di composti, ed insisto tanto più su questo punto, perchè la mancanza assoluta di collaboratori mi obbliga a progredire lentamente nel lavoro.

[1] Gaz. cheim. Ital. XV, p. 487.

[2] Spero fra poco di poter riferire sulle esperienze che ho intrapreso col cloridrato di trimetilenlenildiamina. Pare che questo sale per azione del calore elimini cloruro ammonico e dia la base iminica (Ladenburg), cioè abbia luogo la reazione seguente.

$$(CH^2)^3 \left\langle \begin{array}{l} NH^2\,HCl \\ N - H\,HCl \\ \;\;\;\;\;R^1 \end{array} \right. = NH^4\,Cl + (CH^2)^3 = N\text{-}R^1\,HCl.$$

e questa base iminica sostituita non sarebbe altro che il prodotto di idrogenazione di un omologo inferiore del pirrolo.

```
     H²
     C                  C
    / \                // \
 H²C   CH²           HC   CH
    \ /                \ /
     N                  N
     R¹                 R
```

starebbe cioè a questo composto negli stessi rapporti che sta la pirrolidina al pirrolo.

RELAZIONE

letta dal Socio Todaro, relatore, a nome anche del Socio Golgi, nella seduta del 3 giugno 1888 sopra la Memoria del dott. G. Mingazzini, intitolata: *Sulla fine anatomia della Substantia nigra Sömmeringii.*

« In questa breve Memoria l'autore sostiene con prove di fatto che oltre a qualche rara cellula atipica o fusiforme sparsa nella parte inferiore, si trovano in tutta la *Sostanza nera del Sömmering* del cervello umano, cellule nervose piramidali molto abbondanti e disposte in modo molto simile a quelle della corteccia cerebrale. Queste cellule piramidali si presentano coll'apice verso la *Cuffia* e la base verso il piede del peduncolo; e mandano numerosi prolungamenti protoplasmatici che si dirigono verso la Cuffia, ed un prolungamento nervoso che partendosi dalla base si dirige verso il piede, ove, secondo l'autore, si continua come cilindro dell'asse di una fibra nervosa decorrente in questa ultima regione. Con ciò l'autore viene a confermare l'opinione del Forel, ed a contraddire quella del Meynert, secondo il quale i prolungamenti nervosi delle cellule della *Substantia nigra*, portandosi nella parte mediale, verrebbero a costituire il fascio da Meynert denominato *Fascio dal piede alla Cuffia.*

« La ricerca del dott. Mingazzini è stata fatta col metodo del Golgi e la Memoria è illustrata da tre figure. La Commissione non esita a proporre all'Accademia, che il lavoro del Mingazzini venga inserito nei suoi Atti ».

Sulla fine struttura della *Substantia nigra Sömmeringii.*

Memoria del dott. GIOVANNI MINGAZZINI.

(Con una tavola).

Tecnica usata nella ricerca. — I progressi fatti in questi ultimi tempi, mediante il metodo della colorazione nera del Golgi, intorno alla conoscenza della fine struttura tanto della sostanza grigia di alcune circonvoluzioni, quanto di alcuni nuclei del Mantello e del Tronco cerebrale, mi hanno indotto a ricercare con questo medoto la costituzione microscopica della *Substantia nigra Sömmeringii.*

I pezzi del sistema nervoso a secondo le diverse provincie a cui appartengono richiedono, ha giustamente notato Golgi, un tempo più o meno lungo d'immersione nel bicromato, per raggiungere l'indurimento necessario, affinchè su essi possa esercitare la sua azione il nitrato di argento. Ora per i pezzi di *substantia nigra* posti ad una temperatura di 15°-20° occorrono, secondo la mia esperienza, non meno di 60 giorni d'immersione nel bicromato. Per ottenere la colorazione nera, mi sono servito a preferenza del nitrato di argento, introducendovi le modificazioni che udii in proposito dal dott. Martinotti [1] nella riunione dei medici tenuta a Pavia nel settembre 1887. Il Martinotti per evitare sopratutto gli abbondanti precipitati, che si formano alla superficie del pezzo immerso nel nitrato, avvolge il pezzo in carta bibula ben pestata e bagnata in acqua distillata, e quindi lo pone in una soluzione di nitrato di argento nella proporzione del 2-3 %. Egli inoltre aggiunge glicerina al 5 %, e mantiene il pezzo ad una temperatura costante di 25° (cellule nervose) o di 40° (cellule di neuroglia). Io ho ripetuto fedelmente questo metodo, il quale mi ha dato certo migliori risultati di quelli avuti in precedenza, quando cioè immergeva i pezzi in una soluzione semplice di 0,5-1 %, adoperando le cautele raccomandate in proposito dal Golgi. Debbo per altro confessare che, malgrado questi miglioramenti, siamo ancora lungi da potere ottenere con sicurezza dei preparati i quali presentino quella nitidezza che è il desideratum di quanti adoperano questo metodo: risultati migliori si ottengono sempre, lavando con insistenza in acqua distillata i pezzi, prima di trasportarli dal bicromato nella soluzione di nitrato.

Per ottenere un completo coloramento delle numerose cellule nervose che si trovano nella *substantia nigra* io fui obbligato a mantenere i pezzi nel nitrato per circa

[1] Martinotti, *Su alcuni miglioramenti della tecnica della reazione al nitrato di argento nei centri nervosi per ottenerla su pezzi di grandi dimensioni.* Estr. dagli Annali di Psichiatria e scienze affini del R. Manicomio di Torino. Vol. I.

40 giorni: per la colorazione delle cellule di nevroglia basta invece un periodo di 15 a 20 giorni.

In queste ricerche mi sono servito di pezzi di feti di varî mammiferi e specialmente di feti umani freschissimi, i quali mi hanno dato sempre migliori risultati di quelli ottenuti da altri animali.

Struttura. — È superfluo che io ricordi come da Sömmering in poi si sia inteso sotto il nome di *substantia nigra* o di *locus niger* quello strato di colorito grigio scuro, ben visibile ad occhio nudo, il quale separa la faccia superiore del *pes pedunculi* dalle formazioni che costituiscono il tegmento del mesencefalo. Essa si estende quindi dal margine superiore del ponte sino a livello del margine posteriore dei *corpora mammillaria* ed è più spessa vicino al margine mediale che vicino al margine laterale. Nei preparati in cui si sia ottenuto soltanto la reazione delle cellule di nevroglia e dei vasi, si vedono grossi e numerosi vasi, i quali ascendendo verticalmente dal piede del peduncolo, dividonsi in numerosi rami secondarî nell' interno della *substantia nigra*, diventando sempre più sottili a misura che si ascende verso la zona tegmentale. Le cellule di nevroglia hanno un corpo rotondo con numerosi e sottilissimi prolungamenti, i quali danno alle cellule stesse quell'aspetto raggiato caratteristico che si ritrova ad es. nella sostanza grigia corticale del cervello. In preparati ottenuti da feti di gatto ho potuto riconoscere qualche volta lungo i prolungamenti delle cellule di neuroglia quei piccoli rigonfiamenti sui quali ha richiamata recentemente l'attenzione il Magini (1). È qui anche opportuno ricordare come diverse da queste per forma sieno le cellule di neuroglia che trovansi nel piede del peduncolo, nel quale, come nello strato sottomeningeo della corteccia cerebrale, esse presentano un corpo di forma appiatitta, della grandezza di 20-40 μ. con prolungamento assai corto. I sottili prolungamenti delle cellule di neuroglia si veggono inserire, dopo un decorso più o meno lungo, come di consueto, sulle pareti dei vasi.

Eminenti anatomici raccontano che le cellule nervose della *substantia nigra*, oltre a contenere pigmento nero, sono o fusiformi (Wernicke) o rotonde (Henle) o irregolari (Quain): eppure il metodo della colorazione nera dimostra come in questo ganglio siffatte forme di cellule sieno le più rare. Una tale differenza fra i resultati ottenuti col metodo del Golgi e quelli ottenuti coi comuni metodi di colorazione col carminio non deve fare meraviglia a chi ricordi che anche il Mondino (2) trovò solamente nei margini dell'*antimuro* prevalente quelle cellule fusate, che, secondo le osservazioni di Meynert, avrebbero predominato in tutto lo spessore dell'antimuro.

Dando ora un' occhiata alla fig. 1 della tavola e confrontandola con la tavola III della Monografia del Golgi « *Sulla fine anatomia degli organi centrali del sistema nervoso* » non si può a meno di riconoscere quanta stretta rassomiglianza vi sia fra la struttura della *substantia nigra* e quella della corteccia delle circonvoluzioni cerebrali. Di fatti la *substantia nigra* risulta essenzialmente costituita da due strati di cellule nervose, uno superiore o strato delle cellule piramidali (tav. fig. 1ª, *C*), uno inferiore o strato delle cellule atipiche (tav. fig. 1ª, *B*). Il primo forma la quasi totalità

(1) Magini, *Neuroglia e cellule nervose cerebrali nei feti.* Pavia 1888.

2) Mondino, *Ricerche macro e microscopiche sui centri nervosi.* Torino, 1886, p. 24.

della *substantia nigra:* il secondo forma il margine inferiore della medesima, ed è sopratutto sviluppato in corrispondenza delle sporgenze, che forma questo ganglio dentro la sostanza bianca del *pes pedunculi.* Lo strato superiore è formato da molti ordini di cellule, aventi una forma nettamente piramidale, la cui larghezza oscilla fra 12-20 μ (le più piccole) e 20-40 μ (le più grandi). Sparsi qua e là fra esse si vedono alcuni rari elementi globosi e fusiformi. La base delle cellule piramidali è rivolta verso il *pes pedunculi*, l'apice verso la regione tegmentale. Questa disposizione delle cellule rispetto al *Piede* non solo si mantiene nel tratto corrispondente alle parti mediale e media del peduncolo, ma eziandio in quello corrispondente alla parte laterale, e qui per conseguenza le cellule si dispongono in direzione alquanto obliqua rispetto alle altre situate medialmente (tav. fig. 3ª, *o*). Inoltre in corrispondenza della parte laterale del piede, le cellule piramidali si riducono ad uno o due soli ordini di cellule (tav. fig. 3ª, *o'*): questo fatto è in armonia con quanto viene ricordato da alcuni anatomici (Quain), che cioè la *substantia nigra* è più spessa vicino al margine mediale che a quello laterale, sicchè appunto per ciò il fascio del lemnisco non può essere completamente separato dai fasci del Piede.

Il prolungamento apicale protoplasmatico è robusto, molto lungo, e si dirige direttamente in alto: appena originato, emette ad angolo retto o leggermente obliquo delle ramificazioni secondarie che decorrono lateralmente fra i prolungamenti apicali delle altre cellule, e dopo un breve tragitto si perdono di vista. Gli altri prolungamenti protoplasmatici si partono per lo più dalla base o dagli altri due angoli del corpo cellulare e si ramificano dicotomicamente dirigendosi verso la regione tegmentale. Il prolungamento nervoso parte o direttamente dalla parte media della base della cellula o da una radice comune ad uno dei prolungamenti protoplasmatici. Esso emette ad angolo retto poche fibrille laterali, dirigendosi ora con cammino rettilineo ora con cammino leggermente ricurvo verso la parte ventrale ove decorrono le fibre del *pes pedunculi* fra le quali si perde di vista.

Mentre nel limite superiore dello strato superiore della *substantia nigra*, quello cioè che confina con la regione tegmentale, la serie delle cellule piramidali finisce con uno strato perfettamente distinto, nella parte inferiore invece il limite fra la zona delle cellule della *substantia nigra* e quella in cui decorrono gli elementi del *pes pedunculi* è variabile e poco netto. Già anche ad occhio nudo, e nei manuali di Anatomia questo fatto è ottimamente rappresentato, la massa grigia della *substantia nigra* si vede sporgere qua e là fra i fasci adiacenti del piede. Ora è appunto in questa zona inferiore dove le cellule non solo diventano molto rade ma perdono la loro caratteristica forma piramidale e presentano talvolta una forma fusiforme talvolta rotonda od affatto irregolare. Non mancano anche in questa zona cellule piramidali; ma queste, oltre ad esser piccolissime, sono disposte colla base od obliquamente ovvero rivolta verso la regione tegmentale. In alcuni preparati ho osservato, specialmente in questa zona, la presenza di enormi cellule di forma piramidale (tav. fig. 2ª, *a*), affatto simili a quelle osservate da Martinotti (1) nella zona superiore dello strato inferiore della

(1) Martinotti C., *Sulla struttura del nastro di Vicq-d'Azyr* (Dal Laboratorio neuropatologico del R. Manicomio di Torino).

corteccia del nastro di Vicq-d'Azyr. I prolungamenti protoplasmatici di queste cellule partonò da tutti i punti della periferia del corpo cellulare, prevalentemente dai poli nelle cellule fusiformi: il prolungamento nervoso parte anch'esso dalla periferia del corpo cellulare ed in queste cellule a preferenza che in quelle dello strato superiore si vede questo prolungamento distaccarsi da un tronco comune ad un prolungamento protoplasmatico. Il prolungamento nervoso si dirige più spesso lateralmente che verticalmente in basso verso la regione del Piede: in rarissimi casi ho veduto questo prolungamento dirigersi verso la regione tegmentale.

Ora a seconda del diverso modo di comportarsi del prolungamento nervoso si distinguono (Golgi) due categorie di cellule, cioè: 1° cellule nelle quali il prolungamento nervorso pure emanando fini fibrille laterali, finisce come cilindrasse di una fibra nervosa; 2° cellule nelle quali il prolungamento nervoso suddividendosi complicatamente, finisce per isciogliersi in una rete nervosa diffusa. Intanto in tutte le osservazioni dei miei preparati non mi è riuscito mai di vedere il prolungamento nervoso comportarsi come le cellule del secondo tipo. Ho veduto invece costantemente il prolungamento nervoso mantenere la propria individualità per un lungo tratto, finchè si sottraeva completamente allo sguardo. Io faccio naturalmente qualche riserva prima di negare assolutamente l'esistenza di cellule del secondo tipo in questa formazione, quantunque non manchino esempi di tal genere in altri gangli come per esempio nel *Claustrum* (Mondino) (1) o nel nucleo dell'*Oliva bulbare* (Vincenzi) (2), nei quali non si riscontrarono che cellule del 1° tipo.

I fatti sopraesposti menano alla conclusione che la *substantia nigra* è per la forma e per la disposizione delle cellule, per il modo di origine e di decorrere dei prolungamenti nervosi e protoplasmatici affatto simile alla struttura della corteccia delle circonvoluzioni cerebrali. Le cellule della *substantia nigra* appartengono come si è veduto, almeno nel massimo numero, a quelle alle quali il Golgi e i suoi scolari attribuiscono il significato di cellule della sfera motoria; e precisamente il prolungamento nervoso si dirige verso il *pes pedunculi*, dove gli studî embriològici ed anatomo-patologici hanno dimostrato la presenza prevalentemente di fibre motorie (fasci piramidali e fasci cortico-bulbari); da questo studio viene d'altra parte appoggiata piuttosto l'osservazione di Forel, il quale vide dalla *substantia nigra* fibre portarsi verso il piede del peduncolo anzichè l'opinione di Meynert, secondo il quale le fibre pravenienti dalla *substantia nigra*, andrebbero a costituire il *Fascio dal Piede alla cuffia.*

La somiglianza di struttura della *substantia nigra* con quella della corteccia cerebrale darebbe certamente diritto a considerarla come un « ganglio del mantello, rispettivamamente corticale » analogamente al concetto che gli Anatomici si sono oggi formato dei nuclei *caudatus* e *lenticularis;* però, mentre per questi due nuclei, un tal concetto è avvalorato più che dalla struttura, dalle ricerche embriologiche e morfologiche (cfr. Edinger, *Zehn Vorlesungen über den Bau der nervosen*

(1) Mondino C., l. cit. p. 175.

(2) Vincenzi L., *Sulla fina anatomia dell'oliva bulbare nell' uomo.* Atti della R. Accad. med. di Roma. Anno XIII, vol. III, serie II.

Centralorgane. Leipzig 1885), non si può dire altrettanto per la *substantia nigra*, la quale non ha rapporti anatomici di continuità con la sostanza grigia del mantello. La *substantia nigra* appartiene alla categoria dei molteplici nuclei scaglionati lungo i fasci del Tronco cerebrale « nuclei del Tronco » e le sue cellule danno origine probabilmente a nuovi fasci del piede, come p. es. le cellule del *nucleus olivae bulbaris* danno origine a fibre intrabulbari ed extrabulbari [1]. Essa va classificata con *Aeby*, fra i « nuclei del tronco » i quali hanno probabilmente lo stesso significato dei « *nuclei corticali* »: cioè rappresentano accumuli di cellule ganglionari, da cui originano fibre nervose che rinforzano i fasci decorrenti nell'encefalo.

[1] Vincenzi, loc. cit. p. 173.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1ª. *Frammento di una sezione frontale della substantia nigra* (Homo). (Gundlach Oc. N. III. Ob. N. III).

A-a. Regione del *pes pedunculi* (per mancanza di spazio è stata ridotta di circa ²/₃): vi si notano cellule di neuroglia con corpo rotondo, o allungato e con corti prolungamenti.

B. Zona delle cellule atipiche (inferiore) della *substantia nigra*: vi si notano cellule sparse irregolarmente qua e là, prevalentemente atipiche: il prolungamento nervoso (disegnato in rosso) emana dalla parte laterale del corpo cellulare, dirigendosi per lo più lateralmente o verso la regione del *pes pedunculi.*

C. Zona delle cellule piramidali (superiore): si vede formata di molte serie di cellule piramidali, tra le quali è intercalata qualche rara cellula globosa o fusiforme. I prolungamenti apicali sono diretti verso la zona tegmentale (omessa nella figura). I prolungamenti nervosi sono diretti in basso verso la regione del Piede.

Fig. 2ª. *Alcuni tipi di cellule gangliari appartenenti alla substantia nigra*. (Gundlach. Oc. N. III. Ob. N. III).

a. Cellula ganglionare irregolare grande, piuttosto rara. Il prolungamento nervoso emana dal corpo cellulare.

b. Cellula piramidale grande, il prolungamento nervoso emana dalla base del corpo cellulare, con decorso alquanto tortuoso, ed emette qualche fibrilla laterale.

c. Piccola cellula piramidale; il prolungamento nervoso, emanando come dalla precedente, decorre in direzione laterale.

d. Tipo di cellula vicino alla forma piramidale, con prolungamento apicale assai robusto: il prolungamento nervoso emana dai lati del corpo cellulare.

e. Tipo di cellula piramidale alquanto modificata: il prolungamento nervoso emana dalla parte media della base della cellula, e, dopo formato un brusco ginocchio, si porta lateralmente.

Fig. 3ª. *Taglio frontale della parte inferiore del pedunculus cerebri*. (Gundlach. Oc. N. I. Ob. N. I).

o, parte mediale e media del peduncolo; *o'*, parte laterale; A. *Pes pedunculi*; B. *Substantia nigra*; C., parte inferiore della regione tegmentale. I molteplici strati di cellule piramidali nella parte mediale (*o*) si riducono ad uno o due strati nella parte laterale (*o'*). I prolungamenti nervosi sono stati omessi per non complicare troppo la figura.

Fig. 3ª

Lit. Bruno e Salomone, Roma

Fig. 1ª

c

b

a

Fig. 2ª

a

d

b

c

e

Fig. 3ª

A

o

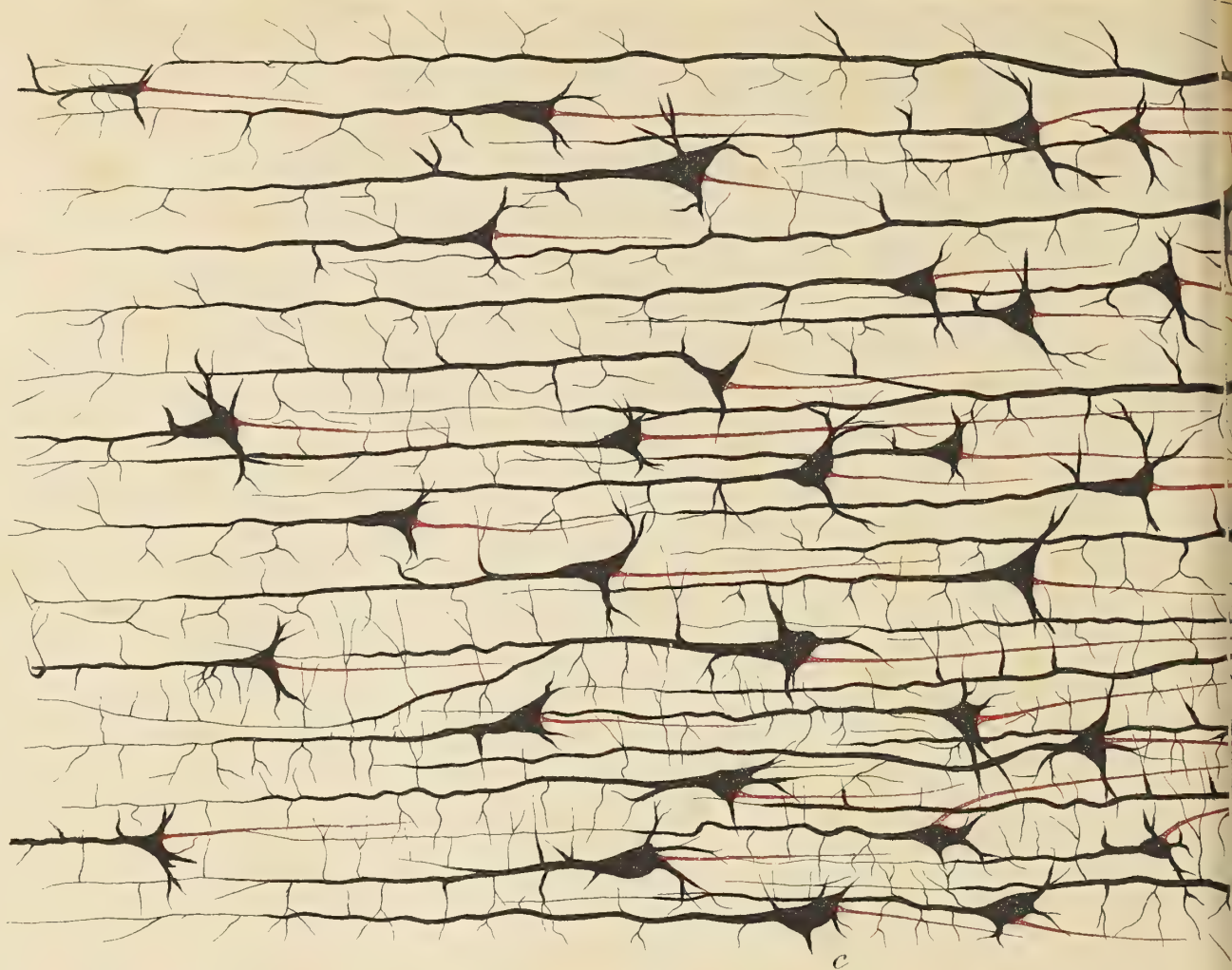
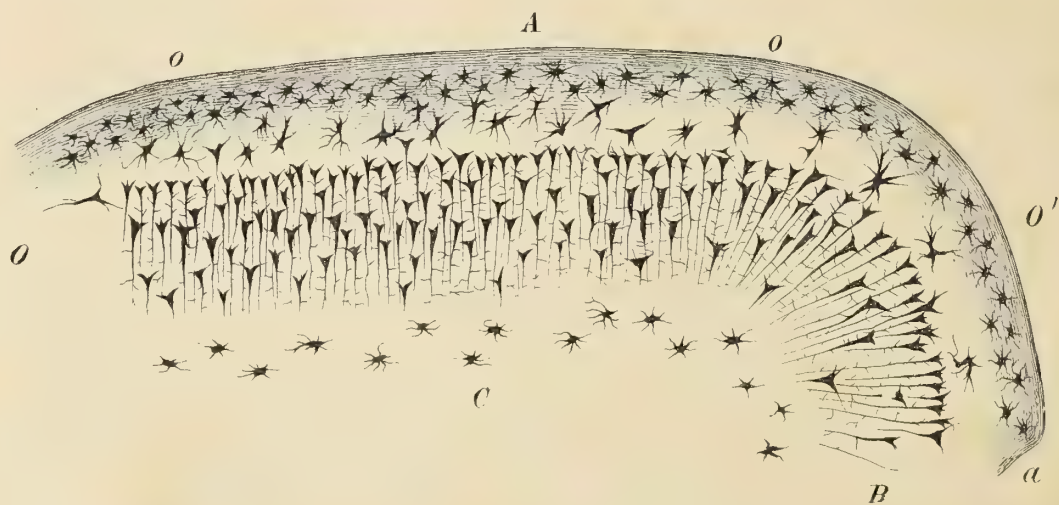
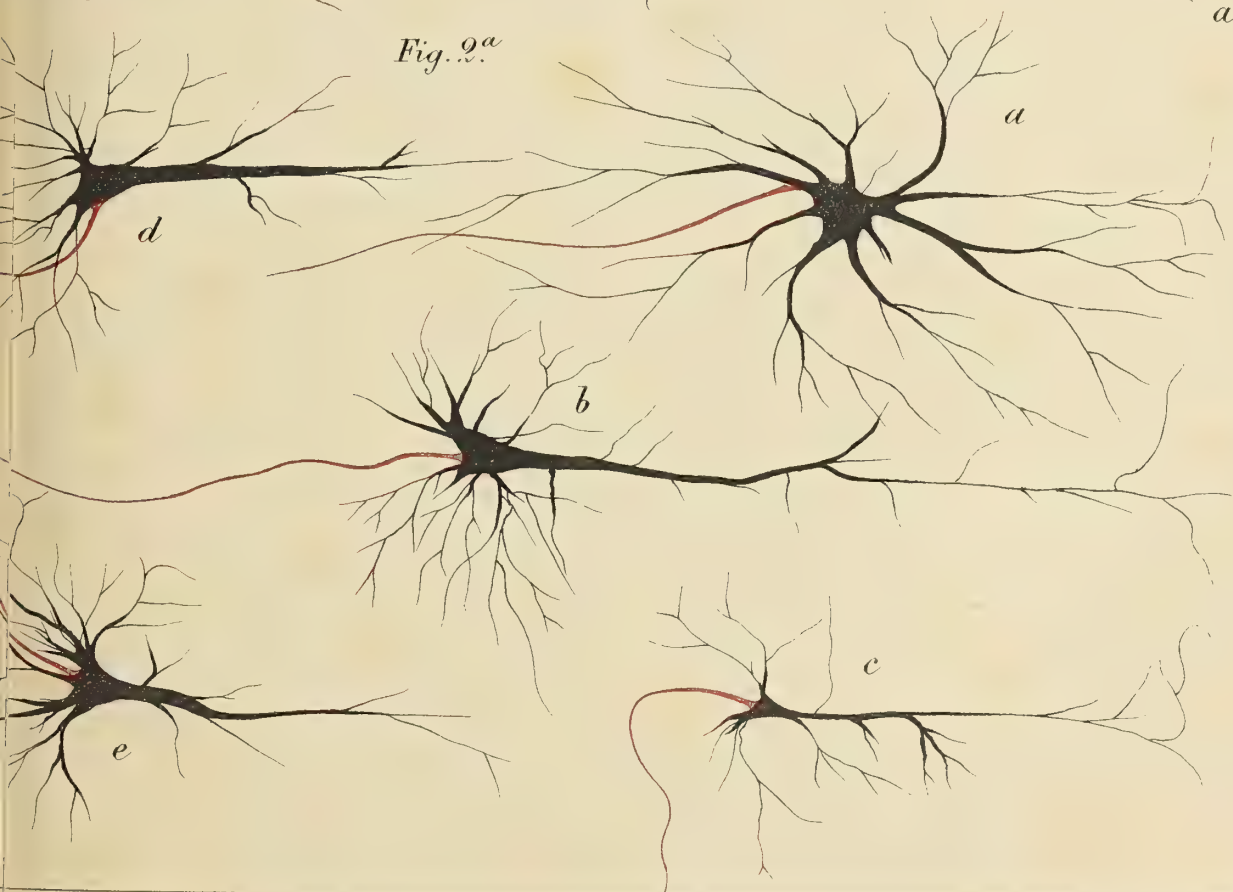
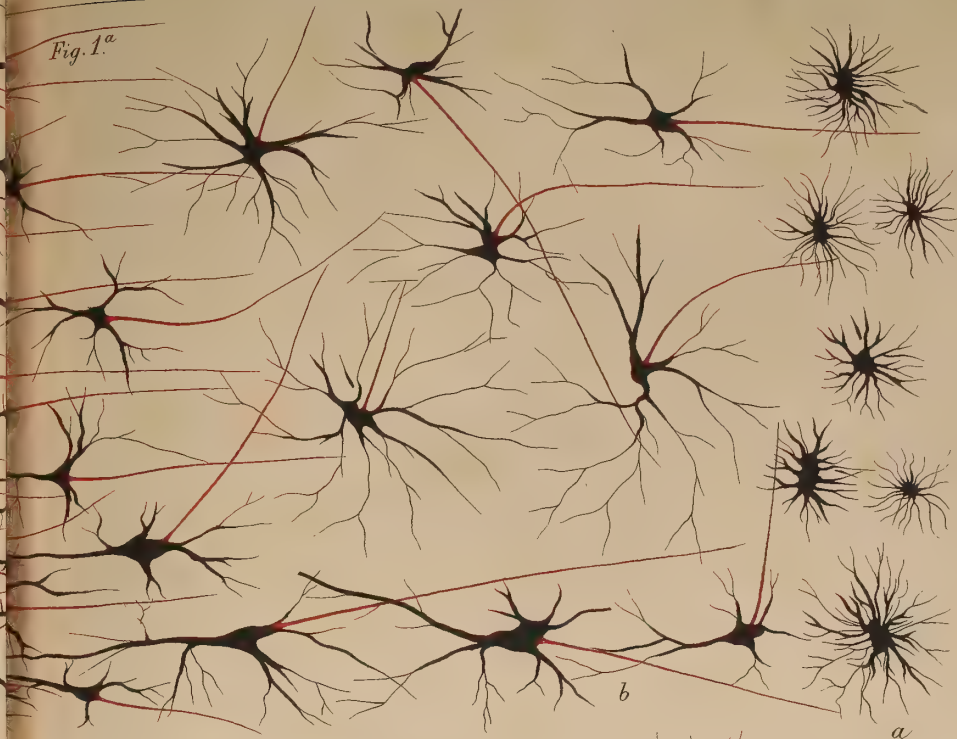
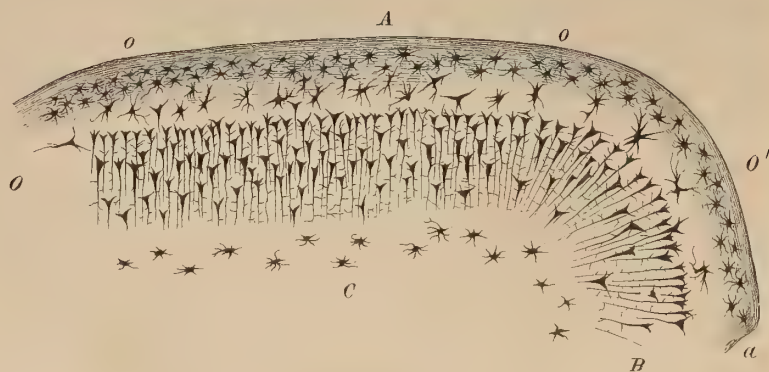
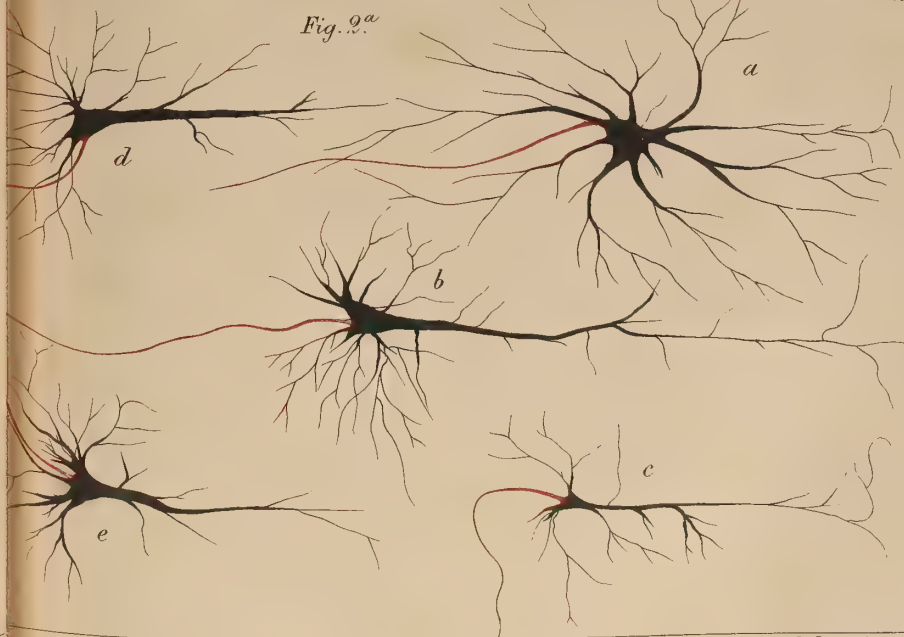
o

O

O'

C

B

a

Lit. Bruno e Salomone Roma

Relazione sulle esperienze istituite nel R. Osservatorio Astronomico di Padova in agosto 1885 e febbraio 1886 per determinare la lunghezza del pendolo semplice a secondi preceduta dalla esposizione dei principî del metodo e dalla descrizione dello strumento di Repsold.

Memoria del Corrispondente GIUSEPPE LORENZONI
letta nella seduta del 22 gennaio 1888.

(Con nove tavole litografate)

PREFAZIONE

Il Presidente della Commissione geodetica italiana con lettera del 10 marzo 1879 annunziavami, che la Commissione geodetica ristretta, adunata in Milano il 3 di quello stesso mese, aveva deciso di acquistare un apparato per le ricerche relative alla intensità della gravità; ma che, considerando i dubbî sorti sulla bontà dei risultati ottenuti col pendolo a reversione di Repsold in causa delle oscillazioni del supporto, stimava innanzi tutto opportuno incaricare anche me (da cui era pure partita una mozione in proposito) a fare uno studio preliminare sull'indirizzo da dare a quelle ricerche e sulla qualità dell'apparato da acquistare. Invitavami egli in conseguenza ad assumere siffatto incarico e a compilare sull'argomento una relazione, la quale potesse servire di base alle ulteriori deliberazioni della Commissione.

Accettato l'incarico incominciai dal prendere una più esatta cognizione di quanto erasi fatto di più importante negli ultimi tempi sulla questione del pendolo, massime in Germania e frutto palese di quel mio primo studio fu il cenno storico-cronologico allegato alla relazione che io lessi in seno alla Commissione raccoltasi in adunanza plenaria a Firenze nei giorni 14 e 15 giugno 1880 [1].

In quella relazione io asseriva scopo delle vagheggiate ricerche dover essere il misurare direttamente o indirettamente, colla maggiore esattezza possibile, la lunghezza del pendolo a secondi in un certo numero di punti opportunamente distribuiti su tutta l'Italia. Ed esprimeva l'opinione che tali ricerche dovessero dividersi in due categorie. Quelle della prima categoria avrebbero dovuto essere intese a stabilire il metodo ed i mezzi da usare così per le determinazioni fondamentali come per le determinazioni

[1] V. Processo verbale delle sedute della Commissione italiana per la misura dei gradi tenutesi in Firenze il 14 e 15 giugno 1880 (Firenze, Barbèra. 1880) a pag. 25 e 39.

relative della lunghezza del pendolo. Esse avrebbero preceduto in ordine di tempo le ricerche della seconda categoria, che sarebbero consistite nell'applicazione dei risultati delle prime alla determinazione della lunghezza del pendolo in un certo numero di punti astronomici. Limitandoci per allora alle ricerche della prima categoria, io inculcava essere d'uopo considerare che, venendo noi ad occuparci di esse dopo gli altri, e quando erano state dagli altri quasi esaurite, il nostro cômpito non poteva, nè doveva essere tanto quello di fare qualche cosa di nuovo e di originale, quanto piuttosto di ripetere e, se fosse possibile, di migliorare quello di più importante che gli altri avevano fatto prima di noi, procurando di non tralasciare veruno di quegli accorgimenti che l'esperienza altrui avea dimostrato necessarî per la buona riuscita di operazioni tanto delicate. Espresso in seguito il parere che le operazioni della prima categoria dovessero eseguirsi in un osservatorio permanente e da una sola persona, e dopo di avere ricordato che, per generale consenso, lo strumento più adatto alle determinazioni fondamentali è il pendolo *convertibile* o *reversibile* che dir si voglia, io concludeva col proporre, che, insieme ad alcuni apparati ausiliarî che io indicava, fosse fatto l'acquisto presso l'officina Repsold di un apparato completo di pendolo simile a quello di proprietà dell'Istituto geodetico prussiano.

La Commissione approvava la mia relazione e, su proposta del Consiglio ristretto, deliberava di affidare a me le ricerche preliminari. Tenendo presenti tuttavia le obbiezioni mosse al pendolo di Repsold a motivo delle trepidazioni del supporto e considerando che nella prossima conferenza a Monaco la questione del pendolo doveva essere ampiamente trattata, la Commissione medesima, prima di passare all'acquisto dell'apparato, riteneva ancora opportuno, così facendosi incontro al desiderio mio, che io prendessi parte alla conferenza predetta, e mi mettessi bene al corrente dello stato delle cose recandomi a visitare quegli osservatorî e stabilimenti presso i quali credessi di attingere le migliori informazioni sulla scelta del pendolo e sul metodo di osservazione.

In conformità alla deliberazione ora esposta presi parte alla sesta conferenza geodetica internazionale riunitasi a Monaco di Baviera nel settembre (dal 13 al 16) di quell'anno stesso 1880 ([1]) ed in quella occasione, oltre assistere alla discussione pubblica, ebbi agio d'interrogare privatamente uno ad uno, prima che partissero da Monaco, gli uomini egregi che si erano occupati o stavano occupandosi dell'argomento, cioè l'Hirsch, l'Albrecht ed i compianti professori Plantamour, Bruhns ed Oppolzer dopo quel tempo defunti. Scioltasi la conferenza visitai varî luoghi nei quali io aveva speranza di poter vedere il pendolo di Repsold in azione, oppure anche soltanto di vedere persone che mi potessero giovare coi loro lumi. Primo luogo visitato fu l'Ufficio della *Gradmessung* austriaca a Vienna, dove, per somma gentilezza del cavaliere prof. D'Oppolzer e dell'assistente di lui signor Anton, potei esaminare il pendolo austriaco (che avevo già veduto alla sfuggita nel 1875) in tutte le sue parti, lo vidi funzionare e ricevetti varie istruzioni circa il modo di eseguire le osservazioni. Per combinazione di speciali circostanze non mi fu possibile nel viaggio di vedere altri pendoli; ma passando successivamente, prima del mio ritorno in patria, per Lipsia, Berlino, Amburgo,

([1]) Comptes-rendus des séances de la sixième conférence géodésique internationale pour la mesure des degrés en Europe réunie à Munich du 13 au 16 septembre 1880 ecc. (Berlin, Reimer, 1881).

Leida, Bonn, Strassburgo, Neuchâtel, Ginevra, potei conferire di nuovo e con più agio con alcune delle persone vedute a Monaco e potei avere una lunga conferenza coi signori Repsold, nella quale furono discussi alcuni punti riguardanti l'apparecchio, che, subito dopo il mio ritorno in Italia, io proposi per l'acquisto alla nostra Commissione, fondandomi sulle considerazioni seguenti.

1° Le obbiezioni recenti contro il pendolo a reversione costruito dai Repsold riguardando unicamente il treppiede, così che esso non poteva più raccomandarsi quale strumento opportuno per le determinazioni correnti della gravità, come si era dapprincipio sperato, era per me evidente che nulla ostasse a ciò che il pendolo stesso, intanto e fino a quando fosse trovato un treppiede abbastanza solido o il modo di evitare l'errore proveniente dalle oscillazioni di questo, venisse usato nei luoghi nei quali era possibile sostituire al treppiede un supporto bene stabile, come le grosse muraglie di un osservatorio. Perciò io pensava di far costruire un sostegno speciale che permettesse di assicurare il pendolo a robusta muraglia, rinunziando così all'uso del treppiede e al vantaggio ad esso inerente di permettere l'impiego del pendolo anche in campagna.

2° Avendo il Peirce sperimentato il pendolo in ambienti di aria variamente rarefatta e avendo trovato che l'azione dell'aria non è interamente eliminata, come invece risulterebbe dalla teoria del Bessel, era per me importante di ripetere esperienze di quel genere in circostanze variate e perciò, approfittando in parte delle idee del Peirce stesso, io mi accordava coi signori Repsold per dare al sostegno del pendolo forma tale che permettesse di rinchiudere il pendolo e farlo oscillare entro un recipiente a perfetta tenuta d'aria e di determinare la durata dell'oscillazione corrispondente a varî gradi di rarefazione.

3° Considerando il pericolo che, nel mandare la scala formante parte dell'apparato a Berlino o a Parigi per la campionatura, potessero avvenire alterazioni nella scala stessa per effetto del viaggio, io pensava che fosse opportuno fornire l'apparecchio di due scale, affinchè, una rimanendo nel luogo di osservazione, potesse servire con opportuni confronti a riconoscere le eventuali variazioni dell'altra scala dipendenti dal viaggio.

La Commissione ristretta, per organo della Presidenza, avendomi autorizzato ad ordinare l'apparato, verso la fine del 1880 esso venne commesso ai signori Repsold e in principio del 1882 pervenne a quest'osservatorio. Rimase però incassato tutto il resto di quell'anno in attesa che, per l'allontanamento dell'officina meccanica di quest'osservatorio dall'interno della torre, potesse venire adattato convenientemente e utilizzato il locale prescelto per siffatte esperienze. Perciò soltanto nell'inverno del 1883 lo strumento potè venire montato ed essere sottoposto a un primo studio, e in ogni parte di esso ebbi occasione di riscontrare con vivissimo piacere quella suprema esattezza e quella nitidezza di esecuzione che hanno reso celebri in tutto il mondo astronomico le opere uscite dalla officina Repsold. Desideroso di sperimentare anche il recipiente pneumatico, provvidi dall'officina Galileo di Firenze una pompa aspirante a rotazione e col mezzo di questa potei ridurre la pressione atmosferica nell'interno del recipiente suddetto a circa un centimetro, vale a dire presso a poco a quello stesso grado di rarefazione raggiunto dal Peirce nelle sue esperienze. Le altre mie esperienze ed esercitazioni riguardarono principalmente la misura della durata di una oscillazione. I due metodi usati dagli sperimentatori a tale scopo sono: 1° il metodo della

registrazione cronografica dei passaggi del pendolo davanti allo zero dell'arco graduato osservati col mezzo di un cannocchiale; 2° il metodo delle coincidenze. Ritengo che il primo di questi metodi, usato la prima volta dal Plantamour ([1]), non abbia dato sufficiente esattezza per la circostanza che, dopo registrati i passaggi, bisognava paragonare i secondi cronografici col pendolo normale; mentre nel secondo metodo, cioè in quello delle coincidenze, immaginato già dal Borda, si è paragonato direttamente il pendolo a reversione col pendolo normale, sia usando della disposizione adottata dal Bruhns ed immaginata dal Vogel, sia impiegando uno speciale apparecchio ausiliario (apparecchio di Gruber) come fece l'Oppolzer ([2]). Siccome in quest'osservatorio il pendolo normale registra le sue battute direttamente sul cronografo, per cui i passaggi osservati del pendolo a reversione si paragonano immediatamente col pendolo normale, mi premeva vedere quale esattezza era possibile raggiungere con quel primo metodo. I risultati allora ottenuti m'indussero nella convinzione che, nelle mie particolari circostanze, questo metodo poteva stare quasi alla pari coll'altro, e perciò decisi di attenermi esclusivamente ad esso, giacchè l'applicazione del metodo delle coincidenze avrebbe presentato nel caso mio difficoltà non lievi.

In seguito alle esperienze preliminari fissai il piano delle mie successive osservazioni proponendomi di fare intanto una completa determinazione della lunghezza del pendolo a secondi coi soliti metodi e nelle condizioni ordinarie di pressione e di temperatura. Io prevedeva già allora, che quelle mie ricerche non avrebbero potuto procedere colla desiderata sollecitudine, trattandosi di un genere di osservazioni per me quasi ancora nuovo e trattandosi pure che non in tutto mi era dato seguire le orme altrui e che altre occupazioni di ufficio assorbivano gran parte del mio tempo. Ed infatti, principalmente per quest'ultimo motivo, nel resto di quell'anno e in tutto il successivo 1884 poco o nulla potei fare intorno alle progettate ricerche.

Nel frattempo tuttavia le mie idee sulla questione ricevettero nuovo lume, avendo io potuto assistere alla settima conferenza geodetica internazionale radunatasi in Roma dal 15 al 24 ottobre 1883, ed ivi intendere dall'Oppolzer la lettura della sua memorabile relazione intorno alla questione del pendolo, nella quale ([3]), fra altro, è parola di un fatto, che io pure avevo poco tempo prima osservato, della considerevole differenza esistente fra la lettura microscopica corrispondente a coltello di agata illuminato e campo oscuro, e quella corrispondente a coltello oscuro in campo illuminato. Si vedrà a suo luogo (§ XXII) il modo col quale ho cercato di superare la difficoltà.

([1]) Plantamour E., *Expériences faites à Genève avec le Pendule à Réversion.* Genève et Bâle 1866 (Extrait des mémoires de la Société de Phys. et d'Hist. Nat. de Genève. Tome XVIII).

([2]) Vogel prof. H. C., *Ueber eine Methode, die Schwingungszeit eines Pendels oder irgend eines schwingenden Stabes durch Coïncidenzen mit einem Pendel oder Stabe von bekannter Schwingungsdauer zu ermitteln.* (Carl's Repertorium für Experimental-Physik etc. Bd. XVII p. 337-339).

Gruber Dr. Ludwig. *Ueber einen Apparat zu Coïncidenzbeobachtungen bei Schwere-bestimmungen mit Hilfe des Reversionspendels* (Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften. II. Abtheilung, Jänner-Heft, Jahrgang 1875).

([3]) Comptes-rendus des Séances de la septième conférence géodésique internationale pour la mesure des degrés en Europe réunie à Rome du 15 au 24 Octobre 1883 ecc. (Berlin, Reimer, 1884). Annexe VIb *Rapport sur la détermination de la pesanteur à l'aide de différents appareils.* Lu à Rome le 22 Octobre 1883 par M. Theodore von Oppolzer.

Nel principio del 1885 mi riuscì di risolvere, in un modo che io trovo soddisfacente, la questione della illuminazione e successivamente di condurre a termine tutte le prove preparatorie, così che, terminati i corsi universitarî, potei nell'agosto di quello stesso anno eseguire una serie completa di osservazioni capace di porgere da sola un valore della quantità cercata. Dalla esecuzione e dalla successiva discussione di queste osservazioni scaturirono alcuni insegnamenti dei quali io non poteva non tener conto nelle ulteriori osservazioni che io aveva stabilito di fare. E perciò la seconda serie di osservazioni fu fatta con programma alcun poco variato nel febbraio del 1886 cioè sei mesi dopo la prima quando nella stanza ha luogo la minima temperatura annuale, mentre nell'agosto si verifica la temperatura massima.

Terminate felicemente le operazioni, alla fine di luglio di quello stesso anno 1886 una delle due scale fu inviata a Breteuil per essere campionata e fu di là rimandata a Padova in giugno del corrente 1887. I confronti istituiti fra le due scale dell'apparato prima e dopo il viaggio hanno dimostrato che la scala inviata a Breteuil non ha subìto nell'intervallo sensibile alterazione. Ottenuta la lunghezza della scala fu possibile determinare le lunghezze del pendolo risultanti per ognuna delle due serie indipendenti di osservazioni, e si ottennero due valori coincidenti entro a pochi decimi di *micron.*

Anche il coefficiente di dilatazione del pendolo, dedotto dalla differenza dei tempi di oscillazione alle due temperature diverse, riuscì quasi esattamente coincidente con quello comune alla prima ed alla seconda scala aumentato del coefficiente di dilatazione relativo del pendolo e della scala risultante dalle misure di confronto fra questi due oggetti.

Benchè la forma del supporto adottato mi lasciasse preventivamente sperare una quasi assoluta immobilità della linea di appoggio del coltello durante le oscillazioni del pendolo, non trascurai di eseguire alcune ricerche per verificarla, servendomi a tale uopo, sull'esempio dell'Orff, di un pendolo filare. L'esperienza mi ha fatto vedere che, effettivamente, il piano di appoggio del coltello oscilla insieme col pendolo, ma che l'effetto di tale oscillazione sulla lunghezza del pendolo non dovrebbe essere superiore ad un micron. L'esperienza inoltre sembra indicare la convenienza di collegare strettamente e rigidamente alla massa grande del supporto l'estremità libera della mensoletta di appoggio del coltello, affine d'impedirle qualunque oscillazione intorno ad asse verticale in conseguenza della oscillazione del pendolo.

Uno dei risultati da me ottenuti nelle esperienze del febbraio 1886 (indipendentemente dalla conoscenza di analoghi risultamenti ottenuti dall'Oppolzer intorno allo stesso tempo od anche prima, ma pubblicati solo più tardi) è stata la dimostrazione della necessità di applicare alla durata di una oscillazione già ridotta all'arco cicloidale (o come suol dirsi all'arco infinitesimo) un'altra correzione dipendente dall'amplitudine, alla quale io detti il nome di *riduzione all'amplitudine zero.* Ulteriori esperienze potranno far conoscere la forma analitica di tale correzione e la causa cui deve essere ascritta.

Nel rendere conto delle operazioni da me eseguite e dei metodi usati nella riduzione degli elementi da quelle forniti, ho avuto bisogno di riferirmi a nozioni teoriche nella massima parte già acquisite alla scienza, circa le questioni connesse o subordinate alla questione principale formante propriamente lo scopo del mio studio. Invece

di mandare, occorrendo, il lettore a cercare in autori varî la dimostrazione delle formole usate e la giustificazione dei procedimenti seguiti, ho stimato utile di incominciare colla esposizione giustificata di tutte le formole occorsemi, industriandomi, per quanto stette in me, di riuscire chiaro, abbastanza preciso e di rendere minima la somma delle cognizioni ausiliarie richieste per la intelligenza delle cose esposte.

Riferendo nella seconda parte intorno al luogo di osservazione, allo strumento ed agli accessorî suoi, mi son proposto di dare una descrizione alquanto minuta di ogni cosa, illustrandola con numerose figure allo scopo di rendere edotto chi legge intorno alle vere condizioni dei miei esperimenti senza bisogno di averle materialmente sott'occhio, e allo scopo di rendere il tempo, da me necessariamente occupato nello studio di ogni dettaglio, proficuo anche a chi dovrà in avvenire servirsi dello strumento medesimo. Restami a sapere se ed in quale misura io sia riuscito nel mio intento.

Le tavole sono state da me delineate prendendo le misure direttamente sullo strumento. La riproduzione dei disegni è stata fatta col mezzo della fotozincografia al nostro Istituto geografico militare alla cui Direzione devo perciò esprimere i più vivi ringraziamenti. Dai zinchi i disegni furono poi trasportati sulla pietra ed è in questo secondo passaggio che le linee hanno perduto alquanto della loro primitiva nitidezza.

Nella seconda parte ho pure trattato le questioni relative alla influenza degli errori di aggiustamento e di costruzione dello strumento, concludendo col riconoscere una tale influenza siccome trascurabile nel caso dello strumento di Repsold e qualora si cerchi di mantenere gli errori di aggiustamento entro i limiti concessi dai mezzi istrumentali.

Nella terza parte sono esposti con molte particolarità i risultati delle varie ricerche sperimentali connesse allo scopo finale e la discussione cui hanno dato luogo.

In appendice ho riportato due esempî numerici per far vedere il duplice modo col quale praticamente può essere calcolata la riduzione all'arco cicloidale e per dare una idea della quantità di lavoro occorrente in un caso e nell'altro. Mi sono anche lusingato che possano servire a scopo didattico, poichè riuniscono in sè l'applicazione di svariate teorie matematiche e danno saggio di una disposizione del calcolo numerico, che io ho sperimentato opportuna.

Devo a questo punto dichiarare che ho approfittato con vantaggio dell'opera cortese dell'assistente a quest'osservatorio signor dottore Giuseppe Ciscato, il quale, dietro mia istanza, e con profonda intelligenza della materia, ha sviluppato e riveduto le formole, ripetuti gli esempî e corretto una volta le bozze di stampa, per cui giovami sperare che gli errori procedenti da svista sieno ridotti ad un numero abbastanza limitato.

Chi si trova un po' addentro nella cognizione degli argomenti trattati nel presente lavoro, riconoscerà a primo tratto quali sono le parti nelle quali ho creduto opportuno d'introdurre qualche piccola modificazione a quanto altri hanno fatto (per es. nel metodo di riduzione all'arco cicloidale) o nelle quali la questione è stata da me considerata sotto un punto di vista alquanto diverso da quello sotto il quale altri l'hanno trattata (per es. nell'uso del pendolo filare per misurare le vibrazioni del supporto) e giudicherà spassionatamente, come io non saprei fare, se quel tanto che non ho attinto ad altre fonti sia meritevole di qualche considerazione.

PARTE PRIMA

Teoria.

§ I. *Equazione differenziale del moto di un pendolo fisico il cui asse di sospensione muovesi rimanendo parallelo a sè stesso.*

Alla deduzione di tale equazione giova premettere il seguente lemma.

Sieno x'', y''; x, y; $x + dx, y + dy$ rispettivamente le coordinate ortogonali dei tre punti C, M, M′ (fig. 1, tav. I) e sieno indicati con $R, R + dR$ e $d\vartheta$ rispettivamente le rette CM, CM′ e l'angolo infinitesimo MCM′: soltanto se C si trovi sulla perpendicolare in mezzo all'elemento MM′ (per cui $dR = 0$) sussiste la equazione:

$$R^2 d^2 \vartheta = (x - x'') d^2 y - (y - y'') d^2 x \tag{1}$$

Infatti dalla figura facilmente rilevasi la relazione (essendo CN = CM) fra aree:

$$\text{CMN} + \text{MNM}' + \text{RMM}' + (\text{RMC} = \text{RMP}) = (\text{RM}'\text{C} = \text{RM}'\text{Q}),$$

ovvero:

$$R^2 d\vartheta + R\, d\vartheta\, dR + dx\, dy + (y - y'') dx = (x + dx - x'') dy,$$

da cui la equazione fra le quantità differenziali del primo ordine:

$$R^2 d\vartheta = (x - x'') dy - (y - y'') dx \tag{a}$$

Il punto M″ abbia ora le coordinate $x + dx + dx'$, $y + dy + dy'$ essendo $dx' = dx + d^2 x$, $dy' = dy + d^2 y$ e poniamo angolo $\text{M}'\text{CM}'' = d\vartheta' = d\vartheta + d^2 \vartheta$. Avremo intanto a motivo della (a)

$$R'^2 d\vartheta' = (x + dx - x'') dy' - (y + dy - y'') dx',$$

e ponendo in questa equazione $R + dR$ in luogo di R', sviluppando e sottraendovi la (a) abbiamo fra i differenziali del secondo ordine la equazione:

$$R^2 d^2 \vartheta + 2 R\, dR\, d\vartheta = (x - x'') d^2 y - (y - y'') d^2 x. \tag{b}$$

Le equazioni (a) e (b) sussistono per qualsivoglia posizione del punto C.

Se ora si ponga il punto C sulla perpendicolare in mezzo all'elemento MM′, diviene $\text{CM}' = \text{CM} = R$ e $dR = 0$ e la equazione (b) si converte nella (1) q. e. d.

Osservazione. — Dividendo ambidue i membri della (1) per dt^2 ed osservando che $R \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 x}{dt^2}$ sono accelerazioni lineari applicate al punto M rispettivamente nella direzione MN del suo moto e parallelamente alle due direzioni coordinate x ed y, abbiamo:

$$R \frac{d^2 s}{dt^2} = (x - x'') \frac{d^2 y}{dt^2} - (y - y'') \frac{d^2 x}{dt^2}. \tag{1'}$$

Ponendo poi angolo $\text{PCM} = \vartheta$, per cui $x - x'' = R \cos \vartheta$; $y - y'' = R \operatorname{sen} \vartheta$, si osservi ancora che gli angoli formati dalle direzioni delle accelerazioni $\frac{d^2 y}{dt^2}$ e $\frac{d^2 x}{dt^2}$

colla direzione MN in cui avviene il moto *positivo* di M sono rispettivamente ϑ e $90^\circ + \vartheta$, per cui essendo:

$$(x - x'') \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathrm{R} \cos \vartheta \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathrm{R} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} \cos \vartheta \right]$$

$$-(y - y'') \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mathrm{R} \operatorname{sen} \vartheta \frac{d^2 x}{dt^2} = \mathrm{R} \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \cos (90^\circ + \vartheta) \right]$$

la equazione $(1)'$ potrà scriversi così:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \vartheta + \frac{d^2 x}{dt^2} \cos (90^\circ + \vartheta). \qquad (1)''$$

Perciò se un punto mobile essendo simultaneamente sollecitato in direzioni diverse da due o più accelerazioni $\frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 x}{dt^2} \cdots$, si muove istantaneamente secondo una certa direzione, l'accelerazione $\frac{d^2 s}{dt^2}$ del moto in questa direzione eguaglia la somma delle proiezioni sulla direzione stessa delle accelerazioni componenti. E ne segue essere nulla la somma delle proiezioni di tutte le accelerazioni sulla direzione perpendicolare al moto.

Pertanto se un punto si muove intorno ad un altro ad esso rigidamente vincolato, l'azione del vincolo esercitandosi normalmente alla direzione del moto, non può influire sulla accelerazione tangenziale e vuol essere considerata unicamente siccome spesa nell'annullare le proiezioni sulla direzione del raggio delle accelerazioni sollecitanti il punto.

Così il moto istantaneo di un punto isolato soggetto a determinate accelerazioni s'identifica col moto istantaneo di un punto vincolato rigidamente ad un centro di rotazione, purchè questo centro sia preso sulla perpendicolare in mezzo all'elemento rettilineo descritto dal punto isolato.

Consideriamo ora un corpo rigido in movimento di rotazione intorno ad un asse, e supponiamo che un tale asse, rimanendo fisso nel corpo, possa, durante il movimento di rotazione spostarsi nello spazio, così però che una qualunque sezione del corpo perpendicolare all'asse non esca mai dal proprio piano.

Il piano della fig. 2 sia quello di una sezione qualunque del corpo condotta perpendicolarmente all'asse mobile di rotazione e sia da questo incontrato nel punto L al tempo t e nel punto L' al tempo $t + dt$. Un altro punto della sezione, il quale sia distante r da L e sia situato in M al tempo t, si troverà in M' al tempo $t + dt$ e, per la rigidità del corpo, dovrà essere $\mathrm{L'M'} = \mathrm{LM} = r$.

Se G è il punto nel quale la retta passante pel centro di gravità del corpo parallelamente all'asse mobile di rotazione incontra il piano della figura, sarà LG la traccia sul piano stesso della figura del piano determinato dall'asse di rotazione e dal centro di gravità del corpo. L'angolo formato da quest'ultimo piano coll'asse positivo delle x è eguale all'angolo GLV, che indicheremo con θ, essendo LV parallela all'asse delle x. Per la rigidità del corpo l'angolo $\mathrm{GLM} = \nu$ è costante e, pertanto, l'angolo NL'M' fatto dalla nuova direzione L'M' colla L'N parallela alla direzione

precedente, non è altro che il $d\theta$, cioè l'angolo formato dalla direzione che la retta LG ha al tempo t colla direzione ch'essa assume al tempo $t+dt$.

Il passaggio della retta LM in L'M' può immaginarsi avvenga in diverse maniere, ma in realtà esso avviene mediante la *rotazione istantanea* del corpo intorno ad una certa retta parallela all'asse mobile di rotazione che passa per L. Infatti, si congiungano L ed M rispettivamente con L' ed M' mediante rette e s'innalzino da L ed M due perpendicolari rispettivamente ad LL' ed MM'. Il punto C nel quale esse s'intersecano determina il luogo nel quale la figura è incontrata dalla retta, parallela all'asse che passa per L, intorno alla quale il corpo ha ruotato nel tempo dt per portare la LM in L'M'. Quella retta che passa per C perpendicolarmente al piano della figura è l'*asse istantaneo di rotazione.*

È da notare a questo punto, che se una figura invariabile, rimanendo sempre nel proprio piano, ruota intorno ad un punto qualunque di questo, tutte le rette a quella figura appartenenti, deviano ad un istante qualunque rispettivamente dello stesso angolo dalle direzioni che esse avevano al principio del tempo.

Pertanto come nel tempo dt la retta LM portandosi in L'M' ha deviato dell'angolo $d\theta$, la retta CM portandosi in CM' devierà pure di $d\theta$, così che l'incremento dell'angolo fatto da CM colla CD parallela all'asse delle x, cioè dell'angolo $\text{MCD} = \varphi + \mu$, essendo $d\varphi$, poichè μ è un angolo costante fatto da MC con MG mentre φ è l'angolo GCD che effettivamente varia, sarà $d\varphi = d\theta$.

Indicando ora con R il raggio CM del circolo sul quale si trovano i punti M ed M', se indicheremo con $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ l'accelerazione angolare del corpo all'istante t sarà:

$$\text{R}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

l'accelerazione lineare del punto M nella direzione MM'. Supposto poi che sia dm la massa della molecola M, la forza dalla quale questa è animata nella direzione ora detta, è:

$$\text{R}\frac{d^2\theta}{dt^2}\,dm$$

e il suo momento, rispetto all'asse di rotazione istantanea passante per C, sarà:

$$\text{R}^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\,dm\,.$$

La somma poi dei momenti delle forze da cui sono animate effettivamente tutte le molecole componenti il sistema, rispetto all'asse medesimo, essendo $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ comune a tutti i punti, sarà rappresentata da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\int \text{R}^2\,dm$$

dove l'integrale intendesi esteso a tutta la massa del corpo. Supposto che si possa in qualche modo calcolare una tale somma, basterà poi dividerla per $\int \text{R}^2\,dm$, per avere l'accelerazione angolare del sistema ruotante intorno all'asse istantaneo, cioè $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

Se un punto M (fig. 2) del corpo, di massa dm, essendo unito rigidamente all'asse istantaneo di rotazione passante per C, fosse *libero di muoversi nel proprio circolo indipendentemente da tutti gli altri punti*, applicando ad esso due determinate accelerazioni $\frac{d^2 y}{dt^2}$ e $\frac{d^2 x}{dt^2}$ parallelamente agli assi coordinati, il momento, relativo all'asse di rotazione, della forza (accelerazione moltiplicata per la massa) sollecitante il punto a muoversi sulla tangente al circolo suddetto, sarebbe (v. equazione (1)'):

$$(x - x'') \frac{d^2 y}{dt^2} dm - (y - y'') \frac{d^2 x}{dt^2} dm = \mathrm{R}^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} dm .$$

E ritenendo, nel caso dei punti slegati fra loro, MCD $= \vartheta$ sarebbe anche:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \mathrm{R} \cos \vartheta \, dm - \frac{d^2 x}{dt^2} \mathrm{R} \operatorname{sen} \vartheta \, dm = \mathrm{R}^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} dm .$$

Se accelerazioni lineari parallele agli assi coordinati ed *eguali* a quelle applicate in M si considerano anche applicate a tutti gli altri punti del sistema (supposti come M uniti rigidamente all'asse di rotazione, ma slegati fra loro) avremo i punti stessi sollecitati secondo le tangenti ai circoli rispettivi con momenti analoghi a quello del punto M. E la somma dei momenti, relativi al comune asse di rotazione, delle forze sollecitanti tutti i punti del sistema, considerati come slegati fra loro e legati rigidamente e individualmente all'asse di rotazione, sarebbe:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \int \mathrm{R} \cos \vartheta \, dm - \frac{d^2 x}{dt^2} \int \mathrm{R} \operatorname{sen} \vartheta \, dm = \int \mathrm{R}^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} dm .$$

Supponendo ora il *sistema rigido*, si viene con ciò a supporre chè le forze le quali vincolano i punti fra di loro, mantenendoli a distanza reciproca costante, non valgano a imprimere loro movimento di sorte alcuna, e a supporre che le forze applicate non abbiano alcun potere di cambiare la posizione relativa dei punti. Allora la somma dei momenti delle forze applicate deve equivalere per intero alla somma dei momenti delle forze effettive, cioè deve essere:

$$\int \mathrm{R}^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} dm = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \int \mathrm{R}^2 \, dm ;$$

e poichè nel caso del sistema rigido abbiamo $\vartheta = \varphi + \mu$, dove μ è un *angolo costante*, avremo la equazione:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \int \mathrm{R}^2 \, dm = \frac{d^2 y}{dt^2} \int \mathrm{R} \cos (\varphi + \mu) \, dm - \frac{d^2 x}{dt^2} \int \mathrm{R} \operatorname{sen} (\varphi + \mu) \, dm .$$

Ma ponendo GC $=$ S e indicando con m la massa intera del corpo, si ha, per ragione inerente alla definizione del centro di gravità:

$$\int \mathrm{R} \cos \mu \, dm = m\mathrm{S}$$
$$\int \mathrm{R} \operatorname{sen} \mu \, dm = 0 ,$$

e quindi sarà:

$$\int \mathrm{R} \cos (\varphi + \mu) \, dm = m\mathrm{S} \cos \varphi$$
$$\int \mathrm{R} \operatorname{sen} (\varphi + \mu) \, dm = m\mathrm{S} \operatorname{sen} \varphi .$$

Inoltre, indicando con i il raggio di girazione del sistema intorno ad asse passante per G parallelo a quelli passanti per L e per C, abbiamo:

$$\int \mathrm{R}^2 \, dm = m (i^2 + \mathrm{S}^2)$$

e pertanto sarà:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(i^2+S^2)=\frac{d^2y}{dt^2}\,S\cos\varphi-\frac{d^2x}{dt^2}\,S\,\mathrm{sen}\,\varphi\,. \qquad (c)$$

D'altra parte, considerando il triangolo CGL, se indichiamo con β l'angolo fatto da LL' coll'asse delle y, contato positivamente nel verso stesso di θ, e immaginiamo prolungata GL dalla parte di L, sarà l'angolo esterno in $L=\theta-\beta$, e pertanto, ponendo $GL=s$, $CL=\varrho$, avremo:

$$\left.\begin{aligned} S\cos\varphi &= s\cos\theta+\varrho\cos\beta \\ S\,\mathrm{sen}\,\varphi &= s\,\mathrm{sen}\,\theta+\varrho\,\mathrm{sen}\,\beta \\ S^2 &= s^2+\varrho^2+2\,s\varrho\cos(\theta-\beta) \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

e la *equazione differenziale pel moto di un corpo intorno ad asse mobile parallelamente a sè stesso* sarà:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\theta}{dt^2}(i^2+s^2+2\,s\varrho\cos(\theta-\beta)+\varrho^2)= \\ &=\frac{d^2y}{dt^2}(s\cos\theta+\varrho\cos\beta)-\frac{d^2x}{dt^2}(s\,\mathrm{sen}\,\theta+\varrho\,\mathrm{sen}\,\beta) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Questa equazione potrà servire a determinare θ in funzione di t mediante due successive integrazioni, qualora si conoscano le accelerazioni $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ delle forze agenti parallelamente agli assi x ed y, si conoscano le costanti i ed s e le quantità ϱ e β variabili in generale con θ e t.

Per applicare l'equazione (2) al moto del pendolo fisico bisogna supporre che l'asse di rotazione del sistema sia orizzontale e che sia ad esso parallelo l'asse passante per L perpendicolarmente al piano della figura: tale asse è il così detto *asse di sospensione* del pendolo. Devesi supporre inoltre che la direzione dell'asse delle x sia verticale e positiva verso il basso, che l'angolo θ, situato nel piano perpendicolare agli assi di rotazione e di sospensione, sia contato positivamente verso l'asse delle y, che sia $\theta=0$ quando il centro di gravità del corpo è nel piano verticale dell'asse di sospensione. Dicesi θ la *elongazione* del pendolo e il valor massimo α della elongazione in una determinata oscillazione dicesi *amplitudine* di quella oscillazione. L'accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2}$ è nel pendolo quasi rigorosamente costante ed eguale a g colla quale lettera suolsi indicare l'*accelerazione della gravità.* L'accelerazione $\frac{d^2y}{dt^2}$, pure nel pendolo, è sempre piccolissima quando non possa assumersi come affatto nulla.

Ritenendo esattamente

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0 \qquad (d)'$$

e ponendo

$$i^2+s^2=ls$$

la cercata *equazione differenziale del pendolo fisico* sarà:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\left(l+2\,\varrho\cos(\theta-\beta)+\frac{\varrho^2}{s}\right)=-\,g\,\mathrm{sen}\,\theta-g\,\frac{\varrho}{s}\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad (3)$$

dove l rappresenta la lunghezza del *pendolo matematico* equivalente al pendolo fisico nel caso in cui $\varrho=0$.

Per quanto riguarda ϱ e β bisogna distinguere due casi.

Il *primo caso* è quello in cui tali due quantità sono determinate dalle circostanze geometriche del corpo e del movimento e non dipendono minimamente dall' intervento di forze diverse da quelle alle quali è dovuto il moto del pendolo quando il suo asse di sospensione è immobile. In tale caso è d'uopo saper conoscere la natura della curva, o almeno le proiezioni dx', dy' del suo elemento d'arco $d\sigma$ sui due assi coordinati, descritta da un punto qualunque dell'asse di sospensione, poichè allora si hanno le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} dy' &= d\sigma \cos\beta = \varrho\, d\theta \cos\beta \\ dx' &= -d\sigma \operatorname{sen}\beta = -\varrho\, d\theta \operatorname{sen}\beta, \\ \text{dalle quali}\qquad \operatorname{tg}\beta &= -\frac{dx'}{dy'} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{dx'^2 + dy'^2}}{d\theta} = \frac{d\sigma}{d\theta}. \end{aligned}\right\} (e)$$

Il *secondo caso* è quello in cui ϱ e β dipendono soltanto dall' intervento di una o più forze diverse da quelle che determinano il moto del pendolo quando il suo asse di sospensione è fisso. Qualora ciò avvenga bisognerà cercare di conoscere le componenti $\frac{d^2 x'}{dt^2}$ e $\frac{d^2 y'}{dt^2}$ della accelerazione tangenziale $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ della forza al cui intervento è dovuto il moto dell'asse di sospensione, e allora per la determinazione di ϱ e β si hanno le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 y'}{dt^2} &= \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \cos\beta = \varrho \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos\beta \\ \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -\frac{d^2 \sigma}{dt^2} \operatorname{sen}\beta = -\varrho \frac{d^2 \theta}{dt^2} \operatorname{sen}\beta \\ \text{dalle quali}\qquad \operatorname{tg}\beta &= -\frac{d^2 x'}{dt^2} : \frac{d^2 y'}{dt^2} \\ \varrho &= \sqrt{\left(\frac{d^2 x'}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y'}{dt^2}\right)^2} : \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d^2 \sigma}{dt^2} : \frac{d^2 \theta}{dt^2}. \end{aligned}\right\} (e)$$

Ma in tale caso la equazione generale (2) si semplifica notevolmente. Infatti nel suo secondo membro, che, moltiplicato per m, rappresenta la somma dei momenti intorno all'asse istantaneo delle forze applicate ai singoli elementi dei quali il corpo è costituito, vediamo le due accelerazioni $\frac{d^2 y}{dt^2}$ e $\frac{d^2 x}{dt^2}$ operare al centro di gravità giacchè i loro bracci $s \cos\theta + \varrho \cos\beta$ ed $s \operatorname{sen}\theta + \varrho \operatorname{sen}\beta$ non sono altro che le coordinate di questo punto rispetto a un sistema avente la origine sull'asse istantaneo. Ma mentre nel primo caso le porzioni $\varrho \cos\beta$ e $\varrho \operatorname{sen}\beta$ di tali bracci dipendono, per condizioni geometriche determinate, dalle parti variabili $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ delle altre due porzioni $s \cos\theta$ ed $s \operatorname{sen}\theta$, così da formare con queste un tutto inscindibile, nel secondo caso invece $\varrho \cos\beta$ e $\varrho \operatorname{sen}\beta$, come quelli che dipendono da un'altra forza che può essere qualunque, sono affatto indipendenti da $s \cos\theta$ ed $s \operatorname{sen}\theta$, per cui il secondo membro della equazione (2) deve considerarsi composto di due parti, una

delle quali

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \varrho \cos \beta - \frac{d^2 x}{dt^2} \varrho \operatorname{sen} \beta ,$$

dipendente unicamente dall' intervento di una forza addizionale, non ha alcun legame necessario coll'altra parte che, moltiplicata per m, esprime la somma dei momenti delle forze applicate intorno all'asse di sospensione quando esso è anche asse di rotazione.

Nel primo membro della (2), moltiplicato per m, abbiamo la somma dei momenti intorno all'asse istantaneo delle forze effettive possedute dal sistema in conseguenza dell'azione simultanea delle forze applicate ai singoli punti parallelamente agli assi coordinati e della forza esteriore applicata all'asse di sospensione.

Cerchiamo di separare da questa somma quella porzione de ivante dall' intervento della forza esterna.

Consideriamo perciò che l'accelerazione effettiva $R \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ del punto M deve risultare dalla combinazione dell'accelerazione $r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$, che si avrebbe se all'asse di sospensione non agisse veruna forza esterna, colla accelerazione lineare $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ eguale in grandezza e direzione per tutti i punti del corpo e parallela alla direzione della forza applicata all'asse di sospensione. La parte che nella accelerazione $R \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ è dovuta all' intervento dell'accelerazione lineare $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ non è altro che la proiezione di $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ sulla direzione dell'accelerazione effettiva $R \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ (v. osservazione in seguito al lemma preliminare). E poichè $\varphi + \mu$ è l'angolo che R fa con x, e β è l'angolo che ϱ fa pure con x, l'angolo che la direzione di $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ fa colla direzione della $R \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ è $\varphi + \mu - \beta$. Pertanto quella parte del momento $R^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} dm$ che è dovuta all' intervento della forza esterna è:

$$R \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \cos (\varphi - \beta + \mu) \, dm .$$

La somma dei momenti simili estesa a tutta la massa del corpo risulta allora essere:

$$m \frac{d^2 \sigma}{dt^2} S \cos (\varphi - \beta)$$

e questa è la parte della somma dei momenti delle forze effettive che è dovuta all' intervento della forza esterna. Dovremo dunque avere:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} S \cos (\varphi - \beta) = \frac{d^2 y}{dt^2} \varrho \cos \beta - \frac{d^2 x}{dt^2} \varrho \operatorname{sen} \beta .$$

Ma poichè per le equazioni (d) è:

$$S \cos (\varphi - \beta) = s \cos (\theta - \beta) + \varrho$$

avremo:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} [s \cos (\theta - \beta) + \varrho] = \frac{d^2 y}{dt^2} \varrho \cos \beta - \frac{d^2 x}{dt^2} \varrho \operatorname{sen} \beta . \qquad (e)''$$

Questa equazione ci fa vedere quale relazione deve passare fra le accelerazioni $\frac{d^2 y}{dt^2}$ e $\frac{d^2 x}{dt^2}$ assunte effettivamente dal sistema parallelamente agli assi coordinati nel suo moto di rotazione intorno all'asse di sospensione quando non agisce veruna forza esterna cioè supposto in equilibrio, e l'accelerazione $\frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ della forza che bisogna applicare all'asse di sospensione, affinchè la rotazione istantanea avvenga, non già intorno ad esso, ma intorno ad asse a quello parallelo e situato in posizione determinata dagli elementi dati ϱ e β.

Avendo riguardo alla equazione $(e)''$ e ricordando che $\frac{d^2 \sigma}{dt^2} = \varrho \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ la equazione (2), nel caso che all'asse venga applicata una forza capace di trasportare l'asse istantaneo di rotazione in posizione determinata da ϱ e β, si riduce alla seguente:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2}\left(i^2 + s^2 + \varrho s \cos(\theta - \beta)\right) = \frac{d^2 y}{dt^2} s \cos\theta - \frac{d^2 x}{dt^2} s \operatorname{sen}\theta \qquad (2)_a$$

e la (3) a quest'altra:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2}\left(l + \varrho \cos(\theta - \beta)\right) = -g \operatorname{sen}\theta . \qquad (3)_a$$

Tale equazione può così interpretarsi. Allorquando all'asse di sospensione agisca nel piano di oscillazione una forza d'intensità e direzione tali da far ruotare istantaneamente il pendolo intorno ad un asse parallelo all'asse di sospensione e distante ϱ da esso, la lunghezza l del pendolo matematico, la quale corrisponde all'asse di sospensione fisso, è aumentata di una quantità $\varrho\cos(\theta-\beta)$, che è la proiezione sulla direzione di l della distanza ϱ intercetta fra l'asse istantaneo di rotazione e l'asse di sospensione [1].

[1] Nella dimostrazione data qui sopra della equazione (2) e seguenti ho introdotto, per maggiore chiarezza e precisione, qualche variante alla dimostrazione già da me pubblicata negli Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti, tomo V, serie 6ª (1887) nella Nota intitolata: *Sulla equazione differenziale del moto di un pendolo fisico, il cui asse di sospensione muovesi rimanendo parallelo a sè stesso;* non fermandomi ora ai confronti colle soluzioni di altri autori che in quella nota si leggono. Ivi infatti ho mostrato che la equazione (2) coincide con quella che risulta dall'applicare, come fa il Laplace, *il principio delle velocità virtuali combinato con quello di D'Alembert.* Ho inoltre dedotto le equazioni fondamentali di Bessel per la soluzione dei due problemi concernenti rispettivamente la cilindrità dei tagli dei coltelli e lo scorrimento del coltello sul piano di appoggio, partendo, come quell'autore, dal *principio della conservazione delle forze vive.* Ed in fine, ancora ad oggetto di confronto, ho esposto la dimostrazione delle equazioni differenziali secondo Poisson e secondo Peirce facendo vedere in tutti i casi come le varie soluzioni sostanzialmente concordino.

§ II. *Perturbazioni del moto del pendolo ed equazione differenziale del moto perturbato.*

Ponendo

$$\frac{g}{l}\,\frac{2\cos(\theta-\beta)+\frac{\varrho}{s}-\frac{l}{s}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta}}{1+2\frac{\varrho}{l}\cos(\theta-\beta)+\frac{\varrho^2}{ls}}=\mathrm{Q},$$

la equazione (3) può scriversi così:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta+\mathrm{Q}\frac{\varrho}{l}\operatorname{sen}\theta.$$

Il secondo termine del secondo membro, che è sempre una quantità molto piccola in confronto del primo (giacchè è supposto che β e θ vadano a zero insieme rimanendo sempre $\beta<\theta$ ed è supposto che sia ϱ piccola quantità di 1° ordine), può essere considerato come una perturbazione della accelerazione angolare teorica del pendolo fisico, rappresentata dal primo termine. Tale perturbazione sarebbe occasionata dal movimento del taglio del coltello, dovuto alla sua forma cilindrica, dalla elasticità del supporto e dalla insufficiente resistenza presentata dal piano di appoggio allo scorrimento del coltello sovrapposto.

Nel passare dalla equazione (2) alla (3) è supposto che $\frac{d^2x}{dt^2}$ sia l'accelerazione g dovuta soltanto all'azione della gravità terrestre. Ma poichè il pendolo fisico è immerso nell'aria esso è pure soggetto all'azione, diretta verticalmente da sotto in su, della spinta idrostatica dell'aria, e tale spinta dipendendo dalla densità dell'aria stessa è soggetta con questa densità a piccole variazioni irregolari. Un'altra piccola accelerazione estranea alla gravità può essere rappresentata dalla componente verticale dell'urto comunicato al pendolo da una corrente permanente di aria. Quanto all'accelerazione g devesi intendere ch'essa abbia il valore competente alle condizioni del luogo, cioè alla elevazione di questo sul livello del mare e alle sue coordinate sul geoide, e competente inoltre alla posizione scambievole che, nell'istante considerato, hanno il sole, la luna e la terra. Indichiamo con γ la somma delle piccolissime accelerazioni addizionali nella direzione verticale, e allora il valore da porsi nel primo termine del secondo membro della (3) in luogo di g è

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g+\gamma.$$

Nel secondo termine ciò non occorre di fare, poichè l'aggiunta di γ originerebbe un termine di secondo ordine, che vogliamo tralasciare. Il corrispondente termine in $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, che è da mettere pure nel conto delle perturbazioni del moto pendolare, sarà:

$$-\frac{\gamma}{l}\operatorname{sen}\theta.$$

Risalendo al significato del denominatore l (equazione $(d)'$) conviene osservare che la sua grandezza dipende dalla grandezza e dalla forma della massa oscillante. Siccome

nel movimento oscillatorio del corpo rigido, una parte dell'aria ambiente aderisce al corpo ed è tratta con esso in movimento, la massa che effettivamente si muove è alcun poco maggiore di quella del corpo. Inoltre la temperatura alla quale avviene il movimento può essere alquanto diversa dalla temperatura che si assume come normale e, pertanto, nel movimento effettivo, in luogo di l, che corrisponde alla sola massa del corpo rigido e a una temperatura normale determinata, si avrà a fare con altra lunghezza $l+\lambda$, intendendo che λ sia un piccolo incremento di 1° ordine, e il primo termine del 2° membro della (3), divenendo allora $-\frac{g}{l+\lambda}\operatorname{sen}\theta$, dovrà essere corretto della quantità di primo ordine:

$$+\frac{g}{l}\frac{\lambda}{l}\operatorname{sen}\theta .$$

I termini di primo ordine riceverebbero correzioni del 2° ordine e perciò, non tenendo conto di queste, rimangono inalterati.

Per istabilire la equazione (3) si è supposto che l'accelerazione orizzontale $\frac{d^2 y}{dt^2}$ della forza applicata parallelamente ad y sia nulla, mentre, in generale, può avere un piccolo valore che indicheremo con h, essendo h una piccola quantità del 1° ordine. Allora il termine in $\frac{d^2 y}{dt^2}$ della (2) che nella (3) sarebbe:

$$\frac{\cos\theta+\frac{\varrho}{s}\cos\beta}{l\left(1+2\frac{\varrho}{l}\cos(\theta-\beta)+\frac{\varrho^2}{ls}\right)}\,h ,$$

tralasciando i termini d'ordine superiore al primo, si riduce semplicemente ad

$$\frac{h}{l}\cos\theta .$$

Questa accelerazione orizzontale h può intendersi provenire, 1° dall'urto prodotto da una eventuale corrente permanente di aria, 2° dalle alterazioni periodiche della gravità dovute al sole ed alla luna, 3° dall'accelerazione orizzontale del filo del coltello ingenerata dal movimento del supporto, ecc.

L'*attrito* produce una resistenza, sia pure molto piccola, al rotolamento e allo strisciamento del taglio del coltello sul piano di appoggio del pendolo e si oppone quindi anche al movimento del pendolo. Perciò, mentre il pendolo è in movimento, una certa parte della quantità di moto ch'esso possede è, ad ogni istante, spesa nel vincere quella resistenza, la cui intensità è la stessa, tanto che la velocità sia grande quanto ch'essa sia piccola e il cui segno è sempre opposto al segno della velocità. La diminuzione della velocità prodotta ad ogni istante dalla resistenza di attrito divisa per l'elemento del tempo, dà luogo ad una piccola accelerazione c sensibilmente costante, la quale concorre a modificare il moto che il pendolo avrebbe se quella resistenza non esistesse.

Un'altra porzione della quantità di moto posseduta dal pendolo è spesa nel vincere la resistenza opposta al movimento del pendolo dall'aria ambiente, cioè nel comunicare alle molecole d'aria circostanti velocità più o meno grandi secondo che maggiore o minore è la velocità del pendolo. La variazione dell'accelerazione angolare del

pendolo è perciò una funzione della velocità angolare V del medesimo e potrà in generale rappresentarsi con $\varphi(\mathrm{V})$. L'attrito del coltello sul supporto e la resistenza del mezzo, agendo simultaneamente, alterano l'accelerazione angolare dei due termini:

$$\mp c \mp \varphi(\mathrm{V}),$$

che saranno da prendere col segno negativo se la velocità è positiva e viceversa.

Indicando con f la somma di tutti i piccoli termini di perturbazione successivamente enumerati, alla equazione (3) dovremo sostituire l'altra:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta + f \tag{4}$$

essendo

$$f = \left(\mathrm{Q}\frac{\varrho}{l} - \frac{\gamma}{l} + \frac{g}{l}\frac{\lambda}{l}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{h}{l}\cos\theta \mp \left(c + \varphi(\mathrm{V})\right). \tag{5}$$

La equazione (4) è la equazione differenziale del moto effettivo o perturbato del pendolo fisico. La quantità f rappresenta l'accelerazione dovuta all'azione simultanea delle cause perturbatrici: forma cilindrica del taglio del coltello, scorrimento del taglio del coltello sul piano di appoggio, movimento oscillatorio del supporto, spinta idrostatica del mezzo, adesione di una certa quantità d'aria al pendolo in moto, alterazione della gravità dovuta all'azione variabile del sole e della luna, aggiunta di piccole accelerazioni dovute a correnti permanenti d'aria, attrito del coltello sul piano di appoggio, resistenza dell'aria. Si suppone che la somma f costituisca una piccola quantità del primo ordine, la quale supposizione è confermata dall'esperienza.

§ III. *Moto non perturbato del pendolo.*

Riteniamo dapprima $f = 0$, cioè supponiamo che il pendolo oscilli nel vuoto sotto l'azione della sola gravità costante e che ogni punto del suo asse di sospensione, durante il movimento, rimanga fisso rispetto ai tre piani coordinati *orizzonte, meridiano* e *primo verticale.*

La equazione differenziale del moto del pendolo fisico è allora

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{6}$$

e coincide colla equazione differenziale del pendolo matematico lungo l, onde si può dire che il pendolo fisico si muoverà come questo pendolo matematico.

Posto ora

$$\frac{g}{l} = n^2 \tag{7}$$

avremo:

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\operatorname{sen}\theta, \tag{6'}$$

da cui, moltiplicando per $2d\theta$ ed integrando, si ha:

$$\frac{1}{2n^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \cos\theta + \mathrm{C}.$$

Crescendo la elongazione θ diminuisce la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$ e viene un istante in cui θ cessa di aumentare assumendo il massimo valore α e poi nuovamente diminuisce. Quando $\theta = \alpha$ è dunque $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ed abbiamo dall'ultima equazione:

$$0 = \cos\alpha + C$$

e pertanto:

$$\frac{1}{2n^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \cos\theta - \cos\alpha = 2\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{8}$$

Si vede da qui che $\frac{d\theta}{dt}$ è massima quando $\theta = 0$, cioè il pendolo passa per la verticale, e che per elongazioni eguali e di segno opposto assume il medesimo valore numerico.

Ponendo ora

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} &= k \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} &= k \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

si ottiene

$$\frac{1}{n}\frac{d\theta}{dt} = 2k\cos\varphi \tag{8)'$$

nella quale, immaginando che φ cresca continuamente col tempo, si vede che θ e $\frac{d\theta}{dt}$ sono da esso determinati in grandezza e segno. Infatti:

φ	θ	$\frac{d\theta}{dt}$	
0	0	massimo positivo	
fra 0 e $\frac{\pi}{2}$	positivo crescente	positivo decrescente	prima oscillazione
$\frac{\pi}{2}$	$+\alpha =$ massimo positivo	0	prima oscillazione
fra $\frac{\pi}{2}$ e π	positivo decrescente	negativo crescente	prima oscillazione
π	0	massimo negativo	
fra π e $\frac{3}{2}\pi$	negativo crescente	negativo decrescente	seconda oscillazione
$3\frac{\pi}{2}$	$-\alpha =$ massimo negativo	0	seconda oscillazione
fra $3\frac{\pi}{2}$ e 2π	negativo decrescente	positivo crescente	seconda oscillazione
2π	0	massimo positivo	
fra 2π e $5\frac{\pi}{2}$	positivo crescente	positivo decrescente	
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	

Dalla seconda delle equazioni (9) si ha colla differenziazione:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2k \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

ed eliminando $d\theta$ fra questa e la (8)'

$$n\, dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

da cui

$$n(t - \tau) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \tag{10}$$

e qui s' intende che τ sia il valore che prende t quando $\varphi = 0$. Collo sviluppo in serie si ottiene:

$$n(t - \tau) = L\varphi - M \operatorname{sen} 2\varphi + N \operatorname{sen} 4\varphi - \ldots \tag{11}$$

dove

$$L = 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{24} k^4 + \ldots$$
$$M = \quad \frac{1}{8} k^2 + \frac{3}{32} k^4 + \ldots$$
$$N = \quad \frac{3}{256} k^4 + \ldots$$

. . . .

Fino ai termini del quarto ordine inclusivi essendo, (per la prima delle (9)):

$$k = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}$$
$$k^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{48}$$
$$k^4 = \frac{\alpha^4}{16}$$

avremo colla stessa approssimazione:

$$\left.\begin{aligned} L &= 1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11}{3072} \alpha^4 \\ M &= \quad \frac{\alpha^2}{32} + \frac{3}{512} \alpha^4 \\ N &= \quad \frac{3}{1024} \alpha^4 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

L'equazione (11) serve a calcolare l'angolo φ per un tempo qualunque t qualora sieno dati, oltre n, anche α e τ. Ottenuto φ si ha θ dalla seconda delle (9). Viceversa: dato θ, la seconda delle equazioni (9) dà φ, dopo di che la (11) fornisce t sempre essendo dati i valori di n, α e τ.

Fra due successivi passaggi del pendolo per la verticale, cioè nel tempo T di una oscillazione, l'angolo φ passa dal valore $m\pi$ al valore $(m+1)\pi$, quindi al principio ed alla fine di una oscillazione qualunque *emmesima*, abbiamo le due equazioni:

$$n(t - \tau) = mL\pi$$
$$n(t + T - \tau) = (m + 1) L\pi$$

dalle quali:

$$T = \frac{\pi}{n} L = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11}{3072} \alpha^4\right). \tag{13}$$

Supposto α espresso in minuti primi, detto R_1 il numero dei minuti primi contenuti nel raggio e posto

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = T_0$$

abbiamo:

$$T = T_0 + \frac{T_0}{16 R_1^2} \alpha^2 + \frac{11 T_0}{3072 R_1^4} \alpha^4 \tag{13'}$$

che è l'espressione della durata di una oscillazione di amplitudine α del *pendolo semplice circolare* lungo l, ovvero del pendolo fisico di massa m, il cui centro di gravità distando s dall'asse di sospensione, ha per momento d'inerzia il prodotto

$$m s l.$$

È T_0 la durata dell'oscillazione di amplitudine infinitamente piccola: suolsi dire *la durata di oscillazione ridotta all'arco infinitesimo.*

§ IV. *Pendolo cicloidale.*

Supposto che θ si mantenga sempre abbastanza piccolo affinchè le sue potenze superiori alla seconda nella espressione di sen θ sieno trascurabili, la equazione (6)' è sostituita dalla seguente:

$$\frac{1}{n^2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\theta \tag{14}$$

e l'integrale primo di questa è:

$$\frac{1}{n^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha^2 - \theta^2$$

che tiene il luogo della (8), e può anche dedursi da quella ponendo $\text{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ e $\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$.

Dalla equazione or ora scritta si ha

$$n\, dt = \frac{d\theta}{\alpha \sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\alpha^2}}};$$

e da questa, con un'altra integrazione

$$n(t - \tau) = \text{arco sen} \frac{\theta}{\alpha}.$$

Pertanto si ha:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \alpha \ \text{sen} \left[n(t-\tau)\right] = \text{elongazione} \\ \frac{d\theta}{dt} &= n\alpha \ \cos \left[n(t-\tau)\right] = V = \text{velocità angolare} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -n^2\alpha \ \text{sen} \left[n(t-\tau)\right] = A = \text{accelerazione angolare}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

le quali *espressioni* sono *esatte fino ai termini di secondo ordine inclusivi in* α.

Quanto a T, *tempo di una oscillazione*, esso risulta *esatto fino inclusivamente ai termini di 1º ordine in* α, così espresso

$$T = T_0 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \tag{16}$$

Le formole (15) e (16) sono quelle che valgono per il *pendolo matematico cicloidale* e pertanto si può concludere che, se il pendolo fisico circolare e il pendolo matematico cicloidale partono simultaneamente dalla verticale verso la stessa parte e oscillano entro limiti eguali di elongazione, a un tempo qualunque t le differenze fra le rispettive elongazioni, velocità ed accelerazioni angolari sono del terzo ordine in α e la differenza fra le rispettive durate di oscillazione è del secondo ordine in α.

Siccome la durata dell'oscillazione nel pendolo cicloidale è indipendente dall'amplitudine, la correzione per l'amplitudine $-\frac{T}{16 R_1^2}\alpha^2$ che si applica al tempo di oscillazione del pendolo circolare e che suolsi dire *riduzione all'arco infinitesimo*, può forse con eguale ragione dirsi anche *riduzione al pendolo cicloidale.*

§ V. *Pendolo ad assi reciproci.*

Nel piano determinato dall'asse di sospensione e dal baricentro del pendolo, la retta parallela all'asse di sospensione distante l da questo ed $l - s$ dal baricentro dicesi *asse di oscillazione del pendolo.*

Dall'ultima delle equazioni $(d)'$ avendosi:

$$l = s + \frac{i^2}{s} \tag{17}$$

si vede intanto che il baricentro cade sempre fra i due assi di sospensione e di oscillazione.

Se si fa oscillare il pendolo fisico intorno all'asse di oscillazione, il pendolo semplice equivalente avrà la lunghezza:

$$l' = l - s + \frac{i^2}{l - s}$$

giacchè i^2 è una quantità che rimane la stessa in ambidue i casi ed s va sostituito con $l - s$. Ma per la (17)

$$l - s = \frac{i^2}{s}$$

ed

$$\frac{i^2}{l - s} = s$$

e pertanto è

$$l' = l \tag{18}$$

cioè quell'asse che prima era di sospensione diventa ora asse di oscillazione e la durata dell'oscillazione intorno a ciascun asse è la medesima. Si dice che *l'asse di sospensione* e *l'asse di oscillazione sono reciproci.*

Per converso, se in un corpo sieno infilati due assi fra loro paralleli, in modo che il piano in cui si trovano comprenda il baricentro, e se i temp' delle oscillazioni intorno

ad ambidue quegli assi sieno eguali, gli assi sono reciproci e la lunghezza del pendolo semplice equivalente è eguale alla reciproca distanza dei due assi.

Di qui apparisce la possibilità di determinare la lunghezza del pendolo semplice che compie le sue oscillazioni sincronicamente con quelle di un pendolo fisico, qualora si possa misurare la distanza degli assi reciproci di questo.

Il Bohnenberger propone nella sua *Astronomie* la costruzione di *un pendolo fisico ad assi reciproci* colle seguenti parole: [1]

« Ad un'asta cilindrica o prismatica CA (fig. 3, tav. I) sieno in C e in *c* applicati due perni in forma di cuneo, i cui tagli sieno rivolti l'uno contro l'altro in direzione perpendicolare all'asta e paralleli fra loro. Uno di essi si trovi all'estremo C dell'asta, l'altro in *c* distante da C per circa $\frac{2}{3}$ della lunghezza dell'asta, così che il centro *o* di oscillazione intorno a C cada fra C e *c*. Sulla parte rimanente *c*A dell'asta si può far scorrere un piccolo peso *m*. Ora, colla diminuzione della massa dell'asta da una e dall'altra parte, si può facilmente far così che quando questo pendolo viene appeso sul coltello C, un filo a piombo discendente da C vada a cadere su *c*: allora il baricentro viene a trovarsi nel piano degli assi. Col fare poi scorrere il peso *m* si può inoltre fare in modo che il centro di oscillazione intorno a C vada a cadere in *c*, ciò che si riconosce quando le oscillazioni intorno a C e *c* sieno isocrone. Allora la distanza dei due tagli è eguale alla lunghezza del pendolo semplice, le cui oscillazioni sono di eguale durata di quelle del pendolo fisico ».

§ VI. *Influenza della forma cilindrica del taglio del coltello sulla durata di una oscillazione.*

La prima difficoltà che si presenta nell'uso di un pendolo destinato ad oscillare intorno al taglio di un coltello è quella che proviene dal non avere il taglio stesso esattamente la forma di spigolo rettilineo. Si deve ritenere che, malgrado tutta la diligenza usata nella costruzione, il taglio del coltello riesca terminato in una superficie cilindrica, le cui generatrici sieno parallele allo spigolo rettilineo ideale determinato dalla intersezione delle due faccie piane laterali del coltello e la cui sezione retta abbia un raggio di curvatura brevissimo nella direzione della bisettrice dell'angolo formato dalle predette due faccie.

L'influenza della forma cilindrica del taglio del coltello sulla durata di oscillazione nel pendolo di Borda è stata studiata, sembra per la prima volta, dal Laplace nella Memoria da lui letta all'Accademia delle Scienze di Parigi il 28 ottobre 1816 e inserita nella « Connaissance des tems » per l'anno 1820 (Parigi, 1818) da pag. 265 a pag. 280, col titolo; *Sur la longueur du pendule à secondes.*

E della influenza stessa sul pendolo ad assi reciproci il medesimo autore tratta in una breve appendice alla Memoria ora citata inserita nella stessa « Connaissance » del 1820 a pag. 441. La conclusione alla quale egli perviene è questa; che qualora i coltelli sieno disposti in guisa che la durata della oscillazione sia esattamente la stessa, così quando il pendolo oscilla sopra uno come quando oscilla sopra l'altro coltello,

[1] *Astronomie,* von J. G. F. Bohnenberger. Tübingen, 1811, pag. 448.

la lunghezza del pendolo semplice equivalente è la minima distanza delle superficie cilindriche dei coltelli. In altre parole, la cilindrità dei tagli dei coltelli, supposti eguali i raggi dei cilindri, non ha influenza sulla durata dell'oscillazione [1].

Anche il Poisson si occupò della questione nel § II di una sua Memoria, *Sur le pendule de Borda*, da lui stampata nelle « Additions » alla « Connaissance des temps pour l'an 1833 » (Paris, 1830) da pag. 41 a pag. 76, venendo per via alquanto diversa alle stesse conclusioni di Laplace.

Ma prima del Poisson il Bessel nelle sue celebri *Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels* [2] trattò esso pure il problema dedicandovi la intera IX *Beilage* intitolata: *Einfluss der cylindrischen Figur der Schneide, worauf ein Pendel sich bewegt, auf die Schwingungszeit*, supponendo che la sezione retta del cilindro sia, in generale, una linea del secondo ordine.

Partendo dalle supposizioni stesse del Bessel tratteremo la questione come un'applicazione dell'equazione (3).

Per rendere evidenti le circostanze del movimento del coltello, immaginiamolo tagliato con un piano perpendicolare allo spigolo ideale supposto orizzontale e nella figura 4 (Tav. I) rappresentiamo colle rette ad, mn le sezioni delle faccie piane laterali e colla curva dem la sezione della superficie cilindrica mentre il pendolo è verticale. Supponiamo che in d ed in m le rette ad ed mn sieno tangenti alla curva dem: il punto e di contatto di detta curva colla orizzontale determina allora la posizione dell'*asse di sospensione*. Supponiamo ancora la figura simmetrica rispetto alla verticale di e e indichiamo con i l'angolo formato dalle rette ad ed mn colla verticale. Mentre il pendolo devìa dalla verticale, la curva dem rotola senza strisciare sulla orizzontale, cioè vengono successivamente a contatto colla orizzontale nuovi punti k della curva, e il punto e frattanto elevandosi descrive una nuova curva ee', la quale non è altro che la *evoluta* della em, giacchè ad ogni istante la distanza ke del punto di contatto k dal punto e è l'arco rettificato della porzione ke' della evolvente.

Coordinate correnti della evoluta sono le x' ed y' cioè le coordinate del punto L (fig. 2) considerato come mobile. Se ora s'indicano con ξ' ed η' le coordinate correnti della curva evolvente di equazione

$$f(\xi', \eta') = 0$$

nel sistema di assi $e'\xi$ ed $e'\eta$ fissi nel pendolo e, in conseguenza, mobili con esso, sarà possibile, volendo, di avere anche la equazione della evoluta quando nella $f = 0$ s'introducano le espressioni di ξ' ed η' in funzione di x' ed y'. Le relazioni fra queste e quelle coordinate, ove si ponga mente alla circostanza che le ξ' ed x' sono contate

[1] Una dimostrazione della proposizione medesima leggesi nella *Dinamica di Whewell* (v. Lubbock a pag. 201 delle Philos. Trans. 1830 I) e nella *Meccanica* del Pratt (2ª edizione pag. 406, 407). — Altra dimostrazione è alle pagine [232] [233] del vol. V delle Operazioni indiane.

[2] Questa Memoria, stampata la prima volta nelle « Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1826, mathem. Classe, p. 1, è ristampata integralmente nel 3° volume delle Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel, herausgegeben von Rudolf Engelmann, in drei Bänden. Leipzig, 1875-76, da pag. 139 a pag. 209.

positivamente verso il basso, le η' sono contate positivamente verso dritta e le y' verso sinistra, sono evidenti:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\xi'\cos\theta - \eta'\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -\xi'\operatorname{sen}\theta + \eta'\cos\theta - \sigma \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Differenziandole si ottiene:

$$\begin{aligned} dx' &= \ \ (\xi'\operatorname{sen}\theta - \eta'\cos\theta)\,d\theta - \cos\theta\,d\xi' - \operatorname{sen}\theta\,d\eta' \\ dy' &= -(\xi'\cos\theta + \eta'\operatorname{sen}\theta)\,d\theta - \operatorname{sen}\theta\,d\xi' + \cos\theta\,d\eta' - d\sigma\,. \end{aligned}$$

E siccome per condizione geometrica

$$\left.\begin{aligned} d\xi' &= -d\sigma\operatorname{sen}\theta \\ d\eta' &= \ \ d\sigma\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

coll'aiuto delle (f) si ha:

$$\begin{aligned} dx' &= -(y' + \sigma)\,d\theta \\ dy' &= x'd\theta\ , \end{aligned}$$

e pertanto, avuto riguardo alle (e) (pag. 14), si avrà:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\operatorname{sen}\beta &= y' + \sigma = -\xi'\operatorname{sen}\theta + \eta'\cos\theta \\ \varrho\cos\beta &= x' \qquad\ = -\xi'\cos\theta - \eta'\operatorname{sen}\theta \\ \varrho^2 &= x'^2 + (y'+\sigma)^2 = \xi'^2 + \eta'^2 \\ \varrho\cos(\theta - \beta) &= -\xi'\ . \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

La equazione (3) prende allora la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\left(l - 2\xi' + \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{s}\right) = -g\left(1 - \frac{\xi'}{s}\right)\operatorname{sen}\theta - g\frac{\eta'}{s}\cos\theta$$

dove l rappresenta, nel caso del pendolo ad assi reciproci, la distanza minima dei tagli dei coltelli. Tenendo conto soltanto dei termini di primo ordine in ξ' ed η' abbiamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left[1 + \frac{2s - l}{l\,s}\xi'\right]\operatorname{sen}\theta - \frac{g}{l}\frac{\eta'}{s}\cos\theta \qquad (20)$$

qualunque sia la natura della curva sezione retta della superficie cilindrica, purchè d'ordine pari in η', cioè simmetrica rispetto all'asse delle ξ'.

Suppongasi ora che detta curva sia una sezione conica con uno dei suoi vertici in e e successivamente in e', ed abbia l'asse nel piano che comprende il taglio del coltello e il centro di gravità del pendolo. L'equazione di tale curva riferita al vertice ed all'asse di simmetria nel sistema di assi ξ' ed η' sopra considerati è:

$$\eta'^2 + 2p\xi' + \frac{p}{a}\xi'^2 = 0\,. \qquad (21)$$

Questa equazione, nella quale p è il *parametro* propriamente detto, rappresenta in particolare una *ellisse*, una *parabola* od una *iperbola*, secondo che rispettivamente è a *positivo*, *infinito* o *negativo*.

Dalle equazioni (g) avendosi

$$\frac{d\eta'}{d\xi'} = -\operatorname{cotg}\theta$$

e dalla equazione (21)

$$\frac{d\eta'}{d\xi'} = -\frac{p}{\eta'}\left(1 + \frac{\xi'}{a}\right)$$

sarà

$$\eta'\operatorname{cotg}\theta = p\left(1 + \frac{\xi'}{a}\right);$$

Fra questa e la equazione della curva eliminando ξ' ricavasi η'; e col valore di η' che se ne ottiene si calcola con quest'ultima equazione stessa il valore di ξ'. Si ha:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= p \operatorname{tg}\theta \left(1+\frac{p}{a}\operatorname{tg}^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \xi' &= a\left[\left(1+\frac{p}{a}\operatorname{tg}^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right]. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

E con approssimazione limitata ai termini di *secondo ordine* inclusivi in sen θ

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= p \operatorname{sen}\theta \\ \xi' &= -\frac{p}{2}\operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned}\right\} \quad (22)'$$

Sostituendo questi valori nella (20) abbiamo prima:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(1-\frac{2s-l}{ls}\frac{p}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{g}{l}\frac{p}{s}\operatorname{sen}\theta\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

e quindi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(1+\frac{p}{s}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{g}{l}\frac{p}{l}\operatorname{sen}^3\theta. \quad (23)$$

Pertanto, fino inclusivamente ai termini in $\operatorname{sen}^2\theta$, abbiamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g \operatorname{sen}\theta}{l-\frac{p}{s}l} \quad (23)'$$

e così la lunghezza del pendolo semplice equivalente, che sarebbe l nel caso di coltello terminato in uno spigolo geometrico, nel caso in cui il coltello termini in superficie cilindrica del 2° ordine è

$$l-\frac{p}{s}l.$$

Questo risultato facilmente dimostrasi coincidente con quello ottenuto da Bessel. S'indichi infatti con b la retta $m\,d$ (fig. 4), e quando il punto m pel rotolamento del coltello sarà arrivato sull'asse negativo delle y, avremo $\eta' = \frac{b}{2}$, $\theta = 90^\circ - i$ e dalla prima delle equazioni (22) risulterà:

$$p = \frac{b}{2}\operatorname{tg} i\left(1+\frac{p}{a}\operatorname{cotg}^2 i\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Se nel secondo membro di questa equazione si ponga $1-e^2$ in luogo di $\frac{p}{a}$, e ciò che moltiplica b s'indichi con q, avremo come Bessel:

$$q = \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2 i}}{2\cos i}$$

e quindi il termine $\frac{p}{s}l$ della equazione (23)' non è altro che il termine $\frac{l}{s}b\,q$ di Bessel.

Per indicare in fine le conseguenze relative al *pendolo convertibile*, piacemi riferire le parole stesse da questo autore adoperate alla fine del § 25 delle sue *Untersuchungen* già citate.

« È stato affermato che l'influenza della cilindrità dei coltelli rimanga eliminata dal risultato delle osservazioni fatte con un pendolo della invenzione di Bohnenberger; ma questa molto elegante proprietà di tale apparecchio ha luogo soltanto quando i due coltelli sieno terminati da cilindri eguali. Non supponendo questo, e supponendo eguali i tempi di oscillazione osservati intorno ai due coltelli, si ha per uno di essi:

$$l' = l - \frac{l}{s} b\, q \qquad l = \frac{i^2 + s^2}{s}$$

e per l'altro

$$l' = l_1 - \frac{l_1}{s_1} b_1\, q_1 \qquad l_1 = \frac{i^2 + s_1^2}{s_1},$$

ed eliminando fra queste quattro equazioni l, l_1, i^2 abbiamo: [1]

$$l' = s + s_1 - \frac{s + s_1}{s - s_1} (b\, q - b_1\, q_1).$$

Quindi la lunghezza del pendolo semplice oscillante nel tempo medesimo osservato è eguale alla distanza dei vertici dei coltelli cilindrici, allora soltanto che $b\, q$ e $b_1\, q_1$ sieno eguali. Vi è però un facile mezzo per eliminare interamente l'influenza della cilindrità e ciò costruendo il pendolo in modo che i coltelli possano venire reciprocamente scambiati e facendo le esperienze tanto prima quanto dopo lo scambio. Con ciò l'errore di eguale grandezza nei due casi assume segno opposto e il medio dei risultati ne è libero ».

§ VII. *Movimento del coltello dipendentemente dalla elasticità del supporto e dalla insufficiente resistenza allo scorrimento presentata dal piano di appoggio e sua influenza sulla durata di una oscillazione.*

Prima di trattare un tale argomento ci è d'uopo ricercare quali sieno le componenti verticale ed orizzontale della pressione variabile esercitata sul suo supporto dal pendolo *in moto*.

Se al corpo in riposo venisse tolto il sostegno, tutti i suoi punti, e quindi anche il centro di gravità A (fig. 5), discenderebbero verticalmente di moto progressivo comune dovuto all'azione della gravità, e, per distruggere un tale effetto, basterebbe applicare verticalmente di sotto in su ad ogni elemento di massa dm, considerato come slegato da tutti gli altri, la forza $g dm$: oppure, in virtù della rigidezza del corpo, basterebbe applicare nel punto A la forza mg, essendo m la intera massa del corpo ed mg il suo peso.

Lo stesso effetto si otterrebbe facendo appoggiare il pendolo, mediante un asse

[1] Rigorosamente la risultante dalla eliminazione sarebbe:

$$l' = \frac{s + s_1}{1 + \frac{1}{s - s_1}\left(\frac{b q}{1 - \frac{b q}{s}} - \frac{b_1 q_1}{1 - \frac{b_1 q_1}{s_1}}\right)};$$

ma, tenendo conto soltanto dei piccoli termini di 1° ordine, si passa facilmente da questa alla equazione del testo. (Lor.).

passante per A e perpendicolare al piano di oscillazione, sopra un sostegno la cui *resistenza fosse almeno tale* da impedire alla forza verticale mg, di ottenere il suo effetto: il sostegno sopporterebbe allora verticalmente la *pressione* mg, che potremo dire pressione statica, e tale pressione non si altererebbe nemmeno se, rimanendo quell'asse perpendicolare al piano di oscillazione, il corpo ruotasse intorno ad esso, giacchè riteniamo che il piano di oscillazione sia anche piano di simmetria della massa del pendolo.

Se però l'asse mediante il quale il pendolo appoggia non contenga il centro di gravità, ma passi per B alla distanza BA ancora perpendicolarmente al piano di oscillazione, in modo che il piano determinato dal centro di gravità e dall'asse di sospensione (altro piano di simmetria) devii dal piano verticale, il pendolo, benchè appoggiato, non può rimanere in equilibrio; ma deve ruotare intorno a quell'asse, e allora non basta più che il supporto presenti nel senso verticale la resistenza mg, ma deve presentare anche resistenze almeno eguali ed opposte alle pressioni che si esercitano sulla linea di appoggio pel fatto del moto e che potremo dire *dinamiche*. Si tratta ora di determinare tali pressioni.

Ad un istante qualunque il centro di gravità del pendolo si muove nella direzione della tangente al circolo da esso descritto intorno all'asse di sospensione e, quando nessun'altra forza agente o resistente operasse nè direttamente applicata ad esso nè a verun altro punto del sistema, all'infuori di quella che lo anima in quell'istante al movimento, per *legge d'inerzia*; 1° tutti i punti del sistema dovrebbero muoversi in direzioni parallele al moto del centro di gravità e con accelerazioni eguali; 2° nell'istante successivo il centro di gravità dovrebbe seguire la direzione del moto dell'istante precedente.

In realtà la cosa avviene in modo diverso.

In *primo luogo* mentre in quell'istante l'accelerazione posseduta dal centro di gravità ha un certo valore, tutti i punti che non distanno com'esso dall'asse di sospensione possedono accelerazioni differenti e quelli situati sull'asse di sospensione hanno anzi accelerazione nulla. Siccome questo fatto è dovuto alla presenza del supporto, dobbiamo ritenere che la reazione di questo equivalga alla introduzione di una forza capace di modificare nel modo ora detto le accelerazioni, che altrimenti sarebbero fra loro eguali, di tutti i punti del corpo, ovvero di convertire un moto di rotazione intorno ad asse situato a distanza infinita nel piano del centro di gravità e dell'asse di sospensione (accelerazioni eguali e parallele) in un moto rotatorio intorno all'asse di sospensione. Si potrà sapere quale è questa reazione del supporto calcolando viceversa colla equazione $(e)''$ la forza $m\frac{d^2\sigma}{dt^2} = T$ che occorrerebbe applicare all'asse di sospensione affine di riportare l'asse di rotazione istantanea parallelamente a sè stesso dalla sua posizione in coincidenza coll'asse di sospensione, a distanza infinita nel piano del centro di gravità e dell'asse di sospensione. Tale forza esercitata effettivamente dal pendolo sul supporto è equilibrata dalla reazione di questo e si tramuta in pressione diretta ad ogni istante parallelamente all'accelerazione che sollecita il centro di gravità tangenzialmente al circolo da esso descritto, cioè perpendicolarmente al piano

determinato dal centro di gravità e dall'asse di sospensione. Ponendo pertanto nella (e'') divisa per ϱ, $m\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\mathrm{T}, \beta=\theta$ e $\varrho=\infty$ abbiamo:

$$\mathrm{T}=m\frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta-m\frac{d^2x}{dt^2}\operatorname{sen}\theta. \qquad (h)$$

In *secondo luogo* osserviamo che, nell'istante successivo, il centro di gravità devia dalla tangente per conservarsi sul cerchio. Ciò vuol dire che una forza centripeta equivalente alla reazione del supporto, agisce all'asse di sospensione ed obliga il centro di gravità a deviare lateralmente ottenendo lo stesso effetto come se tutto il sistema ruotasse istantaneamente intorno ad asse parallelo all'asse di sospensione e situato a distanza infinita in posizione determinata da

$$\varphi=90^\circ+\theta \qquad \text{ed} \qquad \mathrm{S}=\infty.$$

Per determinare la forza capace di equilibrare l'accelerazione centripeta del sistema, o, in altre parole, per determinare la corrispondente accelerazione centrifuga dovuta alla reazione dell'inerzia basterà calcolare la forza C capace di trasportare parallelamente a sè stesso l'asse istantaneo di rotazione dalla sua posizione di coincidenza coll'asse di sospensione alla sua posizione determinata da

$$\beta=90^\circ-\theta \qquad \text{e} \qquad \varrho=\infty.$$

Ponendo nella $(e)''$ divisa per ϱ, $m\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\mathrm{C}$ si ha:

$$\mathrm{C}=m\frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sen}\theta+m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta. \qquad (k)$$

Le forze T e C, dirette secondo BD e BA (fig. 5) fanno rispettivamente colla verticale gli angoli $\theta+90^\circ$ e θ, e colla direzione orizzontale positiva gli angoli θ e $\theta-90^\circ$. Pertanto la somma delle loro proiezioni verticali, o *la pressione verticale dovuta solamente al moto* sarà:

$$-\mathrm{T}\operatorname{sen}\theta+\mathrm{C}\cos\theta=m\frac{d^2x}{dt^2}:$$

e *la pressione verticale totale* (cioè compresa anche la pressione statica mg) sarà:

$$m\left(g+\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Poi la somma delle proiezioni orizzontali, cioè *la pressione orizzontale dovuta al moto*, che è sola, sarà:

$$\mathrm{T}\cos\theta+\mathrm{C}\operatorname{sen}\theta=m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Si deve qui intendere che $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ sono accelerazioni effettive cioè quali risultano dal moto reale. Perciò essendo:

$$x=s\cos\theta \quad ; \quad y=s\operatorname{sen}\theta$$

avremo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-s\operatorname{sen}\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-s\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\quad s\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-s\operatorname{sen}\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

e, in conseguenza,

$$\left.\begin{aligned}\text{pressione verticale} &= m\left\{g - s\frac{d^2\theta}{dt^2}\operatorname{sen}\theta - s\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos\theta\right\}\\ \text{pressione orizzontale} &= m\,s\left\{\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\operatorname{sen}\theta\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

Pel moto del pendolo intorno ad asse di sospensione fisso, abbiamo, prescindendo da tutte le cause perturbatrici,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$$

e, con esattezza spinta ai termini di 3° ordine inclusive in *sen* α e *sen* θ;

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta).$$

Avremo pertanto:

$$\text{press. vert. tot.} = m\,g\left\{1 + \frac{s}{l}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{s}{l}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta)\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right)\right\}$$

e prossimamente:

$$\text{pressione verticale totale} = m\,g\left(1 - \frac{s}{l}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{2\,s}{l}\operatorname{sen}^2\theta\right)\qquad(26)$$

cioè la *pressione verticale* è *costante* ed *eguale al peso del pendolo se si limita la esattezza alle prime potenze del seno della elongazione* e, tenendo conto anche del quadrato del seno della elongazione, essa varia fra i limiti

$$m\,g\left(1 - \frac{s}{l}\operatorname{sen}^2\alpha\right)\qquad\text{ed}\qquad m\,g\left(1 + \frac{s}{l}\operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

corrispondenti rispettivamente a $\theta = 0$ e $\theta = \pm\alpha$.

Quanto alla pressione orizzontale, dalla seconda delle (25) con analoghe sostituzioni, abbiamo:

$$\text{pressione orizz.} = m\,g\frac{s}{l}\left\{-\operatorname{sen}\theta\cos\theta - (\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta\right\}$$

ovvero:

$$\text{pressione orizz.} = -m\,g\frac{s}{l}\operatorname{sen}\theta - m\,g\frac{s}{l}\left(\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}^3\theta\right)$$

e *fino ai termini di secondo ordine inclusive in sen* θ

$$\text{pressione orizzontale} = -m\,g\frac{s}{l}\operatorname{sen}\theta,\qquad(27)$$

e tale pressione sarebbe interamente distrutta qualora il supporto fosse assolutamente rigido e il piano di appoggio del coltello presentasse sufficiente resistenza per impedire qualunque scorrimento del coltello sul piano.

Se il supporto non è assolutamente rigido, ma per la sua elasticità possa parzialmente obbedire alla forza che lo preme, la linea di contatto, cioè l'asse orizzontale passante per B, si metterà in movimento con accelerazione proporzionale alla pressione esercitata dal pendolo, e parallela all'accelerazione posseduta dal centro di gravità. Anche allora quando la resistenza allo scorrimento presentata dal piano di

appoggio non sia sufficiente, l'asse di sospensione si metterà in movimento, sebbene, per questa parte, non insieme col supporto.

Sia χ il coefficiente pel quale si deve moltiplicare la pressione orizzontale (27) onde avere la corrispondente accelerazione orizzontale dell'asse di sospensione: sarà il valore di χ dipendente dalla elasticità della materia di cui è fatto il supporto e dal grado di levigatezza del piano di appoggio. Ed avremo:

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = \chi\, m\, g \frac{s}{l} \operatorname{sen} \theta \,. \qquad (m)$$

A rigore l'asse di sospensione assume anche un'accelerazione verticale $\frac{d^2 x'}{d t^2}$ prossimamente proporzionale a quella parte della pressione verticale che è dovuta al movimento, ma poichè tale pressione è una piccola quantità del secondo ordine (26) (mentre la pressione orizzontale è del primo ordine) non occorre tenerne conto. Assumeremo dunque

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = 0$$

e quindi:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2} \,.$$

Ponendo nella (m) $\operatorname{sen} \theta = \theta$, e $\frac{g}{l} = n^2$, indi sostituendo a θ il suo valore dato dalla prima delle (15) e ponendo anche:

$$\chi\, m\, s\, \alpha = \varepsilon, \qquad (n)$$

abbiamo:

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2} = - n^2 \varepsilon \operatorname{sen} [n (t - \tau)], \qquad (p)$$

d'onde si vede che il taglio del coltello oscilla sincronicamente col pendolo, essendo ε l'amplitudine lineare della sua oscillazione. Si vede anche, che così fatta amplitudine (equazione (n)) è direttamente proporzionale al coefficiente χ *di elasticità e scorrimento* del sostegno, alla *massa* m del pendolo, alla *distanza* s *del centro di gravità del pendolo dal taglio del coltello su cui appoggia* ed all'*amplitudine* α *di oscillazione del pendolo.*

Osservando che, per la terza delle (15),

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - n^2 \alpha \operatorname{sen} [n (t - \tau)],$$

dalla terza e dalla quarta delle $(e)'$ abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \varrho &= \frac{\varepsilon}{\alpha} \,. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Ponendo nella equazione $(3)_a$ i valori di ϱ e β qui assegnati otteniamo:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{g \operatorname{sen} \theta}{l + \frac{\varepsilon}{\alpha} \cos \theta}$$

ovvero, *fino ai termini di secondo ordine inclusive in sen* θ, e avuto riguardo alla equazione (n),

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l + \chi m s} \operatorname{sen} \theta \tag{29}$$

d'onde si vede che l'accelerazione angolare è quella stessa che spetterebbe ad un pendolo, il cui asse di sospensione fosse fisso e la cui lunghezza fosse $l + \chi m s$.

L'osservazione, come vedremo (equazione (100)), permette di determinare $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \chi m s$ e quindi di correggere la lunghezza l spettante al pendolo il cui asse di sospensione è fisso.

La differenza fra la durata T dell'oscillazione del pendolo lungo l e la durata T' della oscillazione del pendolo lungo $l + \chi m s$, è poi $\left(\text{siccome } T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ e } \Delta T = T' - T = T \frac{\Delta l}{2l} = [T' - (T' - T)] \frac{\chi m s}{2l}\right)$

$$T - T' = -T' \frac{\chi m s}{2l}. \tag{30}$$

§ VIII. *Alterazione della durata di una oscillazione prodotta dalla spinta idrostatica e dalla viscosità dell'aria.*

Quando il pendolo, supposto nel vuoto, si trovi deviato dalla verticale dell'angolo θ, esso è sollecitato dal proprio peso a ritornare sulla verticale col momento

$$g\, m\, s \operatorname{sen} \theta$$

essendo m la sua massa ed s la distanza del suo centro di gravità dall'asse di sospensione.

Essendo immerso nell'aria, la sua discesa verso la verticale è parzialmente contrastata dalla *spinta idrostatica*, la quale, agendo di sotto in su, può considerarsi come applicata al centro di figura del pendolo ed ha una intensità misurata dal peso dell'aria spostata dal pendolo. Detta σ la distanza del centro di figura del pendolo dall'asse di sospensione, dette μ_0 e δ_0 la massa e la densità dell'aria spostata alla temperatura ed alla pressione normali (temperatura del ghiaccio fondente e pressione di 760 mm.) μ e δ la massa e la densità dell'aria stessa alla temperatura e alla pressione attuali, abbiamo:

$$\mu = \mu_0 \frac{\delta}{\delta_0}$$

e pertanto sarà il momento della spinta idrostatica:

$$g \mu_0 \frac{\delta}{\delta_0} \sigma \operatorname{sen} \theta$$

e il momento sollecitante il pendolo:

$$g\, m\, s \left(1 - \frac{\mu_0\, \sigma}{m\, s} \frac{\delta}{\delta_0}\right) \operatorname{sen} \theta .$$

D'altra parte il pendolo oscillando trascina con sè nel suo movimento (come per *viscosità*) una certa quantità di aria. E, in conseguenza, il momento d'inerzia del pendolo

$$m\,(s^2 + i^2)$$

risulta aumentato di una certa quantità che potremo assumere espressa dal prodotto della massa μ dell'aria spostata dal pendolo per un certo coefficiente K. Le osservazioni eseguite e trattate convenientemente potranno dire se K sia una quantità costante oppure se sia funzione della elongazione del pendolo. Il momento d'inerzia della massa realmente oscillante è dunque:

$$m\,(s^2 + i^2) + \mu_0 \frac{\delta}{\delta_0} \mathrm{K}$$

e l'accelerazione angolare del pendolo oscillante nell'aria sotto l'azione della sola gravità, indipendentemente dalle resistenze passive e dal moto dell'asse di sospensione, sarà:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g\,m\,s\left(1 - \frac{\mu_0\,\sigma\,\delta}{m\,s\,\delta_0}\right)}{m\,(s^2 + i^2) + \mu_0 \frac{\delta}{\delta_0}\mathrm{K}} \operatorname{sen}\theta\,.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $m\,s$, ponendo ancora $s + \frac{i^2}{s} = l$ e ponendo

$$\frac{\mu_0\,\delta}{m\,\delta_0} = \iota \tag{31}$$

quantità piccolissima, avremo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g\left(1 - \iota\frac{\sigma}{s}\right)}{l\left(1 + \iota\frac{\mathrm{K}}{l\,s}\right)} \operatorname{sen}\theta = -\frac{g}{l + \frac{\iota}{s}(\mathrm{K} + l\sigma)} \operatorname{sen}\theta\,. \tag{32}$$

Si vede che l'effetto della spinta idrostatica e della viscosità dell'aria è di allungare il pendolo di

$$\frac{\iota}{s}(\mathrm{K} + l\sigma)\,.$$

Indicando con T^0 la durata della oscillazione nel vuoto e con T quella nell'aria, avremo:

$$\mathrm{T}^0 - \mathrm{T} = -\frac{\iota}{2s}\left(\sigma + \frac{\mathrm{K}}{l}\right)\mathrm{T} \tag{33}$$

non tenendo conto dei termini di ordine superiore al primo in ι.

Questa equazione potrebbe adoperarsi per ridurre al vuoto la durata T osservata nell'aria, qualora fosse conosciuto il coefficiente di viscosità K, giacchè le altre quantità contenute nella espressione possono ottenersi con esattezza sufficiente allo scopo da dirette misure.

Dando però al pendolo ad assi reciproci una forma simmetrica, come ha prima proposto il Bessel, si può dalle durate osservate delle oscillazioni nelle due posizioni

reciproche del pendolo, dedurre la lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi tale quale si otterrebbe con osservazioni eseguite nel vuoto.

Per dimostrare questo, raccogliamo prima ciò che moltiplica T nella equazione (33) ed innalziamo al quadrato senza tener conto del termine in ι^2. Avremo l'equazione:

$$T^2\left(1-\frac{\sigma}{s}\iota-\frac{K}{s\,l}\iota\right)=T^{o^2}. \qquad (q)$$

Da questa equazione avendosi

$$T^2=T^{o^2}\left[1+\left(\frac{\sigma}{s}+\frac{K}{s\,l}\right)\iota\right],$$

col grado di approssimazione qui adottato si potrà ritenere

$$\frac{T^2}{l}\iota=\frac{T^{o^2}}{l}\iota.$$

E indicando con λ la lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi di tempo medio nel vuoto avremo:

$$\frac{T^{o^2}}{l}=\frac{1}{\lambda}$$

e pertanto alla equazione (q) si può dare la forma:

$$\lambda\,(T^2 s-T^2\sigma\,\iota)=\lambda\,T^{o^2}s+K\iota=s^2+i^2+K\iota \qquad (q)'$$

giacchè $\lambda\,T^{o^2}s=l\,s=s^2+i^2$ per l'ultima delle $(d)'$.

Indichiamo con $T_1, s_1, \sigma_1, \iota_1, K_1$; $T_2, s_2, \sigma_2, \iota_2, K_2$ rispettivamente i valori che assumono T, s, σ, ι, K quando il pendolo appoggia successivamente sul coltello più lontano e su quello più vicino al centro di gravità. Avremo le due equazioni analoghe alla $(q)'$

$$\lambda\,(T_1^2 s_1-T_1^2\sigma_1\iota_1)=s_1^2+K_1\iota_1+i^2$$
$$\lambda\,(T_2^2 s_2-T_2^2\sigma_2\iota_2)=s_2^2+K_2\iota_2+i^2.$$

Sottraendo la seconda di queste dalla prima abbiamo:

$$\lambda\left\{T_1^2 s_1-T_2^2 s_2-(T_1^2\sigma_1\iota_1-T_2^2\sigma_2\iota_2)\right\}=s_1^2-s_2^2+K_1\iota_1-K_2\iota_2.$$

Ponendo quindi:

$$T_1^2=\tfrac{1}{2}(T_1^2+T_2^2)+\tfrac{1}{2}(T_1^2-T_2^2)$$
$$T_2^2=\tfrac{1}{2}(T_1^2+T_2^2)-\tfrac{1}{2}(T_1^2-T_2^2)$$

ottiensi:

$$T_1^2 s_1-T_2^2 s_2=\tfrac{1}{2}(T_1^2+T_2^2)(s_1-s_2)+\tfrac{1}{2}(T_1^2-T_2^2)(s_1+s_2)$$

e poi:

$$\lambda=\frac{s_1+s_2+\dfrac{K_1\iota_1-K_2\iota_2}{s_1-s_2}}{\dfrac{1}{2}(T_1^2+T_2^2)+\dfrac{s_1+s_2}{2\,(s_1-s_2)}\left\{T_1^2\left(1-\dfrac{2\,\sigma_1}{s_1+s_2}\iota_1\right)-T_2^2\left(1-\dfrac{2\,\sigma_2}{s_1+s_2}\iota_2\right)\right\}}. \qquad (34)$$

Se il pendolo è *simmetrico rispetto alla perpendicolare* al piano di oscillazione condotto *pel punto di mezzo dell'asse* di figura del pendolo, per cui devasi ritenere $K_2=K_1=K$, $\sigma_2=\sigma_1=\frac{1}{2}(s_1+s_2)$, otteniamo:

$$\lambda=\frac{s_1+s_2+K\dfrac{\iota_1-\iota_2}{s_1-s_2}}{\dfrac{1}{2}(T_1^2+T_2^2)+\dfrac{s_1+s_2}{2\,(s_1-s_2)}\left\{T_1^2(1-\iota_1)-T_2^2(1-\iota_2)\right\}}. \qquad (35)$$

Se avendo il pendolo forma simmetrica lo si fa oscillare nelle sue due posizioni reciproche, mentre *le condizioni di temperatura e di pressione sono le stesse*, abbiamo allora $\iota_2 = \iota_1 = \iota$ e

$$\lambda = \frac{s_1 + s_2}{\frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2) + \frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)}(T_1^2 - T_2^2)(1 - \iota)} \,. \tag{36}$$

Se $T_1^2 - T_2^2$ è, come sempre avviene, una quantità piccolissima, il termine in ι del denominatore sarà trascurabile ed avremo per l'uso la formola:

$$\lambda = \frac{s_1 + s_2}{\frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2) + \frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)}(T_1 + T_2)(T_1 - T_2)} \tag{37}$$

la quale suppone *il pendolo simmetrico*, le *condizioni di temperatura e di pressione eguali* e una *differenza abbastanza piccola nei tempi di oscillazione* nelle due posizioni reciproche del pendolo.

Il denominatore della (37) rappresenta il quadrato del *tempo di una oscillazione del pendolo semplice lungo* $s_1 + s_2$.

Indicando con τ questo tempo, abbiamo:

$$\tau^2 = \frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2) + \frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)}(T_1 + T_2)(T_1 - T_2)$$
$$= \frac{1}{4}(T_1 + T_2)^2 \left\{ 1 + 2\frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2}\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} + \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\right)^2 \right\}.$$

Estraendo la radice quadrata e tenendo conto soltanto del termine di primo ordine in $T_1 - T_2$ si ha:

$$\tau = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)}(T_1 - T_2) \,. \tag{37)'$$

Conosciuto τ la equazione (37) porge subito:

$$\frac{\lambda - (s_1 + s_2)}{s_1 + s_2} = \frac{(\tau + 1)(1 - \tau)}{\tau^2} \,. \tag{37)'$$

§ IX. *Ricerca generale della influenza di una piccola accelerazione perturbatrice* f *sull'amplitudine e sulla durata della oscillazione.*

Dalla teoria del pendolo fondata sulla ipotesi di $f = 0$, cioè sulla ipotesi che sieno g ed l costanti e che non intervengano nel movimento cause perturbatrici, risulta che l'amplitudine α della oscillazione sarebbe costante e la durata T sarebbe pure costante e quale compete ai dati valori di g, l, ed α.

L'osservazione mostrando che l'amplitudine α è in continua diminuzione e che la durata T, anche ridotta all'amplitudine infinitesima, non è costante, o, se costante non è tale quale competerebbe ai dati valori di g ed l, conduce a dire che il moto pendolare delle osservazioni è *moto perturbato*.

Detto ora, come nel § III, τ il tempo di un passaggio del pendolo per la verticale, avremo al tempo t dell'*emmesimo* passaggio dopo ed escluso quello del tempo τ:

$$n(t - \tau) = m\pi \,.$$

Nel *moto non perturbato* abbiamo all'istante del passaggio successivo

$$n(t+\mathrm{T}-\tau)=(m+1)\pi$$

indicando con T la durata di una oscillazione.

Se a partire da t il moto non perturbato diviene *perturbato* e quindi il coefficiente di accelerazione $n=\sqrt{\frac{l}{g}}$ nel tempo della oscillazione diventa n', e la durata T diventa T' a motivo della variazione di n, (giacchè nel tempo di una oscillazione puossi ritenere α costante) dovremo avere:

$$n'(t+\mathrm{T}'-\tau)=(m+1)\pi$$

e quindi:

$$n'(t+\mathrm{T}'-\tau)=n(t+\mathrm{T}-\tau).$$

Nel primo membro di questa equazione possiamo ora sostituire a τ un altro valore τ' tale che:

$$n'(t+\mathrm{T}'-\tau)=n(t+\mathrm{T}'-\tau').$$

Allora, avendosi pure:

$$n(t+\mathrm{T}'-\tau')=n(t+\mathrm{T}-\tau)$$

invece di considerare la variazione T' — T della durata come effetto della variazione di n, coefficiente di accelerazione angolare, prodotta dalle cause perturbatrici, possiamo considerarla come effetto di una variazione, la quale avvenga durante l'oscillazione stessa, nel tempo da cui essa oscillazione si fa decorrere cioè nel tempo τ. La variazione di τ deve essere necessariamente eguale a quella di T, cioè devesi avere:

$$\tau'-\tau=\mathrm{T}'-\mathrm{T}.$$

Ne viene che il moto perturbato si può ad ogni istante scambiare con un moto non perturbato speciale, il quale però dovrà avere la stessa *elongazione*, la stessa *velocità* e la stessa *accelerazione* del moto perturbato in grandezza e segno. Soltanto che questa velocità e questa accelerazione non dipenderanno rispettivamente dalla elongazione e dalla velocità nel modo solito, giacchè ora, invece di considerare α e τ come costanti, dobbiamo considerarle in continua variazione. Pertanto il moto perturbato sarà ad ogni istante definito qualora per quell'istante si possano determinare i valori dei parametri α e τ in funzione dell'incremento f dell'accelerazione angolare portato dall'azione perturbatrice. Viceversa la legge di variazione di α e τ supposta nota, per es. per le osservazioni, potrà condurre a conoscere la legge con cui varia l'accelerazione dipendentemente dalle cause perturbatrici.

Alla velocità V del moto perturbato corrisponde una accelerazione A_1, la quale si avrebbe da V, se V fosse data in funzione del tempo, con una semplice derivazione rispetto a questa variabile. Se però si considerano V ed A_1 come *velocità ed accelerazione di moto non perturbato* a *parametri* α e τ *variabili col tempo*, l'espressione di A_1 sarà:

$$\mathrm{A}_1=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt}.$$

Se all'istante t cessasse l'azione perturbatrice, l'*accelerazione* A *del moto imperturbato susseguente* sarebbe espressa dal solo primo termine del secondo membro, e pertanto la parte

$$f=\mathrm{A}_1-\mathrm{A},$$

di accelerazione dovuta alla causa perturbatrice, avrà per espressione:

$$f = \frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} \tag{38}$$

e si deve intendere che f sia una piccola quantità della quale sieno trascurabili le potenze superiori alla prima.

La velocità V del pendolo nel moto perturbato, qualora si consideri come velocità di moto non perturbato a parametri α e τ variabili col tempo, ha per espressione:

$$V = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt}.$$

Essa è anche però la velocità del moto non perturbato che sarebbe assunto realmente dal pendolo al tempo t se cessasse improvvisamente la causa perturbatrice, o, in altre parole, se i due parametri α e τ divenissero costanti, cioè $d\alpha$ e $d\tau$ fossero separatamente nulli. Siccome però il movimento è realmente perturbato essi sono variabili e, pertanto, la variabilità loro nel tempo dt deve esser tale da produrre sulla velocità del moto non perturbato un effetto complessivo eguale a quello che produrrebbero se fossero realmente costanti, cioè un effetto nullo, e perciò, non potendo essere separatamente $d\alpha = 0$, $d\tau = 0$, dovrà essere:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = 0. \tag{39}$$

Dalle equazioni (38) e (39) ponendo per brevità:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = D \tag{40}$$

abbiamo:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{D}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} f$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{D}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} f.$$

Agendo la causa perturbatrice per il tempo finito compreso fra t_0 e t_1, avremo anche in α e τ variazioni finite che indicheremo con $\Delta\alpha$ e $\Delta\tau$, le cui espressioni saranno:

$$\Delta\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{D}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} f\, dt \tag{41}$$

$$\Delta\tau = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{D}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} f\, dt \tag{42}$$

e queste compendiano l'effetto della forza perturbatrice agente dal tempo t_0 al tempo t_1 sul moto non perturbato del pendolo.

Da due movimenti pendolari non perturbati diversi possiamo indifferentemente far dipendere il moto pendolare perturbato proposto di cui l'accelerazione angolare ha per espressione (equazione (4))

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -n^2 \operatorname{sen}\theta + f,$$

e ciò variando in modo opportuno le due costanti d'integrazione α e τ che li definiscono.

Il *primo* di tali movimenti è quello definito dalle equazioni: (9) (11) (8)' (6)

$$\left.\begin{aligned} k &= \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ L\varphi - M \operatorname{sen} 2\varphi + N \operatorname{sen} 4\varphi - \ldots &= n(t-\tau) \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} &= k \operatorname{sen}\varphi \\ V = \frac{d\theta}{dt} &= 2nk\cos\varphi \\ A = \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -n^2 \operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Le variazioni che, nel *movimento pendolare circolare* definito da tali equazioni, dovremo attribuire ai parametri α e τ, dovranno essere tali da soddisfare alle due equazioni di condizione (38) e (39), nelle quali i coefficienti differenziali parziali devono intendersi dedotti dalle equazioni (43), mentre f è l'eccesso dell'accelerazione del moto perturbato sulla accelerazione $-n^2\, sen\, \theta$ del moto non perturbato da cui si fa derivare.

Il *secondo* di tali movimenti è il *moto pendolare cicloidale* definito dalle equazioni (15) che qui trascriviamo:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \alpha \operatorname{sen}[n(t-\tau)] \\ V = \frac{d\theta}{dt} &= n\alpha\cos[n(t-\tau)] \\ A = \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -n^2\alpha \operatorname{sen}[n(t-\tau)] = -n^2\theta\,. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

In tal caso i quozienti differenziali delle equazioni di condizione (38) e (39) devono dedursi dalle equazioni or ora scritte (44), e l'accelerazione perturbatrice che figura nel primo membro della (38) non sarà più f, cioè non avrà il valore assegnatole dalla (5), ma sarà invece l'eccesso della accelerazione $-n^2\, sen\, \theta + f$ del moto perturbato (equazione (4)) sulla accelerazione $-n^2\theta$ (ultima delle equazioni (44)) del moto pendolare cicloidale non perturbato dal quale esso vuolsi far derivare. Ponendo un tale eccesso uguale ad F, sarà:

$$F = -n^2 \operatorname{sen}\theta + f + n^2\theta$$

ovvero:

$$F = f + \frac{n^2}{6}\left(\theta^3 - \frac{\theta^5}{20} + \ldots\right). \quad (45)$$

Faremo derivare il moto perturbato direttamente dal moto pendolare cicloidale, poichè in tal modo abbiamo il vantaggio di poter calcolare i quozienti differenziali parziali rispetto ad α e τ esattamente, mentre nell'altro movimento sarebbero dati per serie quantunque convergentissime. Lo svantaggio di avere così aumentata l'accelerazione perturbatrice di $\frac{n^2}{6}\left(\theta^3 - \frac{\theta^5}{20} + \ldots\right)$ non ha importanza pratica, giacchè, anche così aumentata, essa si conserva una piccola quantità di primo ordine, di cui sono trascurabili le potenze superiori alla prima.

Dalle equazioni (44) avendosi

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \operatorname{sen}[n(t-\tau)] \qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha} = n\cos[n(t-\tau)]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = -n\alpha\cos[n(t-\tau)] \qquad \frac{\partial V}{\partial\tau} = n^2\alpha\operatorname{sen}[n(t-\tau)],$$

per cui (equazione (40))

$$D = -n^2\alpha,$$

risulta:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{F}{n}\cos[n(t-\tau)]$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{F}{n^2\alpha}\operatorname{sen}[n(t-\tau)]$$

ed essendo $ndt = d\,[n(t-\tau)]$ sarà, avuto riguardo alle (41) e (42),

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{1}{n^2}\int_{t_0}^{t_1} F\cos[n(t-\tau)]\,d[n(t-\tau)] \\ \Delta\tau &= \frac{1}{n^3\alpha}\int_{t_0}^{t_1} F\operatorname{sen}[n(t-\tau)]\,d[n(t-\tau)]. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Considerando ora la composizione di F quale risulta dal sostituire nella (45) il valore di f dato dalla (5), trascurando il termine in θ^5 e quelli di ordine superiore, abbiamo prima:

$$F = \frac{n^2}{6}\theta^3 + \left(\frac{Q\varrho}{l} - \frac{\gamma}{l} + \frac{g}{l}\frac{\lambda}{l}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{h}{l}\cos\theta \mp \Big(c + \varphi(V)\Big).$$

Tanto il coefficiente di *sen* θ quanto quello di *cos* θ sono piccolissimi per cui possiamo nello sviluppo di queste due funzioni arrestarci ai termini di 1° ordine. Inoltre in luogo di $\varphi(V)$ pel teorema di *Maclaurin* si può porre $\varphi'_0 V + \frac{1}{2}\varphi''_0 V^2 + \ldots$ intendendo che il valore di $\varphi(V)$ per $V = 0$ sia nullo cioè sia $\varphi_0 = 0$. Abbiamo dunque:

$$F = \frac{h}{l} + \left(Q\frac{\varrho}{l} - \frac{\gamma}{l} + \frac{g}{l}\frac{\lambda}{l}\right)\theta + \frac{n^2}{6}\theta^3 \mp \left(c + \varphi'_0 V + \frac{1}{2}\varphi''_0 V^2 + \ldots\right) \quad (47)$$

dove nel calcolo dei termini preceduti dal doppio segno s'intende che V sia sempre positiva e si prendono nel loro complesso negativamente se la velocità è realmente positiva, positivamente nel caso opposto.

Prescindendo per il momento dalla possibile variabilità periodica dei coefficienti e delle accelerazioni lineari del moto dell'asse di sospensione, i termini dell'accelerazione perturbatrice F possono considerarsi repartiti in tre categorie:

I[a] termini costanti $K = \frac{h}{l} \mp c\ldots$ oppure variabili a lungo periodo;

II[a] termini proporzionali ad una potenza m della elongazione $= \sigma\,\theta^m$;

III[a] termini proporzionali ad una potenza m della velocità $= \chi\,V^m$.

Trattiamo separatamente i tre casi.

1° Se

$$F = K \tag{48}$$

e facciamo abbracciare ai limiti t_0 e t_1 due intere oscillazioni abbiamo dalle (46)

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\alpha &= \frac{K}{n^2}\int_{2r\pi}^{2(r+1)\pi} \cos[n(t-\tau)]\, d[n(t-\tau)] = 0 \\ \varDelta\tau &= \frac{K}{n^3\alpha}\int_{2r\pi}^{2(r+1)\pi} \operatorname{sen}[n(t-\tau)]\, d[n(t-\tau)] = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

E pertanto nel tempo di due oscillazioni successive l'effetto integrale di una forza perturbatrice costante, così nell'amplitudine come nella durata di una oscillazione, è nullo.

2° Se

$$F = \sigma\,\theta^m = \sigma\,\alpha^m \operatorname{sen}^m[n(t-\tau)] \tag{50}$$

ed estendiamo la integrazione fra due limiti t_0 e t_1 corrispondenti a una sola oscillazione, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\alpha &= \sigma\,\frac{\alpha^m}{n^2}\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \operatorname{sen}^m[n(t-\tau)]\cos[n(t-\tau)]\, d[n(t-\tau)] = 0 \\ \varDelta\tau &= \sigma\,\frac{\alpha^{m-1}}{n^3}\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \operatorname{sen}^{m+1}[n(t-\tau)]\, d[n(t-\tau)] = C\alpha^{m-1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

cioè una causa perturbatrice periodica proporzionale alla potenza emmesima della elongazione non altera l'amplitudine; ma altera la durata dell'oscillazione di una quantità proporzionale alla potenza $m-1$ esima dell'amplitudine, per cui nel caso particolare di $m=1$, si produce bensì un'alterazione nella durata, ma una tale alterazione è costante, cioè le oscillazioni rimangono isocrone.

3° Finalmente se

$$F = \chi V^m = \chi\, n^m\, \alpha^m \cos^m[n(t-\tau)] \tag{52}$$

ed estendiamo la integrazione entro agli stessi limiti di prima, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\alpha &= \chi\, n^{m-2}\,\alpha^m \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \cos^{m+1}[n(t-\tau)]\, d[n(t-\tau)] = D\,\alpha^m \\ \varDelta\tau &= \chi\, n^{m-3}\,\alpha^{m-1}\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \cos^m[n(t-\tau)]\operatorname{sen}[n(t-\tau)]\, d[n(t-\tau)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

cioè una causa perturbatrice periodica proporzionale alla potenza emmesima della velocità altera (durante una oscillazione) l'amplitudine di quantità proporzionale alla potenza emmesima del proprio valore, ma non altera la durata dell'oscillazione del pendolo cicloidale, giacchè in questo pendolo la durata dell'oscillazione è indipendente dall'amplitudine,

ovvero, si può dire, non altera la durata dell'oscillazione del pendolo circolare già ridotta al pendolo cicloidale.

Potendo anche una funzione $\psi(\theta)$ della elongazione (come già si è fatto per la funzione $\varphi(V)$ della velocità) essere sostituita con un aggregato di termini proporzionali alle successive potenze della variabile indipendente puossi concludere in generale che una piccola forza perturbatrice funzione qualunque (ma tale cui possa applicarsi il teorema di Maclaurin) della sola elongazione altera la durata dell'oscillazione lasciando invariata l'amplitudine, mentre una piccola forza perturbatrice funzione della sola velocità altera l'amplitudine ma non la durata.

La presenza delle forze perturbatrici della seconda categoria è facilmente riconoscibile mediante le osservazioni, giacchè l'amplitudine è una quantità facilmente misurabile e di cui, in conseguenza, potrà anche essere ricercata eventualmente la legge di variazione.

Anche la presenza delle cause perturbatrici della prima categoria può fino a un certo punto essere riconosciuta, allorquando dette cause sieno esprimibili con termini proporzionali a una potenza della elongazione superiore alla prima.

Infatti allora, come si è di sopra veduto, la durata dell'oscillazione è alterata di quantità proporzionale ad una potenza dell'amplitudine di grado inferiore di una unità a quella potenza della elongazione cui è proporzionale la forza perturbatrice e l'alterazione della durata potrà riconoscersi paragonando le durate di oscillazione dedotte in amplitudini differenti fra loro. Naturalmente le osservazioni essendo fatte sopra un pendolo circolare, dovremo per le varie amplitudini trovare una differenza di durata dipendente nella massima parte dal termine proporzionale al cubo della elongazione $\left(\frac{n^2}{6}\theta^3\right)$, da cui incomincia la espressione della forza che obliga il centro di gravità del pendolo a percorrere un cerchio in luogo di una cicloide.

Questa differenza è facilmente calcolabile ponendo nella (50) $\sigma = \frac{n^2}{6}$, $m = 3$, poichè allora dalla seconda delle (51) si ha:

$$\Delta T = \frac{\alpha^2}{6\,n} \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \operatorname{sen}^4 [n(t-\tau)]\, d[n(t-\tau)]$$

e siccome $\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{3}{8}\pi$ e $\frac{\pi}{n} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T_0$ durata della oscillazione nel pendolo cicloidale, avremo ponendo $= T$ la durata osservata nell'amplitudine α,

$$\Delta T = T - T_0 = + \frac{\alpha^2}{16} T_0$$

ovvero, con errore del 4° ordine in α;

$$T_0 - T = - \frac{\alpha^2}{16} T.$$

Tale espressione per la riduzione della durata di oscillazione al pendolo cicloidale coincide col primo termine (il solo di cui sia necessario tener conto nella pratica) della

riduzione al pendolo cicloidale o all'arco infinitesimo trovata per altra via (v. equazione (13)'). La concordanza fra i due risultati non può spingersi oltre il primo termine, giacchè non si potrebbe tener conto del termine in α^4 senza togliere all'accelerazione perturbatrice il carattere di piccola quantità di primo ordine in base al quale è stabilita la equazione (38).

Ridotta la durata delle oscillazioni al pendolo cicloidale si potrà vedere se riescano fra loro eguali, entro ai limiti degli errori inevitabili di osservazione, o se presentino ancora differenze in funzione della amplitudine.

Era ritenuto in generale dagli sperimentatori che la durata delle oscillazioni osservate in differenti amplitudini e ridotta al pendolo cicloidale sia la medesima qualunque sia l'amplitudine.

Prima delle mie esperienze del febbraio 1886 io ignorava se una tale opinione fosse mai stata convalidata con esperienze dirette allo scopo, oppure se risultasse soltanto dall'osservare la concordanza, in generale molto soddisfacente, che le durate di oscillazione *ridotte al pendolo cicloidale* hanno sempre presentato fra loro, quando le amplitudini alle quali esse corrispondevano non erano abbastanza diverse fra loro per dar campo alle differenze molto piccole di manifestarsi.

Nelle mie esperienze del febbraio 1886 ho cercato di coordinare le osservazioni in modo da verificare senza grave difficoltà la giustezza della opinione ora enunciata e ho trovato che, almeno per lo strumento da me adoperato, essa non è conforme a verità, come sarà mostrato a suo luogo.

Mentre io stava ordinando e discutendo le mie osservazioni mi pervennero i Comptes-rendus des séances de la huitième conférence générale de l'association géodésique internationale ecc. (Berlin, Reimer, 1887) dai quali si apprende che un fatto analogo a quello da me osservato, risulta anche dalla discussione delle osservazioni fatte dalla Gradmessung Austriaca nel 1884 con un pendolo a coltelli di agata. Le parole dell'Oppolzer sono queste: « La riduzione delle osservazioni è quasi compiuta e diede il risultato interessante che, fatta astrazione dalla riduzione all'arco di oscillazione infinitamente piccolo, il tempo di oscillazione è anche una funzione di α e propriamente, con sufficiente esattezza, di α^2..... » (v. pag. 153).

Per ispiegare il fatto basterebbe ammettere che uno o più dei termini componenti nella espressione di F (47) il coefficiente di θ e ritenuti nelle considerazioni superiori siccome costanti, fossero a lor volta funzioni della elongazione, poichè allora comparirebbero termini perturbatori proporzionali al quadrato della elongazione, oppure al cubo ecc. che darebbero differenze nella durata dell'oscillazione proporzionali rispettivamente alla semplice amplitudine, o al quadrato di essa ecc.

Colla diretta osservazione non è in generale riconoscibile la presenza delle cause perturbatrici che agiscono proporzionalmente alla semplice elongazione, poichè, ripetiamo, l'alterazione da esse prodotta nella durata dell'oscillazione, è costante, ovvero le oscillazioni, malgrado l'intervento di quelle cause perturbatrici, mantengonsi isocrone.

Fortunatamente gli effetti delle azioni perturbatrici provenienti dalla cilindrità dei tagli dei coltelli, dalla spinta idrostatica e dalla viscosità dell'aria possono venire eliminati, come già s'è veduto, quando il pendolo ad assi reciproci abbia i coltelli

fra loro scambievoli, abbia forma perfettamente simmetrica e le osservazioni si facciano nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione.

Non così avviene per gli effetti perturbatori prodotti dalla elasticità del supporto e dall'insufficiente resistenza allo scorrimento presentata dal piano di appoggio. Per rendersi indipendenti da questi o bisogna cercare di ridurli così piccoli da essere trascurabili nel grado di approssimazione adottato, ovvero di determinarne il valor numerico per correggere corrispondentemente i risultati finali.

Per calcolare l'influenza del movimento del coltello prodotto dalle due cause ora accennate è necessario di determinare l'amplitudine ε della sua oscillazione sincrona con quella del pendolo (equazione (30)).

La parte di oscillazione dipendente dallo scorrimento è stata esplorata prima, per quanto so, dal Bessel e ultimamente dall'Oppolzer senza che siasi potuto riconoscere in modo sensibile e tale da doverne tenere conto. L'Oppolzer, nel luogo poco sopra citato, alludendo alle operazioni fatte sotto la sua direzione nel 1884, dice: « Fu rivolta una particolare cura allo studio dei fenomeni di scorrimento e se ne ricavò che essi non si presentano in questo apparato nemmeno per le massime amplitudini ». Io non ebbi agio nè mezzo per potermi occupare di tale argomento e mi sono accontentato di accettare come positivo, che l'effetto dello scorrimento sia così piccolo da potere senza sensibile errore essere lasciato fuori di considerazione. La parte di oscillazione dipendente dalla elasticità del supporto procurai di rendere quasi nulla dando al supporto una grande solidità. Per dimostrare poi che effettivamente nelle mie esperienze, la vibrazione del supporto non ha influenza sensibile sulla durata della oscillazione, ho istituito esperienze apposite mediante il pendolo a filo nel modo che sarà in seguito esposto.

§ X. *Ricerca della legge secondo la quale diminuisce l'amplitudine di oscillazione e calcolo della media riduzione al pendolo cicloidale di una serie di oscillazioni.*

Nella pratica non giova, nè sarebbe facile, osservare la durata e l'amplitudine di ogni oscillazione successiva, affine di applicare a ciascuna durata la rispettiva riduzione al pendolo cicloidale e poi fare la media delle durate ridotte. Giova invece osservare la durata complessiva di un numero m di oscillazioni abbraccianti tutte insieme un tempo abbastanza lungo affinchè l'errore inevitabile nell'apprezzamento del principio e della fine di questo vada a ridursi estremamente piccolo sul tempo di una sola oscillazione. Dividendo tale durata complessiva pel numero delle oscillazioni si ottiene una durata di oscillazione, la quale, per essere ridotta al pendolo cicloidale, deve ricevere evidentemente una correzione eguale alla media aritmetica delle riduzioni (diverse fra loro a motivo dell'amplitudine continuamente decrescente) spettanti a ciascuna delle m oscillazioni parziali. La ricerca della legge di diminuzione dell'amplitudine ha per iscopo di rendere possibile il calcolo della media aritmetica delle riduzioni, senza costringere ad osservare ogni amplitudine, ma soltanto impiegando alcune poche amplitudini osservate nel corso delle operazioni.

Innanzi tutto è necessario vedere quale sia l'espressione della riduzione al pendolo cicloidale della durata media di m oscillazioni successive. Perciò sieno T_1, T_2, T_3.... T_m

le durate ed α_1, α_2, α_3..... α_m le amplitudini rispettivamente di m oscillazioni successive. Per la equazione (13)' avremo:

$$T_1 = T_0 + \frac{T_0}{16 R_1^2}\alpha_1^2 + \frac{11}{3072}\frac{T_0}{R_1^4}\alpha_1^4 + \dots$$

$$T_2 = T_0 + \frac{T_0}{16 R_1^2}\alpha_2^2 + \frac{11}{3072}\frac{T_0}{R_1^4}\alpha_2^4 + \dots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_m = T_0 + \frac{T_0}{16 R_1^2}\alpha_m^2 + \frac{11}{3072}\frac{T_0}{R_1^4}\alpha_m^4 + \dots$$

Ponendo $T_1 + T_2 + \dots T_m = mT'$, avremo, facendo la media aritmetica delle m equazioni:

$$T' = T_0 + \frac{T_0}{16 R_1^2 m}\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^2 + \frac{11 T_0}{3072 R_1^4 m}\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^4 + \dots$$

Si può vedere facilmente che, anche nei casi più sfavorevoli della pratica, basta tener conto nel secondo membro di questa espressione soltanto dei primi due termini. Infatti le curve aventi le ordinate proporzionali ad α^2 e rispettivamente ad α^4 e le ascisse proporzionali ai tempi corrispondenti, sono ambedue e per tutta la loro lunghezza, dalla parte dell'asse delle ascisse rispetto alle rette che congiungono i loro punti estremi, e però:

$$\frac{T_0}{16 R_1^2 m}\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^2 < \frac{T_0}{16 R_1^2}\frac{\alpha_1^2 + \alpha_m^2}{2}$$

$$\frac{11 T_0}{3072 R_1^4 m}\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^4 < \frac{11 T_0}{3072 R_1^4}\frac{\alpha_1^4 + \alpha_m^4}{2}.$$

Posti $\alpha_1 = 150'$, $\alpha_m = 90'$, i secondi membri di queste diseguaglianze diventano rispettivamente eguali a

$$\frac{809}{10^7} T_0 \quad ; \quad \frac{0{,}073}{10^7} T_0 .$$

Siccome nelle osservazioni non si arriva mai ad amplitudini di 150' e si termina quasi sempre la serie con amplitudini minori di 90', il terzo termine della superiore equazione è sempre trascurabile, e si può ritenere semplicemente:

$$T' = T_0 + \frac{T_0}{16 R_1^2 m}\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^2$$

dalla quale si ha:

$$T_0 = T' - \frac{1}{16 R_1^2 m}\left[T' - \frac{T_0}{16 R_1^2 m}\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^2\right]\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^2 .$$

L' ultimo termine del secondo membro di questa equazione essendo minore di $(809 \times 10^{-7})^2\, T_0 = 0{,}07 \times 10^{-7}\, T_0$ è sempre trascurabile, e perciò possiamo ritenere senz'altro la riduzione al pendolo cicloidale della media di m oscillazioni successive

$$T_0 - T' = -\frac{T'}{16 R_1^2 m}\sum_{r=1}^{r=m}\alpha_r^2 . \qquad (54)$$

Geometricamente tale riduzione media sarebbe rappresentata dalla media aritmetica delle ordinate della curva di equazione

$$X = \frac{T'\alpha^2}{16 R_1^2} = \varphi(t);$$

ciascuna delle quali ordinate è proporzionale al quadrato della elongazione massima α (amplitudine) corrispondente all'ascissa che rappresenta il tempo t di mezzo fra il principio e la fine di una certa oscillazione, giacchè l'osservazione dimostra che l'amplitudine varia in *modo continuo* (diminuisce) all'aumentare continuo del tempo.

Siccome la durata di una oscillazione T_r è così breve che nell'intervallo di essa l'amplitudine puossi considerare come variabile uniformemente, ognuna di quelle ordinate X_p può venire considerata come l'altezza del rettangolo di base ed area eguali a quelle del trapezio rinchiuso fra l'asse delle ascisse, la tangente alla curva e le ordinate $\varphi\left(t - \frac{T_r}{2}\right)$, $\varphi\left(t + \frac{T_r}{2}\right)$ limitanti anche il rettangolo, e perciò la media aritmetica dei singoli valori di X puossi considerare come l'altezza del rettangolo di base $t_f - t_i$ equivalente all'area compresa fra l'asse delle ascisse, le ordinate $\varphi(t_i)$ e $\varphi(t_f)$ corrispondenti al principio t_i ed alla fine t_f delle oscillazioni e la curva, cioè

$$T_0 - T' = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{r=m} X_p = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \varphi(t)\, dt \qquad (55)$$

così che il problema è ridotto ad una semplice quadratura, la quale potrà eseguirsi tutte le volte che conosceremo la forma di φ.

Se si potesse ritenere che, in ogni esperimento, la diminuzione dell'amplitudine, e quindi la riduzione del pendolo cicloidale che immediatamente ne dipende, segua sempre una legge costante e nota, e le osservazioni dell'amplitudine non dovessero servire che a determinare le costanti della formola da cui quella legge è espressa (parametri della curva) basterebbe introdurre nella (55) la funzione nota e poi eseguire la integrazione.

Invece bisogna ammettere in linea di rigore che, in ogni esperimento, vi sia bensì una legge principale che regola approssimativamente la diminuzione dell'amplitudine, ma che questa legge sia sensibilmente modificata dall'intervento di cause perturbatrici irregolari ordinariamente abbastanza piccole.

Il ricercare per ogni esperimento la legge vera di diminuzione dell'amplitudine col mezzo di poche osservazioni di questo elemento, inquinate inevitabilmente da errori accidentali, non sarebbe utile in pratica, nè condurrebbe ordinariamente allo scopo.

Il partito che si può trarre da un piccolo numero di amplitudini osservate è di dedurre una legge empirica della diminuzione dell'amplitudine esprimendola per mezzo di una formola interpolatoria a coefficienti determinati col mezzo delle amplitudini osservate.

Si viene con ciò ad ammettere che, entro i limiti di tempo abbracciati dalle osservazioni, la legge sia esprimibile per un polinomio algebrico di grado eguale al numero dei valori osservati per l'amplitudine meno uno, ovvero sia rappresentabile geometricamente da una linea di ordine eguale a quel grado condotta a passare per tutti i punti individuati dalle singole osservazioni. — Supposto, p. es., che i valori osservati

dell'amplitudine sieno *cinque*, si potrà con essi calcolare la formola d' interpolazione a cinque costanti:

$$X = a + b\,t + c\,t^2 + f\,t^3 + g\,t^4 = \varphi(t) \qquad (56)$$

che rappresenterà una linea del quarto ordine. Ottenuta questa, si ha:

$$\int_{t_i}^{t_f} \varphi(t)dt = a(t_f - t_i) + \frac{b}{2}\left(t_f^2 - t_i^2\right) + \frac{c}{3}\left(t_f^3 - t_i^3\right) + \frac{f}{4}\left(t_f^4 - t_i^4\right) + \frac{g}{5}\left(t_f^5 - t_i^5\right). \qquad (57)$$

Supposto di contare il tempo t dall' istante di una osservazione, il primo termine a della (56) rappresenta il valore di X dato dall'osservazione al tempo *zero*, e il termine $a(t_f - t_i)$ della (57) esprime l'area del rettangolo di altezza a e di base $t_f - t_i$. Ma la curva rappresentante la X all'aumentare di t discende rapidamente verso l'asse delle ascisse, così che, se al tempo *zero* taglia la base superiore del rettangolo ora detto, prima e dopo quell'istante se ne allontana rapidamente. Si capisce allora come i termini successivi al primo nella (57), possano assumere valori comparabili a quello del primo termine, tanto considerati individualmente quanto nel loro complesso, e, per conseguenza, come il calcolo dei loro coefficienti deve essere eseguito con esattezza pari a quella con cui si calcola il primo termine.

Da questo punto di vista si realizzerà un notevole vantaggio sostituendo all'area rettangolare $a(t_f - t_i)$, l'area mistilinea costruita sulla stessa base $t_f - t_i$, racchiusa fra le rette sulle quali sono contate le coordinate X_i ed X_f, e terminata sul quarto lato, invece che dalla retta parallela all'asse delle ascisse e distante a da esso, da una curva facilmente quadrabile, la quale, passando per uno dei punti osservati, e meglio se per più, abbia almeno approssimativamente l'andamento della curva $X = \varphi(t)$. Per avere il vantaggio massimo bisognerebbe far passare una tale linea ausiliaria fra mezzo ai punti che determinano la curva $X = \varphi(t)$, così che la somma di tutti gli altri termini, escluso il primo, fosse nel secondo membro della (57) eguale a zero. Ciò non sarebbe difficile a ottenere, ma l'utilità di soddisfare rigorosamente ad una tale condizione, non compenserebbe la fatica: invece sarà facile ottenere che essa rimanga approssimativamente soddisfatta.

Vediamo intanto quale sia la natura della curva ausiliaria che merita la preferenza. Un primo criterio per la scelta ci è fornito direttamente dalla esperienza. I primi sperimentatori, fra i quali il Borda, trovarono con molta approssimazione che, nei pendoli fisici, gli archi di oscillazione corrispondenti a tempi susseguentisi in progressione aritmetica, formano una serie geometrica. Detta pertanto α_0 l'amplitudine del tempo t_0, ed α_1 l'amplitudine del tempo t, detta Δt la differenza della serie aritmetica, e^{-k} la ragione della serie geometrica, ed $n+1$ il posto dei termini t ed α_1 nelle due serie, avremo:

$$\left.\begin{aligned} t &= t_0 + n\Delta t \\ \alpha_1 &= \alpha_0\, e^{-nk} \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

e si dà alla ragione esponente negativo per indicare che α_1 deve diminuire col tempo. Eliminando n fra le due equazioni si ha:

$$\alpha_1 = \alpha_0\, e^{-\frac{t - t_0}{\Delta t}k},$$

e da questa

$$\left.\begin{aligned} \log \mathrm{hyp}\, \alpha_1 &= \mathrm{A} + \mathrm{B}t \\ \text{avendo posto} \qquad \frac{k\,t_0}{\varDelta t} + \log \mathrm{hyp}\, \alpha_0 &= \mathrm{A} \\ -\frac{k}{\varDelta t} = -\,\mu &= \mathrm{B}\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

La prima di tali equazioni oppure la sua equivalente

$$\alpha_1 = e^{\mathrm{A}+\mathrm{B}t} \tag{60}$$

può considerarsi come una prima espressione approssimativa della legge di diminuzione dell'amplitudine.

Il significato meccanico di detta legge si ha facendo il quoziente differenziale $\frac{d\alpha_1}{dt}$. La sua espressione

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \mathrm{B}\,\alpha_1 = -\,\mu\,\alpha_1 \tag{61}$$

ci dice che l'accelerazione angolare ritardatrice F alla quale è dovuta la diminuzione ininterrotta dell'amplitudine (resistenza dell'aria) è ad ogni istante proporzionale alla velocità angolare V del pendolo (v. equazioni (52) e prima delle (53)), poichè il $\frac{d\alpha_1}{dt}$ rappresenta qui appunto la diminuzione $\varDelta\alpha$ dell'amplitudine nell'unità di tempo assunta eguale al tempo di una oscillazione.

La stessa forma di relazione che passa fra α_1 e t sussiste anche fra X_1 e t, giacchè essendo

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\mathrm{T}'}{16\,\mathrm{R}_1^2}\,\alpha_1^2$$

e quindi

$$\log \mathrm{hyp}\, \mathrm{X}_1 = \log \mathrm{hyp} \frac{\mathrm{T}'}{16\,\mathrm{R}_1^2} + 2 \log \mathrm{hyp}\, c_1$$

sarà:

$$\log \mathrm{hyp}\, \mathrm{X}_1 = a + b\,t$$

se porremo:

$$2\,\mathrm{A} + \log \mathrm{hyp} \frac{\mathrm{T}'}{16\,\mathrm{R}_1^2} = a$$

$$2\,\mathrm{B} = b\,.$$

La linea ausiliaria che sostituirà la retta nella valutazione dell'area limitata superiormente dalla curva $\mathrm{X} = \varphi\,(t)$ avrà per equazione

$$\mathrm{X}_1 = e^{a+bt}\,. \tag{62}$$

Pella determinazione di a e b bastano due osservazioni, ma si potrebbero impiegare allo stesso scopo anche tutte le altre servendosi del metodo dei minimi quadrati. Resterebbe però sempre fra l'area limitata dalla linea X_1 e quella limitata dalla linea X una certa differenza, e volendo procedere con tutto il rigore, bisognerebbe poi valutare una tale differenza per via interpolatoria. Ma qualora si voglia fare questo

calcolo è perfettamente inutile di far concorrere dapprima alla determinazione di a e b tutte le osservazioni col metodo ora detto, e basterà, nel caso delle cinque osservazioni presso a poco equidistanti, determinare b colle due osservazioni estreme e determinare a in modo che la linea X_1 passi p. es. pel punto determinato dalla seconda osservazione, con che si ottiene che la curva X si trovi parte sopra e parte sotto la linea X_1 e che la differenza delle aree limitate da X ed X_1 sia piccolissima. Potremo pertanto assumere come espressione esatta di X

$$X = X_1 + c + f\,t + g\,t^2 + h\,t^3 + m\,t^4\,, \tag{63}$$

per cui la riduzione al pendolo cicloidale, posto per X_1 il suo valore, sarà:

$$\left.\begin{aligned} &T_0 - T' = \frac{1}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} \varphi(t)\,dt = \frac{e^{a+bt_f} - e^{a+bt_i}}{b\,(t_f - t_i)} + \varepsilon \\ &\text{essendo:} \\ &\varepsilon = c + \frac{f}{2}(t_f + t_i) + \frac{g}{3}\frac{t_f^3 - t_i^3}{t_f - t_i} + \frac{h}{4}\frac{t_f^4 - t_i^4}{t_f - t_i} + \frac{m}{5}\frac{t_f^5 - t_i^5}{t_f - t_i} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

una quantità molto piccola.

Affinchè ognuno degli ultimi quattro termini di ε colla introduzione dei valori di t_f e t_i non vada ad assumere valore maggiore del proprio coefficiente e quindi non abbia ad ingrandirsi l'errore eventuale del coefficiente stesso, convien scegliere l'unità di misura di t così che, prendendo per origine del tempo il tempo della osservazione di mezzo, l' intervallo delle osservazioni estreme sia presso a poco di *due* unità.

Ho applicato queste ultime formole a qualche caso particolare e ho trovato che la somma dei termini componenti ε è al dissotto di una unità del 6° ordine decimale, così che, trascurando ε, si ha già nel primo termine un valore molto prossimo al vero della riduzione al pendolo cicloidale.

Volendo tuttavia raggiungere col primo termine di X un valore della riduzione ancora più approssimato conviene ricorrere ad un'altra espressione di X_1. Si ricordi perciò che $\frac{d\alpha_1}{dt} = -\mu\,\alpha_1$ significa *resistenza dell'aria proporzionale alla velocità angolare*, cioè una resistenza espressa pel primo termine di una serie rappresentante (pel teorema di Maclaurin) una funzione della velocità positiva, subordinata tale funzione alla sola condizione di annullarsi per $V = 0$. È logico quindi ammettere che una maggiore approssimazione si otterrà assumendo per espressione della resistenza dell'aria la somma dei due primi termini della serie, in luogo di uno soltanto, cioè aggiungendo al termine proporzionale alla velocità angolare quello proporzionale al quadrato della velocità stessa. In tale ipotesi, per quanto è stato già detto (v. equazioni (52) e (53)), la diminuzione dell'amplitudine nel tempo di una oscillazione riesce composta di due termini, uno proporzionale alla semplice amplitudine, l'altro al quadrato della medesima. (V. Gronau, Meyer ed altri fra i quali Oppolzer [1]).

[1] Gronau, *Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel, mit Rücksicht auf die Newton'schen Pendelversuche.* Danzig, 1850. Forma parte del *Bericht über die St. Johannis-Schule.* — Meyer O. E., *Pendelsbeobachtungen,* nei Poggendorff's Annalen, vol. CXLII, 1871. — Oppolzer, *Beitrag zur Ermittlung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen* (LXXXVI Band der Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften, 1882 p. 219).

Assumasi dunque

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\mu\,\alpha\,(1 + \nu\,\alpha) \tag{65}$$

e si avrà

$$\frac{d\alpha}{\alpha\,(1+\nu\,\alpha)} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\nu}{1+\nu\,\alpha}\right) d\alpha = -\mu\,d\tau\,,$$

ovvero:

$$d \log \operatorname{hyp} \alpha - d \log \operatorname{hyp} (1 + \nu\,\alpha) = -d\,\mu\,\tau$$

e quindi:

$$\log \operatorname{hyp} \frac{\nu\,\alpha}{1+\nu\,\alpha} = -\mu\,\tau + C \tag{66}$$

ovvero, spostando opportunamente l'origine del tempo di una certa costante k, da determinarsi insieme colle costanti μ e ν mediante le osservazioni, e ponendo

$$\tau + k = t,$$

avremo

$$\log \operatorname{hyp} \frac{\nu\,\alpha}{1+\nu\,\alpha} = -\mu t \tag{67}$$

d'onde deducesi:

$$\alpha = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{e^{\mu t} - 1}\,.$$

Con questa nuova forma di α bisogna ora calcolare la relativa riduzione media all'arco cicloidale. Si ha prima:

$$\alpha^2\,dt = \frac{1}{\nu^2}\,\frac{dt}{(e^{\mu t} - 1)^2} = \frac{dt}{\nu^2}\left(\frac{e^{\mu t}}{(e^{\mu t} - 1)^2} - \frac{e^{\mu t}}{e^{\mu t} - 1} + 1\right)$$

$$= \frac{-1}{\mu\,\nu^2}\left(d\frac{1}{e^{\mu t} - 1} + d \log \operatorname{hyp} (e^{\mu t} - 1) - d\,\mu\,t\right)$$

e pertanto

$$\int_{t_i}^{t_f} \alpha^2\,dt = -\frac{1}{\mu\,\nu^2}\left(\frac{1}{e^{\mu t} - 1} - \mu t + \log \operatorname{hyp} (e^{\mu t} - 1)\right)_{t_i}^{t_f}$$

$$= -\frac{1}{\mu\,\nu^2}\left(\frac{1}{e^{\mu t} - 1} - \log \operatorname{hyp} \frac{e^{\mu t}}{e^{\mu t} - 1}\right)_{t_i}^{t_f}.$$

Ponendo allora

$$\frac{1}{e^{\mu t} - 1} - \log \operatorname{hyp} \frac{e^{\mu t}}{e^{\mu t} - 1} = \varphi\,(\mu t) \tag{68}$$

avremo:

$$\int_{t_i}^{t_f} \alpha^2\,dt = -\frac{1}{\mu\,\nu^2}\,\{\,\varphi\,(\mu\,t_f) - \varphi\,(\mu\,t_i)\,\}\,.$$

E pertanto si avrà la riduzione media così espressa:

$$T_0 - T' = \frac{T'}{16\,R_1^2\,\mu\,\nu^2\,(t_f - t_i)}\,\{\,\varphi\,(\mu\,t_f) - \varphi\,(\mu\,t_i)\,\} + \Delta \tag{69}$$

indicando con Δ la somma dei piccoli termini complementari analoghi a quelli contenuti in ε. La correzione Δ sarà sempre trascurabile.

Siccome $\varphi(\mu t_f)$ è sempre minore di $\varphi(\mu t_i)$, questa riduzione è realmente negativa. Ne è grandemente facilitato il calcolo dalla *Tavola* alla pag. 55 e seguenti, dalla quale coll'argomento $\log \mu t$ si può desumere il valore di $\log \varphi(\mu t)$ non che il $\log \nu\alpha$.

Occorre però di avere determinato preventivamente colle osservazioni i parametri μ, ν, k. Per tale determinazione è necessario di avere tre osservazioni indipendenti dell'amplitudine e i tempi corrispondenti. Sieno α, α_1, α_2 le amplitudini osservate ai tempi τ, τ_1, τ_2. Avremo le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \log \text{hyp} \frac{\nu\alpha}{1+\nu\alpha} &= -\mu(\tau+k) \\ \log \text{hyp} \frac{\nu\alpha_1}{1+\nu\alpha_1} &= -\mu(\tau_1+k) \\ \log \text{hyp} \frac{\nu\alpha_2}{1+\nu\alpha_2} &= -\mu(\tau_2+k)\,. \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Sottraendo dalla prima di queste successivamente la seconda e la terza, con che rimane eliminato k, abbiamo le due equazioni in μ e ν:

$$\left.\begin{aligned} \log \text{hyp} \frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{1+\nu\alpha_1}{1+\nu\alpha} &= \mu(\tau_1-\tau) \\ \log \text{hyp} \frac{\alpha}{\alpha_2}\frac{1+\nu\alpha_2}{1+\nu\alpha} &= \mu(\tau_2-\tau)\,. \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Ponendo allora

$$e^{\mu(\tau_2-\tau)} = x$$

e

$$\frac{\tau_1-\tau}{\tau_2-\tau} = \lambda \quad (72)$$

per cui λ viene ad essere numero indipendente dall'unità di misura del tempo e minore di *uno*, sarà

$$e^{\mu(\tau_1-\tau)} = x^\lambda$$

e le due equazioni (71) prenderanno la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{1+\nu\alpha_1}{1+\nu\alpha} &= x^\lambda \\ \frac{\alpha}{\alpha_2}\frac{1+\nu\alpha_2}{1+\nu\alpha} &= x \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

fra le quali eliminando ν si ottiene

$$\alpha_2(\alpha-\alpha_1)\,x = \alpha_1(\alpha-\alpha_2)\,x^\lambda - \alpha(\alpha_1-\alpha_2)\,.$$

Da questa equazione, ponendo

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha-\alpha_1} = \text{A} \quad , \quad \frac{\alpha}{\alpha_2}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha-\alpha_1} = \text{B} \quad (74)$$

per cui è sempre

$$\text{A} - \text{B} = 1\,, \quad (75)$$

abbiamo l'equazione trascendente

$$x = \text{A}\,x^\lambda - \text{B}\,, \quad (76)$$

e la incognita x di questa equazione sarà indipendente, non solo dalla unità di misura

del tempo ma anche dall'unità di misura delle amplitudini. Dedotto dalla stessa il valore di x, si ottiene il valore di μ dalla equazione:

$$\mu = \frac{1}{\tau_2 - \tau} \frac{\log x}{\log e} \tag{77}$$

dalla quale espressione si riconosce che il parametro μ è direttamente proporzionale alla grandezza dell'unità di misura con cui si esprime un dato intervallo di tempo. — Infatti se l'unità venga raddoppiata il numero rappresentante il dato intervallo $\tau_2 - \tau$ sarà dimezzato e quindi sarà raddoppiato il valore di μ. Pertanto ove siasi determinato μ per una certa unità di tempo sarà sempre facile ridurlo ad altra unità qualunque. Se fosse opportuno dare un nome a μ lo si potrebbe denominare *modulo del tempo*.

Si ottiene poi per doppia via

$$\nu = \frac{\alpha_2 x - \alpha}{\alpha\alpha_2 (1 - x)} = \frac{\alpha_1 x^\lambda - \alpha}{\alpha\alpha_1 (1 - x^\lambda)} . \tag{78}$$

Il parametro ν come vedesi è indipendente dall'unità di misura del tempo, ma invece è direttamente proporzionale all'unità di misura delle amplitudini e potrebbe pertanto assumere il nome di *modulo dell'amplitudine*.

Finalmente per triplice via si ottiene:

$$k = \frac{1}{\mu \log e} \log \frac{1 + \nu\alpha}{\nu\alpha} - \tau = \frac{1}{\mu \log e} \log \frac{1 + \nu\alpha_1}{\nu\alpha_1} - \tau_1 = \frac{1}{\mu \log e} \log \frac{1 + \nu\alpha_2}{\nu\alpha_2} - \tau_2 \tag{79}$$

e si potrebbe dire k il *complemento del tempo* essendo il tempo di cui si deve spostare la origine di τ perchè alla nuova origine sia $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Infatti avendosi $e^{\mu t} = \frac{1 + \nu\alpha}{\nu\alpha}$, nè potendo ammettersi che per $t = 0$ sia $\alpha = \infty$, sarà invece consentaneo alla natura delle cose supporre $\alpha = \operatorname{tg} \alpha$ e allora per $t = 0$ essendo $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ sarà $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

La deduzione del valore di x dalla equazione trascendente (76) si fa per tentativi e successive approssimazioni. Sarà agevolato il còmpito se le tre osservazioni, dalle quali dipende il valore di x, sieno così distribuite che $\frac{1}{\lambda}$ sia prossimamente uno dei più piccoli numeri interi, cioè sia $\frac{1}{\lambda} = 2 + \omega$ oppure $\frac{1}{\lambda} = 3 + \omega$, ed in generale $= m + \omega$, essendo m un piccolo numero intero e ω una piccola frazione positiva o negativa.

Allora, trascurando dapprima ω, avremo prossimamente

$$x = \mathrm{A}\, x^{\frac{1}{m}} - \mathrm{B} \tag{80}$$

e ponendo $x^{\frac{1}{m}} = y$, quindi $x = y^m$, avremo:

$$y^m = \mathrm{A} y - \mathrm{B},$$

che sarà una equazione del 2° o del 3° grado, secondo che sarà $m = 2$ oppure $m = 3$.

Siccome $A - B = 1$ questa equazione sarà sempre soddisfatta da $y = 1$; ma evidentemente un tale valore non serve.

Se $m = 2$ le due radici della equazione sono:

$$y_1 = 1 \qquad , \qquad y_2 = B$$

e pertanto, escluso y_1, il primo valore da assumere per x, in tal caso, sarà

$$x = y_2^2 = B^2 , \tag{81}$$

Se $m = 3$ le tre radici della equazione sono:

$$y_1 = 1 \qquad , \qquad y_2 = \sqrt{B + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} \qquad , \qquad y_3 = -\sqrt{B + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} .$$

Oltre la prima radice sarà qui da escludere anche la terza, perchè darebbe x negativo, quindi, in tale caso, il primo valore da assumere per x sarà:

$$x = y_2^3 = \left(\sqrt{B + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}\right)^3 . \tag{82}$$

Se fosse $m > 3$ converrebbe ricercare la radice utile con un metodo di approssimazione numerica, per es. con quello del Ruffini.

Nel secondo tentativo si può assumere per valore di x quello che risulta dal seguente calcolo. Ponendo

$$\lambda = M + \sigma \tag{82)'$$

dove $M = \dfrac{1}{m}$, indichiamo con x_1 il valore di x che soddisfa alla equazione:

$$x_1 = x_1^M - B$$

e determinato nel modo detto di sopra. Il vero valore di x deve invece soddisfare alla equazione

$$x = A\,[x_1 + (x - x_1)]^{M+\sigma} - B .$$

Supponendo ora σ abbastanza piccolo, potremo sviluppare il 2° membro secondo le potenze ascendenti di σ, ma fermandoci alle prime potenze inclusive di σ avremo per x un certo valore x_2 più prossimo al vero di quello che sia x_1. Avremo cioè:

$$x_2 = A\,[x_1^M + M\,x_1^{M-1}\,(x_2 - x_1) + x_1^M \log\text{hyp}\, x_1\,\sigma] - B$$

dalla quale, notando che $A\,x_1^M - B = x_1$, si ha:

$$x_2 = x_1 + \frac{A\,x_1^M \log\text{hyp}\, x_1}{1 - M\,A\,x_1^{M-1}}\,\sigma . \tag{83}$$

Introdotti i valori di x_1 e di x_2 nel secondo membro della equazione (80) cioè:

$$x = A\,x^\lambda - B ,$$

nel primo membro otterremo due valori rispettivamente eguali a

$$x_1 + \varDelta x_1 \qquad , \qquad x_2 + \varDelta x_2 .$$

E allora si potrà stabilire un terzo valore approssimativo x_3 mediante la proporzione: Se variando x_1 di $x_2 - x_1$ il $\varDelta x_1$ ha variato di $\varDelta x_2 - \varDelta x_1$ quale variazione $x_3 - x_1$ si dovrà dare ad x_1 affinchè $\varDelta x_1$ varii di $\varDelta x_3 - \varDelta x_1 = -\varDelta x_1$ (volendo $\varDelta x_3 = 0$) cioè di tutto il suo valore?

$$(x_3 - x_1) : (x_2 - x_1) = -\varDelta x_1 : (\varDelta x_2 - \varDelta x_1)$$

d'onde:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{\varDelta x_2 - \varDelta x_1}\,\varDelta x_1 . \tag{84}$$

Se $x_2 - x_1$ è piuttosto grande, sarà preferibile di sostituire nel secondo membro della (80) successivamente due valori x_2 e x_3 pochissimo differenti fra loro. Indicando

rispettivamente con $x_2 + \Delta x_2$ e $x_3 + \Delta x_3$ i valori che assume allora il primo membro, il valore col quale si dovrà fare il nuovo tentativo sarà:

$$x_4 = x_2 - \frac{x_3 - x_2}{\Delta x_3 - \Delta x_2} \Delta x_2 \quad \text{oppure} \quad x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_2}{\Delta x_3 - \Delta x_2} \Delta x_3 \qquad (84)'$$

secondo che Δx_2 è minore oppure maggiore di Δx_3.

Nell' istesso modo, dopo avere ottenuto il Δx_3 si può passare ad un quarto valore x_4 e così via finchè si giunga a soddisfare esattamente la equazione.

Ottenuti i valori dei parametri μ, ν, k coll'aiuto di tre osservazioni disposte opportunamente nel modo sopra detto, si può coll'aiuto delle equazioni (67) o colla Tavola già citata, calcolare i valori di α corrispondenti ai tempi τ delle altre amplitudini osservate, e le differenze *osservazione-calcolo* daranno ad un tempo il mezzo di calcolare i coefficienti del polinomio Δ (formola (69)) analogo al polinomio ε (formola (64)), e di vedere fino a qual punto la espressione (65) rappresenti la legge di diminuzione dell'amplitudine.

Le osservazioni dimostrano (come si vedrà a suo luogo) che le differenze *osservazione-calcolo* sono dell'ordine degli errori inevitabili di osservazione nell'amplitudine α, che Δ è una piccola quantità trascurabile e che la (65) rappresenta veramente la legge di diminuzione dell'amplitudine, entro ai limiti degli errori di osservazione.

Se avendo eseguito una serie di osservazioni di amplitudini (in numero maggiore di tre) si volesse far servire queste, non solo a determinare la riduzione al pendolo cicloidale, ma anche a determinare i più probabili valori dei parametri μ, ν, k in quanto si faccia concorrere alla determinazione di questi le osservazioni tutte, si farà uso del metodo dei minimi quadrati. Perciò bisognerà prima sulle (67) calcolare i coefficienti dei termini di correzione delle equazioni di condizione.

Indicando con α_c l'amplitudine calcolata colla formola:

$$\alpha_c = \frac{1}{\nu} \frac{1}{e^{\mu(\tau+k)} - 1}$$

rispondentemente al tempo τ, e detta α_0 l'amplitudine osservata a questo medesimo tempo, potremo istituire la equazione di condizione:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Delta\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \Delta\nu + \frac{\partial \alpha}{\partial k} \Delta k + (\alpha_c - \alpha_0) = 0 . \qquad (85)$$

Di equazioni di condizione simili a questa ve ne saranno tante quante sono le osservazioni e fra esse ve ne saranno tre, cioè quelle relative alle osservazioni che hanno servito a dare i valori approssimativi di μ, ν, k, nelle quali il termine $\alpha_c - \alpha_0$ sarà nullo. I valori $\Delta\mu, \Delta\nu, \Delta k$ potranno allora determinarsi in modo che riesca minima la somma dei quadrati degli errori, qualora nel calcolo delle amplitudini si adoperino i valori $\mu + \Delta\mu$, $\nu + \Delta\nu$, $k + \Delta k$.

I valori dei tre coefficienti si ottengono subito differenziando logaritmicamente la equazione

$$\nu \alpha (e^{\mu(\tau+k)} - 1) = 1$$

e se ne ricava:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} = - \nu \alpha^2 e^{\mu t} t \quad ; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = - \frac{\alpha}{\nu} \quad ; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial k} = - \nu \alpha^2 e^{\mu t} \mu . \qquad (86)$$

§ XI. *Tabella per calcolare l'amplitudine di oscillazione al tempo τ, e per ridurre al pendolo cicloidale (arco infinitamente piccolo) la durata media delle oscillazioni compiute dal pendolo fra i tempi τ_i e τ_f.*

Devono essere note le costanti k, μ, ν.

Si formano i tempi:

$$t = k + \tau \quad , \quad t_i = k + \tau_i \quad , \quad t_f = k + \tau_f$$

e gli *argomenti*

$$\log \mu\, t \quad , \quad \log \mu\, t_i \quad , \quad \log \mu\, t_f$$

coi quali si entra nella *prima colonna.*

La *seconda colonna* dà allora

$$\log \nu\, \alpha = \log \frac{1}{e^{\mu t} - 1}$$

donde si ha:

$$\log \alpha = \log \nu\, \alpha - \log \nu$$

essendo α l'amplitudine al tempo τ.

La *quarta colonna* dà

$$\log \varphi\, (\mu\, t_i) \qquad \text{e} \qquad \log \varphi\, (\mu\, t_f)$$

quindi la cercata *riduzione della durata media* T'

$$T_0 - T' = \frac{T'}{16\, R_1^2\, \mu\, \nu^2\, (t_f - t_i)} \left\{ \varphi\, (\mu\, t_f) - \varphi\, (\mu\, t_i) \right\},$$

dove è da porre $R_1 = 3438'$.

$\log \mu t$	$\log \nu\, \alpha$	diff.	$\log \varphi\, (\mu t)$	diff.
9.700	0.1866	12	9.7824	19
1	854	13	805	20
2	841	13	785	19
3	828	12	766	20
4	816	13	746	20
9.705	803	13	726	19
6	790	13	707	20
7	777	13	687	20
8	764	12	667	20
9	752	13	647	19
9.710	739	13	628	20
1	726	13	608	20
2	713	12	588	19
3	701	13	569	20
4	688	13	549	20
9.715	0.1675	13	9.7529	20
6	662	13	509	20
7	649	13	489	19
8	636	12	470	20
9	624	13	450	20
9.720	611	13	430	20
1	598	13	410	20
2	585	13	390	20
3	572	13	370	20
4	559	13	350	20
9.725	546	13	330	20
6	533	12	310	20
7	521	13	290	20
8	508	13	270	20
9	495	13	250	20

log μt	log $\nu\, a$	diff	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.	log μt	log $\nu\, a$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.
9.730	0.1482	13	9.7230	20	9.765	0 1025	13	9.6514	21
1	469	13	210	20	6	012	13	493	21
2	456	13	190	21	7	0.0999	14	472	21
3	443	13	169	20	8	985	13	451	21
4	430	13	149	20	9	972	13	430	21
9.735	417	13	129	20	9.770	959	13	409	21
6	404	13	109	21	1	946	14	388	21
7	391	13	088	20	2	932	13	367	21
8	378	13	068	20	3	919	13	346	21
9	365	13	048	20	4	906	13	325	21
9.740	352	13	028	21	9.775	893	14	304	21
1	339	13	007	20	6	879	13	283	21
2	326	13	9.6987	20	7	866	13	262	21
3	313	13	967	21	8	853	13	241	21
4	300	13	946	20	9	840	14	220	21
9.745	287	13	926	21	9.780	826	13	199	22
6	274	13	905	20	1	813	13	177	21
7	261	13	885	21	2	800	14	156	21
8	248	13	864	20	3	786	13	135	21
9	235	13	844	21	4	773	14	114	21
9.750	222	13	823	20	9.785	759	13	093	22
1	209	13	803	21	6	746	13	071	21
2	196	13	782	20	7	733	14	050	21
3	183	13	762	21	8	719	13	029	22
4	170	14	741	20	9	706	13	007	21
9.755	156	13	721	21	9.790	693	14	9.5986	21
6	143	13	700	21	1	679	13	965	22
7	130	13	679	20	2	666	14	943	21
8	117	13	659	21	3	652	13	922	22
9	104	13	638	21	4	639	13	900	21
9.760	091	13	617	20	9.795	626	14	879	22
1	078	13	597	21	6	612	13	857	21
2	065	14	576	21	7	599	14	836	22
3	051	13	555	21	8	585	13	814	21
4	038	13	534	20	9	572	14	793	22

log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.
9.800	0.0558	13	9.5771	21
1	545	14	750	22
2	531	13	728	22
3	518	14	706	21
4	504	13	685	22
9.805	491	14	663	22
6	477	13	641	22
7	464	14	619	22
8	450	14	597	21
9	436	13	576	22
9.810	423	14	554	22
1	409	13	532	22
2	396	14	510	22
3	382	14	488	22
4	368	13	466	22
9.815	355	14	444	21
6	341	13	423	22
7	328	14	401	22
8	314	14	379	22
9	300	13	357	23
9.820	287	14	334	22
1	273	14	312	22
2	259	13	290	22
3	246	14	268	22
4	232	14	246	22
9.825	218	13	224	22
6	205	14	202	23
7	191	14	179	22
8	177	14	157	22
9	163	13	135	23
9.830	150	14	112	22
1	136	14	090	22
2	122	14	068	23
3	108	14	045	22
4	094	13	023	23

log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.
9.835	0.0081	14	9.5000	22
6	067	14	9.4978	23
7	053	14	955	22
8	039	14	933	22
9	025	14	911	23
9.840	011	13	888	23
1	9.9998	14	865	22
2	984	14	843	23
3	970	14	820	23
4	956	14	797	22
9.845	942	14	775	22
6	928	14	753	23
7	914	14	730	23
8	900	14	707	23
9	886	13	684	23
9.850	873	14	661	23
1	859	14	638	23
2	845	14	615	23
3	831	14	592	23
4	817	14	569	22
9.855	803	14	547	23
6	789	14	524	23
7	775	14	501	23
8	761	14	478	23
9	747	15	455	24
9.860	732	14	431	23
1	718	14	408	23
2	704	14	385	23
3	690	14	362	23
4	676	14	339	23
9.865	662	14	316	23
6	648	14	293	24
7	634	14	269	23
8	620	14	246	23
9	606	15	223	24

log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.
9.870	9.9591	14	9 4199	23
1	577	14	176	23
2	563	14	153	24
3	549	14	129	23
4	535	15	106	24
9.875	520	14	082	23
6	506	14	059	23
7	492	14	036	24
8	478	14	012	24
9	464	15	9.3988	23
9.880	449	14	965	24
1	435	14	941	24
2	421	15	917	24
3	406	14	893	23
4	392	14	870	24
9.885	378	15	846	24
6	363	14	822	24
7	349	14	798	24
8	335	15	774	23
9	320	14	751	24
9.890	306	14	727	24
1	292	15	703	24
2	277	14	679	24
3	263	15	655	24
4	248	14	631	24
9.895	234	15	607	24
6	219	14	583	24
7	205	14	559	24
8	191	15	535	25
9	176	14	510	24
9.900	162	15	486	24
1	147	14	462	24
2	133	15	438	25
3	118	14	413	24
4	104	15	389	24

log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.
9.905	9.9089	15	9.3365	25
6	074	14	340	24
7	060	15	316	24
8	045	14	292	25
9	031	15	267	24
9.910	016	15	243	25
1	001	14	218	24
2	9.8987	15	194	25
3	972	14	169	24
4	958	15	145	25
9.915	943	15	120	24
6	928	14	096	25
7	914	15	071	25
8	899	15	046	25
9	884	15	021	25
9.920	869	14	9.2996	24
1	855	15	972	25
2	840	15	947	25
3	825	15	922	25
4	810	14	897	25
9.925	796	15	872	25
6	781	15	847	25
7	766	15	822	25
8	751	15	797	25
9	736	14	772	25
9.930	722	15	747	25
1	707	15	722	25
2	692	15	697	25
3	677	15	672	25
4	662	15	647	26
9.935	647	15	621	25
6	632	15	596	26
7	617	15	570	25
8	602	15	545	25
9	587	15	520	25

log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi(\mu t)$	diff.	log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi(\mu t)$	diff.
9.940	9.8572	15	9.2495	26	9.975	9.8040	15	9.1585	26
1	557	15	469	25	6	025	16	559	27
2	542	15	444	26	7	009	15	532	27
3	527	15	418	25	8	9.7994	16	505	26
4	512	15	393	26	9	978	15	479	27
9.945	497	15	367	25	9.980	963	16	452	27
6	482	15	342	26	1	947	16	425	27
7	467	15	316	26	2	931	15	398	27
8	452	15	290	25	3	916	16	371	26
9	437	15	265	26	4	900	15	345	27
9.950	422	15	239	26	9.985	885	16	318	27
1	407	15	213	26	6	869	15	291	27
2	392	15	187	25	7	854	16	264	27
3	377	16	162	26	8	838	16	237	27
4	361	15	136	26	9	822	15	210	27
9.955	346	15	110	26	9.990	807	16	183	27
6	331	15	084	26	1	791	16	156	28
7	316	15	058	26	2	775	16	128	27
8	301	16	032	26	3	759	15	101	27
9	285	15	006	26	4	744	16	074	27
9.960	270	15	9.1980	26	9.995	728	16	047	28
1	255	15	954	26	6	712	15	019	27
2	240	16	928	26	7	697	16	9.0992	27
3	224	15	902	26	8	681	16	965	28
4	209	15	876	27	9	665	16	937	27
9.965	194	16	849	26	0.000	649	16	910	28
6	178	15	823	26	1	633	16	882	27
7	163	15	797	27	2	617	15	855	28
8	148	16	770	26	3	602	16	827	27
9	132	15	744	27	4	586	16	800	28
9 970	117	15	717	26	0.005	570	16	772	28
1	102	16	691	26	6	554	16	744	28
2	086	15	665	27	7	538	16	716	27
3	071	16	638	26	8	522	16	689	28
4	055	15	612	27	9	506	16	661	28

log μt	log ν a	diff.	log φ (μt)	diff.	log μt	log ν a	diff.	log φ (μt)	diff.
0.010	9 7490	16	9.0633	28	0.045	9.6921	16	8.9635	29
1	474	16	605	28	6	905	17	606	30
2	458	16	577	28	7	888	16	576	29
3	442	16	549	28	8	872	17	547	29
4	426	16	521	28	9	855	17	518	30
0.015	410	16	493	28	0.050	838	16	488	30
6	394	16	465	28	1	822	17	458	30
7	378	16	437	28	2	805	17	428	29
8	362	16	409	28	3	788	16	399	29
9	346	16	381	28	4	772	17	370	29
0.020	330	17	353	28	0.055	755	17	341	30
1	313	16	325	29	6	738	17	311	30
2	297	16	296	28	7	721	16	281	30
3	281	16	268	29	8	705	17	251	30
4	265	16	239	28	9	688	17	221	29
0.025	249	16	211	28	0.060	671	17	192	30
6	233	17	183	28	1	654	17	162	30
7	216	16	155	29	2	637	17	132	30
8	200	16	126	29	3	620	17	102	30
9	184	16	097	28	4	603	16	072	30
0.030	168	17	069	29	0.065	587	17	042	30
1	151	16	040	29	6	570	17	012	30
2	135	17	011	28	7	553	17	8.8982	3
3	118	16	8.9983	29	8	536	17	952	31
4	102	16	954	29	9	519	17	921	30
0.035	086	16	925	29	0.070	502	17	891	30
6	070	17	896	29	1	485	17	861	30
7	053	16	867	29	2	468	17	831	31
8	037	17	838	29	3	451	17	800	31
9	020	16	809	29	4	434	17	769	31
0.040	004	17	780	29	0.075	417	17	738	30
1	9.6987	16	751	29	6	400	18	708	30
2	971	17	722	29	7	382	17	678	31
3	954	16	693	29	8	365	17	647	31
4	938	17	664	29	9	348	17	616	31

log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.	log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.
0.080	9.6331	17	8 8585	30	0.115	9.5717	18	8.7483	33
1	314	17	555	31	6	699	18	450	33
2	297	18	524	31	7	681	18	417	33
3	279	17	493	30	8	663	18	384	33
4	262	17	463	31	9	645	18	351	32
0.085	245	18	432	31	0.120	627	18	319	32
6	227	17	401	32	1	609	18	287	33
7	210	17	369	31	2	591	18	254	33
8	193	18	338	31	3	573	18	221	33
9	175	17	307	31	4	555	18	188	33
0.090	158	17	276	31	0.125	537	18	155	33
1	141	18	245	31	6	519	18	122	33
2	123	17	214	31	7	501	18	089	33
3	106	18	183	32	8	483	18	056	33
4	088	17	151	31	9	465	19	023	33
0.095	071	18	120	32	0.130	446	18	8.6990	33
6	053	17	088	31	1	428	18	957	33
7	036	18	057	31	2	410	18	924	33
8	018	17	026	32	3	392	19	891	33
9	001	18	8.7994	32	4	373	18	858	34
0.100	9.5983	17	962	32	0.135	355	18	824	33
1	966	18	930	31	6	337	19	791	33
2	948	18	899	32	7	318	18	758	34
3	930	17	867	32	8	300	18	724	33
4	913	18	835	32	9	282	19	691	34
0.105	895	18	803	31	0.140	263	18	657	34
6	877	17	772	32	1	245	19	623	34
7	860	18	740	33	2	226	18	589	33
8	842	18	707	32	3	208	19	556	34
9	824	18	675	32	4	189	18	522	34
0.110	806	17	643	32	0.145	171	19	488	34
1	789	18	611	32	6	152	19	454	34
2	771	18	579	32	7	133	18	420	34
3	753	18	547	32	8	115	19	386	34
4	735	18	515	32	9	096	18	352	35

log μt	log ν α	diff.	log φ (μt)	diff.	log μt	log ν α	diff.	log φ (μt)	diff.
0.150	9.5078	19	8.6317	34	0.185	9.4409	19	8.5088	36
1	059	19	283	34	6	390	20	052	37
2	040	18	249	34	7	370	20	015	37
3	022	19	215	34	8	350	19	8.4978	36
4	003	19	181	34	9	331	20	942	36
0.155	9.4984	19	147	35	0.190	311	20	906	36
6	965	19	112	35	1	291	19	870	37
7	946	19	077	35	2	272	20	833	36
8	927	18	042	34	3	252	20	797	37
9	909	19	008	35	4	232	20	760	37
0.160	890	19	8.5973	34	0.195	212	19	723	37
1	871	19	939	35	6	193	20	686	37
2	852	19	904	35	7	173	20	649	37
3	833	19	869	35	8	153	20	612	37
4	814	19	834	35	9	133	20	575	37
0.165	795	19	799	35	0.200	113	20	538	36
6	776	19	764	35	1	093	20	502	37
7	757	19	729	35	2	073	20	465	37
8	738	20	694	35	3	053	20	428	37
9	718	19	659	36	4	033	20	391	38
0.170	699	19	623	35	0.205	013	20	353	37
1	680	19	588	35	6	9.3993	20	316	38
2	661	19	553	36	7	973	20	278	38
3	642	19	517	36	8	953	20	240	38
4	623	20	481	35	9	933	21	202	38
0.175	603	19	446	35	0.210	912	20	164	37
6	584	19	411	35	1	892	20	127	38
7	5[illegible]5	20	376	36	2	872	20	089	38
8	545	19	340	36	3	852	21	051	38
9	526	20	304	36	4	831	20	013	38
0.180	506	19	268	36	0.215	811	20	8.3975	38
1	487	19	232	36	6	791	21	937	38
2	468	20	196	36	7	770	20	899	38
3	448	19	160	36	8	750	21	861	38
4	429	20	124	36	9	729	20	823	38

$\log \mu t$	$\log \nu \alpha$	diff.	$\log \varphi(\mu t)$	diff.
0.220	9.3709	21	8.3785	38
1	688	20	747	39
2	668	21	708	38
3	647	20	670	38
4	627	21	632	39
0.225	606	21	593	38
6	585	20	555	39
7	565	21	516	39
8	544	21	477	39
9	523	20	438	38
0.230	503	21	400	39
1	482	21	361	39
2	461	21	322	40
3	440	21	282	40
4	419	21	242	39
0.235	398	21	203	40
6	377	21	163	39
7	356	21	124	39
8	335	21	085	40
9	314	21	045	39
0.240	293	21	006	40
1	272	21	8.2966	40
2	251	21	926	40
3	230	21	886	39
4	209	22	847	39
0.245	187	21	808	40
6	166	21	768	39
7	145	21	729	40
8	124	22	689	40
9	102	21	649	41
0.250	081	22	608	41
1	059	21	567	40
2	038	22	527	40
3	016	21	487	41
4	9.2995	22	446	41

$\log \mu t$	$\log \nu \alpha$	diff.	$\log \varphi(\mu t)$	diff.
0.255	9.2973	21	8.2405	40
6	952	22	365	41
7	930	21	324	41
8	909	22	283	42
9	887	22	241	41
0.260	865	22	200	41
1	843	21	159	40
2	822	22	119	41
3	800	22	078	41
4	778	22	037	42
0.265	756	22	8.1995	41
6	734	22	954	42
7	712	22	912	42
8	690	22	870	42
9	668	22	828	41
0.270	646	22	787	42
1	624	22	745	42
2	602	22	703	42
3	580	22	661	42
4	558	22	619	42
0.275	536	23	577	43
6	513	22	534	42
7	491	22	492	42
8	469	22	450	42
9	447	23	408	43
0.280	424	22	365	43
1	402	23	322	43
2	379	22	279	43
3	357	23	236	43
4	334	22	193	43
0.285	312	23	150	43
6	289	22	107	43
7	267	23	064	43
8	244	23	021	43
9	221	22	8.0978	43

log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.	log μt	log $\nu\,\alpha$	diff.	log $\varphi\,(\mu t)$	diff.
0.290	9.2199	23	8.0935	44	0.325	9.1381	24	7.9375	46
1	176	23	891	43	6	357	25	329	47
2	153	23	848	43	7	332	24	282	47
3	130	22	805	43	8	308	24	235	47
4	108	23	762	43	9	284	24	188	47
0.295	085	23	719	43	0.330	260	24	141	47
6	062	23	676	43	1	236	25	094	47
7	039	23	633	43	2	211	24	047	47
8	016	23	590	44	3	187	24	000	47
9	9.1993	23	546	44	4	163	25	7.8953	47
0.300	970	24	502	45	0.335	138	24	906	47
1	946	23	457	45	6	114	25	859	47
2	923	23	412	44	7	089	24	812	47
3	900	23	368	45	8	065	25	765	47
4	877	23	323	45	9	040	24	718	47
0.305	854	24	278	44	0.340	016	25	671	47
6	830	23	234	44	1	9.0991	25	624	48
7	807	23	190	45	2	966	25	576	48
8	784	24	145	45	3	941	24	528	47
9	760	23	100	45	4	917	25	481	48
0.310	737	24	055	45	0.345	892	25	433	49
1	713	23	010	45	6	867	25	384	48
2	690	24	7.9965	44	7	842	25	336	49
3	666	23	921	45	8	817	25	287	48
4	643	24	876	45	9	792	25	239	48
0.315	619	24	831	45	0.350	767	25	191	47
6	595	23	786	46	1	742	25	144	48
7	572	24	740	46	2	717	25	096	48
8	548	24	694	46	3	692	26	048	49
9	524	24	648	45	4	666	25	7.7999	49
0.320	500	24	603	45	0.355	641	25	950	49
1	476	24	558	46	6	616	25	901	48
2	452	23	512	45	7	591	26	853	49
3	429	24	467	46	8	565	25	804	48
4	405	24	421	46	9	540	26	756	49

$\log \mu t$	$\log \nu \alpha$	diff.	$\log \varphi(\mu t)$	diff.	$\log \mu t$	$\log \nu \alpha$	diff.	$\log \varphi(\mu t)$	diff.
0.360	9.0514	25	7.7707	50	0.380	8.9996	27	7.6703	51
1	489	26	657	50	1	969	26	652	51
2	463	25	607	50	2	943	27	601	51
3	438	26	557	50	3	916	26	550	52
4	412	26	507	50	4	890	27	498	51
0.365	386	26	457	49	0.385	863	27	447	52
6	360	25	408	50	6	836	26	395	52
7	335	26	358	50	7	810	27	343	52
8	309	26	308	50	8	783	27	291	52
9	283	26	258	50	9	756	27	239	52
0.370	257	26	208	50	0.390	729	26	187	53
1	231	26	158	51	1	703	27	134	52
2	205	26	107	50	2	676	27	082	52
3	179	26	057	51	3	649	27	030	52
4	153	26	006	51	4	622	27	7.5978	53
0.375	127	26	7.6955	50	0.395	595	28	925	53
6	101	26	905	50	6	567	27	872	53
7	075	27	855	51	7	540	27	819	53
8	048	26	804	50	8	513	27	766	53
9	022	26	754	51	9	486		713	

§ XII. *Sull' uso del pendolo filare per determinare l'amplitudine di oscillazione del supporto.*

Sieno A_0 e B_0 rispettivamente il punto di sospensione e il centro di oscillazione del pendolo filare in equilibrio, tav. I, fig. 6, e sieno $A_{\frac{1}{2}}$ e $A_{\frac{3}{2}}$ due punti situati sulla orizzontale di A_0 a eguale brevissima distanza ε da una parte e dall' altra di questo punto.

Ritenendo, per comodità di discorso, che la durata della oscillazione del pendolo filare sia eguale ad un secondo, supponiamo che mettendosi in moto il punto di sospensione ad un certo istante, mezzo secondo dopo esso arrivi in $A_{\frac{1}{2}}$, dopo un secondo intero torni in A_0, dopo tre mezzi secondi sia in $A_{\frac{3}{2}}$, dopo due secondi interi sia ancora in A_0 e così via: insomma supponiamo che il punto di sospensione compia oscillazioni isocrone ciascuna della durata di un secondo e dell'amplitudine ε in modo da ripassare al principio di ogni minuto secondo successivo per la sua posizione di equilibrio A_0. Inoltre si supponga che tale movimento oscillatorio segua

le note leggi del pendolo semplice così che, detta y' l'elongazione lineare del punto di sospensione ad un tempo qualunque t, si abbia:

$$y' = \varepsilon \operatorname{sen} [n(t-\tau)] \tag{87}$$

dove τ è il valore che ha t all' istante in cui il punto di sospensione si distacca la prima volta da A_0 per portarsi in $A_{\frac{1}{2}}$ ed n è il coefficiente di accelerazione che esprime essere *eguale ad un secondo la durata della oscillazione.*

Tale essendo il movimento del *punto di sospensione*, importa di vedere quale sarà il conseguente movimento del *centro di oscillazione.*

Non appena il punto di sospensione si è staccato da A_0 per portarsi su $A_{\frac{1}{2}}$, il centro di oscillazione trovasi spostato rispetto alla verticale del punto di sospensione verso dritta cioè negativamente, e assume immediatamente un movimento verso sinistra, cioè verso la verticale istantanea del punto di sospensione, come se partisse da una massima elongazione negativa. Movendosi verso sinistra esso accelera il suo moto fino all'istante in cui avrà raggiunto la verticale istantanea del punto di sospensione e da quel momento in poi rallenterà il movimento, e dopo un *secondo* esatto contato dal principio del suo movimento, si fermerà istantaneamente i B_1, mentre il punto di sospensione retrocedendo da $A_{\frac{1}{2}}$ arriverà in A_0. Perciò alla fine del primo secondo la posizione del pendolo filare sarà A_0 B_1 e sarà B_0 B_1 la sua amplitudine positiva. Nel minuto secondo successivo il centro di oscillazione si muoverà negativamente e alla fine di esso si arresterà momentaneamente in B_2 raggiungendo una massima elongazione negativa, mentre il punto di sospensione, partito da A_0 verso $A_{\frac{3}{2}}$ al principio di detto secondo, sarà ritornato in A_0 dopo avere alla metà del secondo toccato il punto $A_{\frac{3}{2}}$. Pertanto, al principio del terzo minuto secondo il pendolo sarà in una sua massima elongazione negativa misurata dall'arco B_0 B_2: al principio del quarto minuto secondo sarà in una massima elongazione positiva misurata dall'arco B_0 B_3 e così via. Si scorge subito che, continuando il movimento, l'amplitudine della oscillazione va ad ogni oscillazione aumentando.

Dunque il movimento del punto di sospensione genera il movimento oscillatorio del pendolo filare, e, in conseguenza, la spontanea produzione del movimento del pendolo filare è indizio di movimento oscillatorio del punto di sospensione.

Considerando la natura del movimento del pendolo filare si osserva, che ad ogni sua massima elongazione corrisponde la posizione di equilibrio A_0 del punto di sospensione, così che il pendolo filare trovasi sempre in ritardo di mezza oscillazione sul movimento del punto di sospensione. Pertanto, mentre la elongazione lineare del punto di sospensione è espressa dalla (87), la elongazione θ del pendolo filare al tempo t sarà espressa da

$$\theta = \alpha_f \operatorname{sen} \left[n(t-\tau) - \frac{\pi}{2} \right] \tag{88}$$

Infatti per $n(t-\tau) = m\pi$, pel qual valore $y' = o$, è $\theta = \pm \alpha_f$ secondo che m è numero dispari oppure numero pari. Per α_f dovrà intendersi il valore medio dell'amplitudine nel tempo di una oscillazione, dovendo considerarsi l'amplitudine al principio diversa da quella alla fine dell'oscillazione.

Spostando di mezzo secondo l'origine del tempo possiamo anche porre

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \alpha_f \operatorname{sen}\left[n(t-\tau)\right] \\ y' &= \varepsilon \operatorname{sen}\left[n(t-\tau)+\frac{\pi}{2}\right] = \varepsilon \cos\left[n(t-\tau)\right] \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

ed

Se consideriamo ora il moto del pendolo filare come moto pendolare perturbato in causa delle oscillazioni del punto di sospensione, potremo calcolare le variazioni che subiscono i parametri α_f e τ nel tempo di una oscillazione, applicando le formole già dimostrate. Siccome il sistema è flessibile la comunicazione di una accelerazione lineare positiva al punto di sospensione genera un'accelerazione negativa nella elongazione θ, come se il punto di sospensione fosse tenuto fermo e venisse applicata al centro di oscillazione un' accelerazione eguale, parallela ed opposta a quella comunicata al centro di sospensione. Avremo dunque per espressione dell'accelerazione angolare perturbata nel pendolo a filo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\, n^2\alpha_f \operatorname{sen}\left[n\,(t-\tau)\right] - \frac{1}{l}\,\frac{d^2y'}{dt^2} \qquad (90)$$

così che il valore di F da introdurre nelle equazioni generali (46) sarà:

$$\mathrm{F} = -\frac{1}{l}\,\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{n^2}{l}\,\varepsilon \cos\left[n\,(t-\tau)\right]. \qquad (91)$$

Dalla integrazione delle equazioni (46) si ha quindi, con tale valore di F,

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\alpha_f &= \frac{\pi}{2}\,\frac{\varepsilon}{l} \,. \\ \varDelta\tau &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Essendo l' incremento positivo $\varDelta\alpha_f$ una quantità costante, *finchè ε è costante*, si vede che l'amplitudine α_f cresce, per la sola causa dell'oscillazione del supporto, proporzionalmente al tempo e sarà il suo andamento rappresentato geometricamente da una retta inclinata sull'asse delle ascisse, proporzionali a τ, di un angolo ω dato dalla equazione

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\alpha'_f - \alpha_f}{\tau' - \tau}\,,$$

essendo α_f ed α'_f le amplitudini corrispondonti ai tempi τ e τ'.

Detto m il numero delle oscillazioni compiute dal pendolo filare nel tempo $\tau'-\tau$ risulta

$$\varDelta\alpha_f = \frac{\alpha'_f - \alpha_f}{m}$$

e quindi, per la prima delle (92),

$$\varepsilon = \frac{2l}{\pi}\;\frac{\alpha'_f - \alpha_f}{m}\,. \qquad (93)$$

Di qui il metodo facile per determinare ε qualora sia possibile di ottenere $\alpha'_f - \alpha_f$ indipendente, almeno approssimativamente, da altre cause perturbatrici.

Quando ε sia variabile in modo continuo, dovremo considerare i tempi τ e τ' così ravvicinati che nell'intervallo di essi possa ε riguardarsi come costante. Quando

i due tempi si facciano differire della quantità infinitesima $d\tau$ e s'indichi con $d\alpha_f$ la variazione corrispondente in α_f avremo:

$$\varepsilon = \frac{2l}{\pi} \frac{d\alpha_f}{d\tau} \tag{93)'$$

cioè, per avere ε ad un istante qualunque, bisogna prendere il valore $\frac{d\alpha_f}{d\tau}$ della tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla curva rappresentante l'andamento delle α_f fa coll'asse delle τ e moltiplicarla pel coefficiente $\frac{2l}{\pi}$.

Se si ammette che l'amplitudine α del pendolo a reversione, alle cui oscillazioni è dovuto il moto oscillatorio del supporto comune ad esso e al pendolo filare, varii colla legge espressa dalla formola già trovata (67), potremo facilmente avere la conseguente equazione della curva che rappresenta l'andamento dell'amplitudine del pendolo filare, qualora non si metta in conto la resistenza dell'aria.

Infatti essendo, per le equazioni (67) ed (n),

$$\alpha = \frac{1}{\nu} \frac{1}{e^{\mu(k+\tau)} - 1}$$

ed

$$\varepsilon = \chi m s \alpha ,$$

si avrà per la (93)'

$$\frac{d\alpha_f}{d\tau} = \frac{\pi \gamma m s}{2l\nu} \frac{1}{e^{\mu(k+\tau)} - 1} , \tag{94}$$

d'onde intanto si scorge, che il massimo valore della tangente dell'angolo che la tangente alla curva fa coll'asse della τ, ha luogo quando $\tau = 0$ ed è:

$$\frac{d\alpha_f}{d\tau} \text{ massimo } = \frac{\pi \chi m s}{2l\nu} \frac{1}{e^{\mu k} - 1} . \tag{95}$$

La tangente trigonometrica $\frac{d\alpha_f}{d\tau}$ va poi successivamente diminuendo fino a ridursi nulla per $\tau =$ infinito, il che significa che la tangente geometrica alla curva è allora parallela all'asse dell'ascisse.

Integrando ora la espressione generale (94) abbiamo [1]:

$$\alpha_f = \frac{\pi \chi m s}{2l\mu\nu} \left\{ \log hyp \frac{e^{\mu(k+\tau)} - 1}{e^{\mu(k+\tau)}} + C \right\} .$$

Per $\tau = 0$, dovendosi avere $\alpha_f = 0$, risulta:

$$C = - \log hyp \frac{e^{\mu k} - 1}{e^{\mu k}}$$

[1] Ponendo $e^{\mu(k+\tau)} - 1 = y$ si ha $\frac{d\tau}{e^{\mu(k+\tau)} - 1} = \frac{dy}{\mu y (1+y)} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dy}{y} - \frac{dy}{1+y} \right)$ quindi:

$$\frac{d\tau}{e^{\mu(k+\tau)} - 1} = \frac{1}{\mu} \left(d \log hyp \left(e^{\mu(k+\tau)} - 1\right) - d \log hyp\, e^{\mu(k+\tau)} \right)$$

$$= \frac{1}{\mu} d \log hyp \frac{e^{\mu(k+\tau)} - 1}{e^{\mu(k+\tau)}} .$$

quindi

$$\alpha_f = \frac{\pi\chi ms}{2l\mu\nu} \log hyp \frac{e^{\mu.k} - e^{-\mu.\tau}}{e^{\mu.k} - 1}, \tag{96}$$

la quale equazione dà $\alpha_f = 0$ per $\tau = 0$, e per $\tau = \infty$ porge:

$$\alpha_{(\tau=\infty)} = \frac{\pi\chi ms}{2l\mu\nu} \log hyp \frac{e^{\mu.k}}{e^{\mu.k}-1} \ [1].$$

Alla distanza dall'asse delle τ espressa da questo valore particolare di α_f passa la parallela all'asse delle τ tangente a distanza infinita alla curva rappresentante l'andamento delle α_f.

In causa però delle azioni perturbatrici (resistenza dell'aria, variabile rigidezza del filo al punto di sospensione, movimenti microsismici) la legge di variazione dell'amplitudine α_f è diversa da quella espressa colla equazione (96). Poichè l'amplitudine di oscillazione del pendolo filare, mentre va successivamente aumentando pel movimento oscillatorio del punto di sospensione, incontra una resistenza sempre maggiore al suo aumento; cioè ad ogni istante, per effetto delle resistenze passive, essa riceve un piccolo decremento, il quale aumenta sempre più a misura che aumenta l'amplitudine (v. le equazioni (52) e (53)), così che può avvenire che, se l'oscillazione del punto di sospensione conservi la medesima amplitudine, l'amplitudine del pendolo filare dopo un certo tempo cessi di aumentare, e finisca coll'assumere un valore costante. Ciò accadrà quando la diminuzione di amplitudine dovuta alle resistenze passive eguagli l'aumento dovuto al moto oscillatorio del punto di sospensione. Se però l'amplitudine di quest' ultimo moto va progressivamente diminuendo, anche l'amplitudine del pendolo filare, a partire da un certo istante in cui sarà massima, andrà pure progressivamente diminuendo fino ad annullarsi se si annullerà l'amplitudine del pendolo principale cui è dovuto il moto del punto di sospensione.

Trattandosi di amplitudini piccolissime si può ritenere che la diminuzione dell'amplitudine per causa delle resistenze passive nel tempo infinitesimo, divisa per l'elemento del tempo, sia rappresentata dal solo primo termine della formola (65), cioè dalla (61), e si abbia quindi:

$$\frac{d\alpha_f}{d\tau} = -\mu_f \alpha_f.$$

Allora l' incremento effettivo dell' amplitudine, dovuto simultaneamente all'oscillazione del punto di sospensione e alle resistenze passive (v. eq.^{e} (94)), sarà:

$$\frac{d\alpha_f}{d\tau} = \frac{\pi\chi ms}{2l\nu} \frac{1}{e^{\mu.(k+\tau)}-1} - \mu_f \alpha_f \tag{97}$$

e questa è l'equazione differenziale della curva che rappresenta l'andamento dell'amplitudine del pendolo filare, in conseguenza del moto oscillatorio del pendolo principale e delle resistenze passive.

[1] In questa e nelle precedenti equazioni bisogna adoperare per μ il valore competente all'unità *tempo di una oscillazione* cioè ad *un secondo*, per cui se abbiasi μ corrispondente all'unità $10^m = 600^s$, bisognerà prima dividerlo per 600. Quest' avvertenza è necessaria nel calcolo del coefficiente.

Per integrarla poniamo

$$\alpha_f = uv\,, \qquad \frac{\pi\chi ms}{2lv}\,\frac{1}{e^{\mu(k+\tau)}-1} = \psi(\tau) \tag{98}$$

ed avremo, sostituendo nella (97), dopo avere notato che

$$\frac{d\alpha_f}{d\tau} = u\frac{dv}{d\tau} + v\,\frac{du}{d\tau}\,,$$

$$v\left(\frac{du}{d\tau} + \mu_f u\right) = \psi(\tau) - u\,\frac{dv}{d\tau}\,.$$

Questa equazione è sempre soddisfatta dalle due simultanee

$$\frac{du}{d\tau} + \mu_f u = 0$$

$$u\,\frac{dv}{d\tau} = \psi(\tau)\,,$$

le quali integrate, danno rispettivamente

$$u = \mathrm{B}\,e^{-\mu_f\tau}\,,$$

$$v = \mathrm{C} + \frac{1}{\mathrm{B}}\int \psi(\tau)\,e^{\mu_f\tau}\,d\tau,$$

ed a motivo della prima delle (98), posto

$$\mathrm{BC} = \mathrm{D},$$

$$\alpha_f = e^{-\mu_f\tau}\left(\mathrm{D} + \int \psi(\tau)\,e^{\mu_f\tau}\,d\tau\right)\cdot$$

Ponendo inoltre

$$\frac{\pi\chi ms}{2lv} = \mathrm{E},$$

la seconda delle (98) ci dà

$$\int \psi(\tau) e^{\mu_f\tau}\,d\tau = \mathrm{E}\int \frac{e^{\mu_f\tau}}{e^{\mu(k+\tau)}-1}\,d\tau = \mathrm{E}\int \frac{e^{\mu_f\tau}\,.\,e^{-\mu(k+\tau)}}{1-e^{-\mu(k+\tau)}}\,d\tau$$

e, sviluppando in serie la frazione $\dfrac{1}{1-e^{-k(\mu+\tau)}}$,

$$\int \psi(\tau) e^{\mu_f\tau}\,d\tau = \mathrm{E}\left\{\int e^{\mu_f\tau-\mu(k+\tau)}\,.\,d\tau + \int e^{\mu_f\tau-2\mu(k+\tau)}\,.\,d\tau + \int e^{\mu_f\tau-3\mu(k+\tau)}\,.\,d\tau + \cdots\right\}$$

$$= \mathrm{E}e^{\mu_f\tau}\left\{\frac{e^{-\mu(k+\tau)}}{\mu_f-\mu} + \frac{e^{-2\mu(k+\tau)}}{\mu_f-2\mu} + \frac{e^{-3\mu(k+\tau)}}{\mu_f-3\mu} + \cdots\right\},$$

quindi

$$\alpha_f = e^{-\mu_f\tau}\left(\mathrm{D} + \mathrm{E}e^{\mu_f\tau}\left\{\frac{e^{-\mu(k+\tau)}}{\mu_f-\mu} + \frac{e^{-2\mu(k+\tau)}}{\mu_f-2\mu} + \cdots\right\}\right)\cdot$$

Affinchè sia $\alpha_f = 0$ per $\tau = 0$, è necessario che sia

$$\mathrm{D} = -\,\mathrm{E}\left(\frac{e^{-\mu k}}{\mu_f-\mu} + \frac{e^{-2\mu k}}{\mu_f-2\mu} + \cdots\right)$$

e pertanto, riponendo per E il suo valore, sarà,

$$\alpha_f = \frac{\pi\chi ms}{2lv}\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{1-e^{-(\mu_f-h\mu)\tau}}{\mu_f-h\mu}\,e^{-h\mu(k+\tau)} \tag{99}$$

la cercata relazione finita fra α_f e τ, ovvero la equazione della curva le cui ordinate sono proporzionali ad α_f, amplitudine del pendolo filare, e le ascisse sono proporzionali al tempo τ decorso dall' istante in cui si mette in movimento il pendolo principale, essendo in quell' istante il pendolo filare nella sua posizione di equilibrio. S' intende di tener conto delle resistenze passive supponendo la legge di loro influenza espressa dalla equazione (61).

Il valore massimo di α_f si ha là dove $\frac{d\alpha_f}{d\tau} = 0$ e però quando per la (97)

$$\frac{\pi\chi ms}{2lv} \frac{1}{e^{\mu(k+\tau)}-1} = \mu_f \alpha_f ;$$

cioè quando l' incremento in α, dovuto all'oscillazione del supporto, eguaglia il decremento dovuto alle resistenze passive.

Pertanto la equazione di condizione dalla quale è determinato il tempo del massimo α_f sarà

$$\mu_f (e^{\mu(k+\tau)}-1) \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-e^{-(\mu_f - h\mu)\tau}}{\mu_f - h\mu} e^{-h\mu(k+\tau)} = 1 .$$

Suppongasi di avere con esperienze preliminari determinato il valore del parametro μ_f e suppongasi di istituire in seguito una esperienza nel modo che ora dico. Essendo tanto il pendolo a reversione quanto il pendolo filare nella loro posizione verticale di equilibrio, si allontani il pendolo a reversione dalla verticale di un certo angolo e poi lo si lasci liberamente oscillare. Esso oscillerà ristringendo successivamente l'amplitudine colla legge delle eq.[i] (67). — Nello stesso tempo il pendolo filare si metterà pure in oscillazione, ma l'amplitudine di questa andrà successivamente aumentando. Ad un certo tempo τ, contato per questo scopo da un' origine arbitraria, supponiamo che si osservino alcuni valori prossimi fra loro dell'amplitudine α_f del pendolo filare e i tempi corrispondenti, e che ad uno di tali tempi si possa notare anche l'amplitudine α del pendolo a reversione. — Coi varî valori osservati di α_f e dei tempi corrispondenti si potrà per via grafica o per via interpolatoria determinare il valore del quoziente $\frac{d\alpha_f}{d\tau}$ per il tempo cui corrisponde l'osservato valore di α e il corrispondente valore di α_f. Allora dalla equazione (97), avuto riguardo alle (67), si ha

$$\chi ms = \frac{2l}{\pi}\left(\frac{d\alpha_f}{d\tau} + \mu_f \alpha_f\right)\frac{1}{\alpha} . \qquad (97)'$$

Se non si possono osservare simultaneamente i valori di α ed α_f si potrà osservare α in tempi diversi da quelli nei quali osservasi α_f, e con tre valori di α si potranno determinare i parametri k, μ, v. Ciò fatto la formola pel calcolo di χms sarà quella che ottiensi immediatamente dalla (97)

$$\chi ms = \frac{2lv}{\pi}\left(\frac{d\alpha_f}{d\tau} + \mu_f \alpha_f\right)(e^{\mu(k+\tau)}-1)$$

essendo *qui* τ il tempo corrispondente ai valori osservati di α_f e $\frac{d\alpha_f}{d\tau}$, contato dall'origine del movimento.

Ma anche senza determinare $\frac{d\alpha_f}{d\tau}$ si può giungere allo stesso scopo, con un solo valore di α_f e col tempo corrispondente τ, impiegando la equazione (99) dopo avere determinato il valore di μ_f.

Dalle esperienze fatte ho potuto accorgermi che la più facile determinazione di $\frac{d\alpha_f}{d\tau}$ è all'origine del movimento, dove, essendo α massimo, è massimo l'incremento di α_f nell'unità di tempo e dove, per un certo tratto, la curva rappresentante l'andamento di α_f si confonde colla sua tangente. Ponendo quindi nella equazione (97)' per α l'amplitudine iniziale α_0 del pendolo a reversione, ponendo $\alpha_f = o$ e per $\frac{d\alpha_f}{d\tau}$ il valore osservato, abbiamo

$$\chi\, m\, s = \frac{2l}{\pi\, \alpha_0} \frac{d\alpha_f}{d\tau} \tag{100}$$

indipendentemente dalle resistenze passive. Il valore di $\chi\, m\, s$ così trovato è quello che serve, occorrendo, al calcolo delle equazioni (29) e (30).

PARTE SECONDA

Luogo di osservazione, strumenti ed errori istrumentali.

§ XIII. *Il luogo delle osservazioni.*

Le figure 1, 2, 3 della Tav. II, delineata nella scala di *uno* a *duecento*, sono fatte per dare una idea del luogo di osservazione. La fig. 1 rappresenta la sezione meridiana dell'Osservatorio di Padova, fatta col piano comprendente l'asse della torre, fino ad un'altezza di dieci metri circa dal suolo. Le fig. 2 e 3 rappresentano due sezioni orizzontali della torre, una fatta all'altezza di mezzo metro dal suolo sulla linea SN della fig. 1, l'altra all'altezza di metri cinque sulla linea S′N′ della figura medesima.

La torre dell'osservatorio sorge da terra con muri dello spessore di metri 2,75 prospettanti i quattro punti cardinali, sopra un'area quadrata ABCD (fig. 2, 3) del lato di metri 10,30 e rinchiude perciò un vano la cui sezione orizzontale quadrata A′B′C′D′ ha il lato di m. 4,80. All'altezza di m. 6 dal suolo è impostata in PQ (fig. 1) una vôlta cilindrica in muratura a generatrici est-ovest, la quale divide dai locali superiori il locale terreno IPRQO da me prescelto per le osservazioni del pendolo.

Si accede dall'esterno in quel locale per una porta terrena F (fig. 2) scavata nel muro di levante: la luce diurna vi penetra per due finestre, una G (fig. 3) praticata nel muro stesso di levante al di sopra della porta F, l'altra H nel muro di mezzodì. Le soglie delle aperture G ed H dalla parte interna della torre sono alte dal suolo metri 3,50 ed a tale altezza è fissato sopra travatura di legname un palco LM (fig. 1) di tavole, il quale divide l'ambiente in due, uno LMIO inferiore senza finestre, l'altro LMQRP superiore, accessibile dal basso mediante scala a botola aperta K, illuminato dalle due finestre sopradette. In questo secondo locale propriamente furono eseguite le osservazioni, essendosi dato ai varî apparati le seguenti posizioni:

In H (fig. 1, 3), cioè nel vano della finestra meridionale, era collocato l'*apparato* di *Repsold*;

in *b* era il *cannocchiale* con cui furono osservati i passaggi del pendolo per lo zero dell'arco graduato e le amplitudini di oscillazione;

in *c* il *cronografo* registrante sulla medesima zona di carta i secondi del pendolo normale situato nei piani superiori dell'osservatorio, ed i segnali dati dall'osservatore situato presso *b*, negli istanti dei passaggi;

in *d* un *pendolo siderale ausiliario*;

in *e* una mensola di legno ben solida sulla quale si fecero le *determinazioni del centro di gravità* del pendolo, mediante l'*apparecchio* ausiliario a ciò destinato;

in *G*, cioè nel vano della finestra orientale stava la *pila Gandini* per la produzione della luce elettrica. Quel vano è separato dall'ambiente maggiore in cui vennero

fatte le osservazioni con una parete in legno *gh* e ciò affinchè le esalazioni acide della pila non avessero ad intaccare i metalli di cui sono costituiti gli strumenti.

La fig. 4 della stessa Tav. II rappresenta alla scala di un cinquantesimo la sezione verticale del vano *H* (fig. 1, 2) fatta sulla linea SN della fig. 5. Questa poi ne rappresenta la sezione orizzontale avente per traccia verticale la retta SN della fig. 4.

Come apparisce da tali figure la finestra propriamente detta ha una apertura rettangolare della larghezza AB = 1^{m} circa e dell'altezzaa CD = 1,^{m} 35, colla soglia distante dal pavimento CE = 0,^{m} 85. La finestra è fornita d'invetriata semplice, che durante le osservazioni rimase costantemente chiusa e dietro alla invetriata è posta una tenda di stoffa molto spessa per impedire l'accesso alla luce esterna e per rendere meno sensibili e meno rapide le variazioni della temperatura dell'aria in vicinanza di essa dipendentemente dalle condizioni variabili della temperatura esterna.

Il pavimento è costituito da un robusto assito di larice EF (fig. 4) sostenuto da travicelli trasversali *n,n*... fissati nelle pareti laterali del vano. Sotto l'assito è innestato nello spessore della muraglia un grosso pezzo di pietra da taglio *G*, sulla quale appoggia la base del comparatore. Questo passa liberamente per un foro praticato nell'assito, come apparisce dalla fig. 2 Tav. III, sul quale, in conseguenza, l'operatore può muoversi senza tema che i suoi movimenti si trasmettano direttamente allo strumento.

La parte del vano H propriamente utilizzata per le osservazioni è il cilindro a base circolare PMQRLO (II, 5) del diametro LM di m. 1,90. Tale cilindro è aperto a sud e a nord sulle corde OP, QR. A m. 1,80 di altezza dall'assito sporgono orizzontalmente dalla superficie interna del cilindro per m. 0,70 quattro solidi modiglioni di marmo, i quali, essendo inseriti nella massa murale per circa 40 cm, hanno all'attaccatura una sezione rettangolare alta m 0,40, larga m. 0,20, la quale si rastrema rapidamente nel senso verticale tanto al dissopra quanto al dissotto del modiglione così da ridursi ad avere l'altezza di m. 0,20 sopra una lunghezza di circa 50 cm. — Gli assi dei modiglioni formano col piano meridiano angoli di 45°, così che l'asse del modiglione *nord-ovest* cade in continuazione di quello di *sud-est* e lo stesso dicasi degli altri due. Dal piano superiore dei modiglioni fino alla vôlta intercede la distanza di m 0,75, mentre il piano inferiore dista dal pavimento m. 1,90. Presso alla estremità di ciascun modiglione e dalla sua faccia superiore sorge verticalmente una vite di ottone molto robusta il cui gambo liscio entra nello spessore del marmo per parecchi centimetri e vi è fermata con zolfo fuso. I gambi delle quattro viti T, situati nei vertici di un quadrato del lato TT di 46 cm, sono infilati per quattro fori praticati in una robustissima piastra di ottone dello spessore di cm 1.5 e di forma quadrata col lato AB (II, 6), di 50 cm. Tale piastra presenta nel suo centro un foro del diametro CD = 0,^{m}40 e sulla sua faccia inferiore è rinforzata da una fascia fusa con essa, dell'altezza *aa*=*dd* (II, 7) di cm 6,5 e di spessore variabile, ma sempre eguale od alquanto maggiore di cm 1,5, ricorrente tutto in giro con una sezione orizzontale mistilinea, la quale apparisce rappresentata dal doppio contorno punteggiato *abcdefgh kmno* nella figura 6, che rappresenta, nella scala di *uno* a *dieci*, la proiezione orizzontale della piastra veduta da sopra in giù e appoggiata sulle estremità dei modiglioni, mentre la fig. 7 rappresenta nella scala medesima la sezione verticale della piastra sulla linea SN della fig. 6.

La piastra armillare di cui qui è fatto parola, è assicurata ai modiglioni mediante robuste madreviti scavate entro a prismi esagonali e corrispondenti alle viti T. Fra la piastra e i modiglioni, come fra le madreviti e la piastra, sono stati posti dischi di pelle e di piombo.

L'apparato di Repsold descritto nei paragrafi seguenti, viene collegato solidamente colla piastra ora descritta mediante tre coppie di viti robustissime. Tre di tali viti, una per ogni coppia, entrano nei fori scavati a madreviti K,L,M oppure negli altri tre K',L',M' secondo che per piano di oscillazione del pendolo si prende il *primo verticale* oppure il *meridiano*.

Le osservazioni da me fatte finora sono state eseguite tutte nella prima di tali due posizioni.

§ XIV. *Il supporto del pendolo.*

Il supporto è fatto in modo da permettere di fissare sul medesimo un recipiente a perfetta tenuta d'aria entro al quale possa oscillare il pendolo. — Perciò esso è costituito in primo luogo da un *cilindro cavo* di getto d'ottone del diametro interno di cm 35,5, dell'altezza di cm 25 e dello spessore minimo di mm. 5. Di questo cilindro vedesi rappresentata la sezione meridiana in ABCD (III, 1), la sezione perpendicolare alla meridiana in EFGH (III, 2) e la proiezione orizzontale da sopra in giù in AMLBK (III, 3). Il cilindro è munito di tre orecchioni K,L,M (III, 3) ad esso congiunti nello stesso getto, i quali sono attraversati verticalmente dalle tre coppie di viti verticali delle quali è parola alla fine del paragrafo precedente. Tre di tali viti (una per ogni coppia) passano liberamente coi loro gambi attraverso gli orecchioni, ma non colle teste che sono dagli orecchioni impedite di avanzare, ed hanno la loro madrevite nella piastra sottoposta TT..., così che la loro funzione è di obbligare gli orecchioni coi rispettivi annessi ad avvicinarsi alla piastra. Le altre tre viti hanno invece le madreviti negli orecchioni e colle loro punte arrotondate appoggiano contro il piano superiore della piastra T impedendo agli orecchioni di avvicinarsi a questa oltre un dato limite. Dopo di aver serrato fortemente così le une come le altre viti e di avere in tal modo congiunto il cilindro alla piastra nel modo il più solido, si può far subire al cilindro piccoli movimenti, allo scopo di ridurne verticale l'asse, allentando una o due delle viti del secondo sistema e serrando le viti vicine del primo, o viceversa allentando queste e serrando quelle.

Gli orli superiore ed inferiore del cilindro sono ridotti a piani perpendicolari al suo asse per modo che, quando occorra, coll'orlo superiore combacia esattamente l'orlo piano inferiore di una robusta cupola di cristallo GHI (III, 1) e contro l'orlo inferiore del cilindro può essere tenuto a perfetto contatto, prima mediante viti, poi anche colla pressione atmosferica, l'orlo piano superiore di una tinozza di rame LMN (III, 1). In tale modo cupola di cristallo, tinozza di rame e cilindro intermedio di ottone, insieme congiunti, formano un solo recipiente a perfetta tenuta entro il quale può oscillare il pendolo, mentre l'aria interna può facilmente venire rarefatta, fino a meno di dieci millimetri di pressione, mediante una macchina pneumatica.

In E (III, 1, 3) si trova il *vacuometro*, in K (III, 1) la tubulatura alla quale viene applicato il tubo di comunicazione colla pompa, in F è una finestrella chiusa

a perfetta tenuta con una robusta lastra di cristallo, attraverso la quale dall'esterno nella direzione JF si può vedere la punta inferiore del pendolo mentre si muove lungo l'arco graduato, e quindi notare i passaggi del pendolo per lo zero e le amplitudini di oscillazione. Vi è poi anche un congegno, che non apparisce nella figura, mediante il quale dall'esterno puossi mettere in movimento il pendolo.

Le esperienze furono finora da me eseguite soltanto nell'aria libera (eccetto quella accennata nella prefazione) ed è stata quindi lasciata da parte così la cupola di cristallo come la tinozza di rame.

Il cilindro intermedio presenta superiormente, poco sotto al livello dell'orlo, una specie d'impalcatura orizzontale fusa tutta d'un pezzo con esso ed avente alcuni larghi fori. La parte piena è al luogo delle lettere *mnopq* (III, 3). Essa serve di supporto alla mensoletta *q* (III, 3), rappresentata con dettaglio nelle figure 7, 8 e 9 della Tav. I, nella quale è incassato il parallelepipedo di agata su cui appoggia il coltello del pendolo. Il foro ellittico *abc* (III, 3) è di tale larghezza da lasciar passare comodamente i due cilindri, eguali esteriormente di forma e volume, uno cavo e l'altro pieno, che sono alle estremità del pendolo a reversione. L'impalcatura stessa serve a sopportare il collaretto *d* che abbraccia superiormente la scala: il collaretto a sua volta è girevole intorno ad asse verticale mediante una vite di richiamo *e* orizzontale. Nel punto O della impalcatura (III, 1, 3) e sulla superficie interna del cilindro in D (III, 1) è fissata una robusta canna di ottone OP (III,1) la quale, ripiegata orizzontalmente secondo PQ, offre in R il punto di appoggio inferiore alla scala, e sostiene l'arco graduato in Q davanti al quale scorre la punta inferiore del pendolo oscillante.

Nella Tav. I, figure 7, 8 e 9 sono rappresentate in iscala metà tre proiezioni della mensoletta sulla quale appoggia il coltello del pendolo. In particolare la fig. 7 è la *proiezione meridiana veduta da ponente*, la fig. 8 è la *proiezione orizzontale veduta dall'alto* e la fig. 9 è la *proiezione sul primo verticale veduta da mezzodì*. Nella fig. 7 il pezzo prismatico ABCD proiettato orizzontalmente in EF (8), è fuso colla impalcatura *mnop* (III, 3). Il parallelepipedo EF (7), avente inferiormente l'apertura *gn*, reso più robusto dalle due appendici laterali GH (7, 8, 9), è fissato permanentemente alla impalcatura e alla mensoletta ABCD (7) mediante tre robuste viti *a*, *b* (7); *b*, *c* (8, 9). Entro al parallelepipedo EF (7) è praticata da nord a sud una incavatura pure di forma parallelepipeda, il cui fondo orizzontale è all'altezza della retta PQ (7). All'altezza della retta NO (7) tale cavità si allarga alquanto in senso est-ovest e riceve il parallelepipedo di agata LMNO, il quale viene stretto fra le pareti laterali mediante le viti *e* ed *e'* che lo attraversano per fori appositi diretti da est ad ovest. Nella porzione NOPQ della incavatura predetta, che sta sotto al prisma, entra il braccio orizzontale RS (7) di una specie di gruccia, il cui braccio verticale T scende per un foro cilindrico praticato non solo nel parallelepipedo EF ma anche nel prisma AC sottoposto. Alle due estremità del braccio RS sono erette verticalmente due colonnine U e V forate lungo i rispettivi assi in continuazione di due fori attraversanti le estremità del braccio. Entro a tali fori passano due cilindretti, i quali inferiormente sono sostenuti dalle estremità libere di una lamina elastica di acciaio fissata pel suo mezzo sul lato inferiore del braccio RS. Superiormente i cilindretti

terminano in due forcelline che servono di appoggio al taglio del coltello del pendolo prima ch'esso vada ad appoggiare sul piano di agata. Il gambo verticale T della gruccia è attraversato orizzontalmente, da sud a nord a metà altezza del vano *gn*, dalla estremità del braccio Z di una leva di primo genere, il cui fulcro è in X (7, 8, 9) e l'altro braccio è in Y. Contro quest'ultimo braccio preme la punta arrotondata della lunga vite di cui nella fig. 9 vedesi la sola porzione AB: nella fig. 3 della Tav. III essa è rappresentata in *gh*. Facendo avanzare la vite *gh*, s'innalza la gruccia TRS (I, 7) e con essa s'innalza la lamina elastica di cui or ora è stato fatta parola senza piegarsi fino al momento in cui i vertici delle forcelline vengono a contatto col taglio del coltello supposto appoggiato sul piano di agata. Continuando a far agire la vite *gh*, la gruccia continua ad innalzarsi traendo con sè il punto di mezzo della lamina mentre le estremità libere di questa ne sono impedite dalla pressione del pendolo esercitata su di esse per mezzo dei cilindretti. La lamina deve pertanto incurvarsi volgendo la convessità verso l'alto, e nel tempo stesso sviluppa una forza elastica rapidamente crescente fino a poter vincere l'azione del peso del pendolo. Da quell'istante in poi, continuando ad innalzarsi la gruccia, s'innalzano con essa le forcelline e il pendolo sovrapposto così che il taglio del coltello s'allontana dal piano di agata. Se, essendo il pendolo caricato sulle forcelline, il taglio del coltello si trovi distante del piano di agata, si potrà portarvelo a contatto svolgendo la vite *gh* (III, 3), od AB (I,9), con che la gruccia TRS (I, 7), la molla, le forcelline ed il pendolo discenderanno. Arrivato il taglio del coltello a contatto col piano di agata, il pendolo non gravita subito su questo con tutto il suo peso, ma bisogna che la gruccia discenda ancora finchè la molla elastica sia completamente scaricata, cioè riprenda la sua forma rettilinea, dopo di che anche le forcelline discenderanno lasciando interamente libero il coltello del pendolo.

Lo scavo semicilindrico *d* (I, 7) serve per lasciar passare la luce radente orizzontalmente il punto di mezzo del coltello come sarà detto in altro luogo.

§. XV *Il pendolo.*

Nella Tav. III le figure 1 e 2 mostrano in ST due proiezioni d'insieme del pendolo: la prima sul piano dei tagli dei coltelli, la seconda sul piano perpendicolare ai tagli stessi. Nella Tav. IV la fig. 1 rappresenta sulla metà a sinistra di chi guarda la proiezione e sulla metà a dritta la sezione di quella parte del pendolo dalla quale sta il cilindro pieno. Così la proiezione come la sezione intendonsi fatte sul piano dei tagli dei due coltelli X ed Y (III, 1). La fig. 2 dà a dritta la proiezione, a sinistra la sezione della stessa parte di pendolo della fig. 1, su piano perpendicolare al precedente e condotto per l'asse del pendolo. La fig. 3 (IV) presenta la sezione del pendolo fatta perpendicolarmente all'asse del medesimo col piano rappresentato dalla traccia SN (IV, 1) e inoltre la proiezione di una parte del pendolo veduta in direzione dell'asse.

Nel pendolo a reversione sono a distinguere tre parti essenziali: 1° l'asta o gambo ST (III, 1); 2° i due cilindri U e V; 3° i due coltelli X ed Y.

Il *gambo* è costituito da un tubo cilindrico, che, nel presente strumento, è lungo, da S a T, 125 centimetri: i suoi diametri interno ed esterno sono rispettivamente di

40 e 44 millimetri. Solo in piccola porzione ostruiscono le estremità del gambo due sbarrette diametrali a sezione trapezia *ab* (IV, 1, 2), dal mezzo di ognuna delle quali sorge un piccolo cilindro *bc* sormontato da un cono che termina in punta di acciaio brunito. L'asse comune al cilindro e al cono di una estremità del pendolo, cade in continuazione coll'asse comune al cilindro e al cono situati all'altra estremità del pendolo e coll'asse del gambo. La punta di cono *d* (III, 1, 2) che, durante le operazioni, rimane inferiormente, serve di mira nella osservazione dei passaggi e delle amplitudini. La presenza delle sbarrette poco sopra nominate, non impedisce che si possa traguardare internamente lungo il gambo per accertarsi dell'assenza di oggetti estranei e che, rimossi i coltelli, si possa introdurvi un pannolino e trascinarlo in su ed in giù onde asportare la polvere, le ragnatelle od altre materie estranee casualmente introdottesi.

I due *cilindri* AB (IV, 1, 2), le così dette *lenti* del pendolo, hanno la forma e le dimensioni esteriori perfettamente eguali e sono forati lungo l'asse così da poter essere attraversati a sfregamento dal gambo. Ognuno d'essi è congiunto al gambo mediante un anello a madrevite CD che lo comprime fortemente contro una sottile imposta EF saliente dal contorno del gambo. In tal modo la posizione d'ogni cilindro può essere resa determinata ed invariabile rimanendo impedita anche qualunque rotazione intorno all'asse di figura, la quale rotazione però diventa possibile subito che diminuisca la pressione dell'anello. — Uno dei cilindri è massiccio e la fig. 1 (IV) ne mostra in BF la sezione del rettangolo generatore. L'altro cilindro è cavo e la parete ne è costituita da una lastra d'ottone dello spessore di circa un millimetro. Fra l'interno e l'esterno di questo secondo cilindro è mantenuta la comunicazione per l'equilibrio della pressione atmosferica da un forellino praticato presso ad una delle basi nella parete del foro che sfrega sul gambo.

I *coltelli* sono prismi di agata lunghi novantasei millim. circa, la sezione retta dei quali, fatta ad una distanza maggiore di mm. 10 dalle basi o teste, è un poligono di sette lati *abcdefg* (IV, 4, 5). A pendolo verticale, uno di questi *ab* (13 mill.) è orizzontale, due *ag*, *bc* (10 mm.) sono verticali, i due lati *cd*, *fg* (9 mm.) sono inclinati alla verticale circa 40° e finalmente i due lati brevissimi *de*, *ef* (1 mm.) formano colla verticale l'angolo di 45°. Se la sezione retta è fatta ad una distanza minore di 8 mm. da ciascuna base, essa risulta un rettangolo *ef* (IV, 2) il cui lato orizzontale è ancora 13 mm, come quello dell'eptagono ora detto, e il lato verticale è lungo 18 mm.

Bisogna ora vedere in qual modo i coltelli sieno congiunti al pendolo. A dieci centimetri circa di distanza da ciascuna estremità del gambo sono aperte nella parete di questo due finestre GH (IV, 2) una incontro all'altra. Esse hanno contorno mistilineo, sono lunghe circa 12 cm., e larghe poco più di 2,5 cm. Sono attraversate dai coltelli in direzione perpendicolare all'asse del gambo, permettono al pendolo d'infilare la mensoletta di appoggio *q* (III, 3 ; I, 7, 8, 9) e di oscillare liberamente qualora appoggi col taglio del coltello sulla mensoletta.

Per ognuno dei due coltelli havvi una robusta intelaiatura rettangolare LM (IV, 1, 2, 3) disposta in piano perpendicolare all'asse del gambo coi suoi lati maggiori debitamente arcuati e saldati al gambo del pendolo (3). I lati minori prospettano le finestre sopraccennate, sono distanti fra loro quanto sono lunghi i coltelli e servono

di base a due robuste staffe rovescie di ottone *mn* (IV, 2), le quali sono fortemente congiunte ad esse mediante viti *n*. — Ogni staffa forma col lato della intelaiatura sottoposto una piccola finestra rettangolare larga 14 mm. circa (cioè poco più larga del coltello di agata) e di altezza variabile intorno ai 18 mm, giacchè sul lato superiore una piastrina *fg*, a sponde rialzate per impedire i suoi movimenti laterali, può venire alzata od abbassata mediante la vite O (IV, 1,2). Mentre le due piastrine *fg* sono alzate si può introdurre, attraverso le due finestre GH (IV, 2) opposte del gambo, il coltello nelle due staffe, in modo che appoggino sui due lati minori dell'intelaiatura quei piani *eh* (IV, 1) delle teste del coltello dalla parte dei quali è lo spigolo *pq*. Allora, stringendo fortemente le due viti di pressione O, le piastrine mobili *fg* vanno a premere uniformemente sulle teste del coltello e questo riceve, in conseguenza, nelle sue intelaiature una posizione invariabile, finchè non si allentino nuovamente le viti O.

Sopra una delle faccie piane, perpendicolari allo spigolo del coltello, di una delle due intelaiature è incisa la firma dei costruttori

A. Repsold et Söhne
Hamburg 1881.

Quando il pendolo è appoggiato sul piano di agata con uno dei suoi coltelli, questa *iscrizione o firma* può prendere quattro posizioni diverse. Può essere cioè *in basso davanti*, *in basso di dietro*, *in alto di dietro* e *in alto davanti*, considerando come davanti nel caso nostro il verso nord. Tali posizioni della firma contrassegnanti altrettante posizioni diverse del pendolo, si distingueranno all'occorrenza colle iniziali: a. i. (anteriore inferiore) a. s. (anteriore superiore), p. s. (posteriore superiore) e p. i. (posteriore inferiore).

Ogni coltello porta scolpito sopra una delle sue basi *ef* (IV, 1) un contrassegno, che, per uno dei coltelli (coltello n° 1) è un punto semplice, per l'altro (coltello n° 2) è un punto doppio.

Conservando ai coltelli la medesima posizione relativa, cioé tale che le teste contrassegnate si trovino sempre dalla medesima parte, possono essere date a loro le quattro diverse disposizioni che seguono:

A	contrassegni dalla parte della firma:	coltello	n° 1	sulla intelaiatura	della firma,
B	" " "	"	n° 2	"	" ,
C	contrass.[1] nella parte opposta alla firma:	coltello	n° 2	"	" ,
D	" " "	"	n° 1	"	" .

§ XVI. *Telaio per la inversione e trasposizione del pendolo.*

Per invertire il pendolo, cioè per far sì che, dopo avere oscillato intorno ad un coltello, vada ad appoggiare sul piano d'agata coll'altro coltello, senza che si alterino le sue condizioni di temperatura pel contatto diretto delle mani dell'operatore, ho adoperato un telaio di legno compatto (noce) di forma quale apparisce dalle figure 7 ed 8 della Tav. IV. Come si vede, esso ha forma di rettangolo ABCD (7), i cui lati maggiori AD, BC, lunghi pochissimo più del gambo del pendolo sono cilindrici sulle porzioni EF e GH, mentre sulla lunghezza rimanente sono prismi a sezione mistilinea *abcde* (8). — Nei lati minori due sbarre prismatiche di ottone AL, CM (7), *gf* (8)

scorrono a sfregamento dolce entro apposite guaine di lamina di ottone *ehil* (8). Ciascuna sbarra presenta ad una estremità un bottone *g* per servire di manico, e all'altra estremità, corrispondente al mezzo del lato minore del telaio, ha una incavatura *f* semicilindrica di raggio eguale a quello dei cilindretti terminali del pendolo, alla quale corrisponde di rincontro un'altra incavatura eguale che completa con quella un foro cilindrico capace di contenere uno dei due cilindretti ora nominati. Quando la sbarra di ottone si trova all'estremità della sua corsa entrante, come nella fig. 8, essa presenta, di riscontro al catenaccetto a molla N (7), una intaccatura nella quale il catenaccetto viene spinto, per assicurare la immobilità della sbarra in quella situazione.

Volendo servirsi di questo apparato ausiliario per il suo scopo, s'incomincia dal sollevare quanto più è possibile il pendolo appoggiato sulle forcelle del supporto, mediante la vite *gh* (III, 3), affinchè, anche caricando il pendolo col telaio, il taglio del coltello non possa venire a contatto col piano di agata. Si sovrappone il telaio al pendolo mentre le sbarre di ottone (*gf*, 8) sono all'estremità della loro corsa uscente e si fa in modo che le due incavature semicilindriche *m* (8), fisse nei lati minori del telaio, vadano a combaciare coi cilindretti terminali del pendolo. Si spingono innanzi le sbarre di ottone finchè le loro incavature *f* vanno a contatto coi cilindretti medesimi, e si chiudono i catenaccetti N (7). In tal modo il telaio rimane unito fortemente al pendolo e allora, impugnando il telaio per le parti cilindriche dei suoi lati maggiori, si può asportare i due oggetti telaio e pendolo insieme uniti, e dare al pendolo qualunque posizione. Onde impedire che il pendolo, nell'atto che gli si fa cambiar posizione insieme col telaio, ruoti alquanto intorno al proprio asse di figura, servono i quattro prismi di legno *p,p.p,p* (7) *cdno* (8). Il modo come essi impediscono la rotazione, prendendo in mezzo le intelaiature dei coltelli, apparisce dalla fig. 8.

Prima di levare dal suo posto il pendolo mediante il telaio, bisognerà assicurarsi bene che i catenaccetti N,N sieno entro alle intaccature e quindi che le sbarre AL CM sieno ben ferme.

§ XVII. *Meccanismo che serve a mettere in moto il pendolo.*

Del congegno applicato allo strumento dai Signori Repsold, il quale serve a mettere in moto il pendolo anche quando si fanno le esperienze nell'aria rarefatta, mi servii nelle operazioni del 1885, ma, sia per mia imperizia, sia perchè il congegno non si presta bene allo scopo, non sempre riuscii a far incominciare il moto al pendolo nell'amplitudine prefissa, e mi nacque anche il dubbio di avere qualche volta comunicato un impulso al pendolo nell'atto stesso in cui lo scioglieva dal contatto colla leva. Di più, la circostanza che tale congegno ha la sua base nel supporto del pendolo non permette di usarlo colla franchezza necessaria per timore che qualche movimento brusco comunicato ad esso possa essere causa di trepidazioni nel supporto.

Perciò nelle osservazioni del 1886 usai allo scopo, con risultato soddisfacente, l'apparecchio raffigurato nella fig. 2 della Tav. III, costruito dal Cavignato.

Esso soddisfa alle seguenti condizioni.

1ª. Permette di sostenere il pendolo in riposo in una determinata deviazione dalla verticale;

2ª. Libera il pendolo da qualunque vincolo nell'istante stesso in cui esso si mette in movimento;

3ª. Ha la sua base indipendente dallo strumento, per cui, in causa sua, non si trasmettono vibrazioni e movimenti al supporto del pendolo.

L'apparecchio è così costruito. Secondo la figura PQR è sagomato un pezzo di robusta tavola di noce, il quale, essendo imperniato in O, può ruotare nel piano di oscillazione del pendolo in mezzo a due robusti ritti verticali di legno congiunti fra loro, al dissotto della linea kk', in un solo piedistallo fermamente fissato con viti al pavimento.

Dalla parte P la tavola è molto più pesante che dalla parte Q, per cui, quando non sia sostenuta nella posizione PQR, precipita pel proprio peso nella posizione P′Q′R′, nella quale viene arrestata senza urto violento da due molle fisse, una per parte, nei due ritti verticali.

Trattiene la tavola nella posizione PQR una sbarretta xy (la quale può ruotare intorno al perno w in piano parallelo e contiguo a quello della tavola) e ciò mediante il nasetto in cui essa termina alla estremità x. Contro quel nasetto va a premere, senza poterlo superare, un piccolo piuolo z, fisso normalmente nel piano della tavola, a ciò indotto dal peso della tavola stessa, che per tal modo è impedita di cadere. All'estremità y la sbarretta è ripiegata lateralmente ad angolo retto così da estendersi sopra tutta la grossezza della tavola senza però toccarla.

Per far cadere improvvisamente la tavola, basta dare un colpo secco sulla coda y nella direzione della freccia. Con tale colpo si viene ad un tempo (per effetto della rotazione di xy intorno a w) a disimpegnare il nasetto x dal contatto col piuolo z, e a dare un impulso alla tavola, in seguito al quale e al proprio peso essa precipita nella posizione P′Q′R′ mentre la sbarretta passa in $x'wy'$. Nella costruzione del meccanismo è stata posta speciale cura affinchè la superficie di contatto del nasetto col piuolo sia un cilindro retto ad asse orizzontale passante per w normalmente al piano di oscillazione: così non vi è pericolo che la tavola assuma verun movimento prima che il nasetto abbandoni interamente il piuolo. Anche i perni in O sono robusti e lavorati con diligenza.

All'estremità P la tavola termina in una guarnitura di ottone attraversata da un foro cilindrico entro a cui può scorrere orizzontalmenle nel piano di oscillazione del pendolo, e può essere fissata in una posizione opportuna mediante la vite r, la sbarretta mn. Questa termina dalla parte del pendolo in una forcella entro la quale ruota intorno ad asse perpendicolare al piano di oscillazione la girella di avorio n.

Mentre la tavola è nella sua posizione fissa PQR, se si spinge avanti la sbarretta, la girella d'avorio va prima a contatto col pendolo in un sol punto situato al dissotto del centro di gravità e poco sopra il centro di oscillazione, e poi rotolando su esso lo spinge davanti a sè facendolo deviare dalla sua posizione verticale di equilibrio. Quando il pendolo ha raggiunto la deviazione voluta si serra la vite r. Dando allora un forte e repentino colpo in y, la girella insieme colla tavola si stacca con grandissima rapidità dal pendolo in guisa che questo, mettendosi pure immediatamente in moto con velocità crescente, rapidamente sì ma per gradi, a partire dal suo valore iniziale zero, non è più in grado di raggiungerla.

§ XVIII. *La scala-metro.*

Le figure 1, 2, 3, 5 della Tav. V rappresentano in vera grandezza quella estremità della scala (inclusovi il termometro metallico) dalla parte della quale è la divisione segnata M, mentre le figure 1, 2, 3, 4, 5 della Tav. VI rappresentano quell'altra estremità sulla quale è la divisione segnata 0 (zero). La fig. 4 della Tav. V è una sezione retta della scala e del termometro incluso fatta sulla linea AB (V, 1) o sulla AB (VI, 1, 2). La fig. 6 della Tav. V è una immagine in iscala metà del puntale di cui viene armata l'estremità inferiore della scala quando questa è collocata a posto per le osservazioni nel modo indicato in RR dalla Tav. III, 1. La fig. 6 della Tav. VI rappresenta il supporto della livelletta LL'MM' (VII, 1), il quale viene infilato nella estremità superiore della scala come mostra la (III, 1) in *ab*. La livelletta allora serve a disporre verticalmente l'asse della scala. Le due figure 7 delle tavole V e VI mostrano rispettivamente le estremità della scala intorno alla divisione segnata M e intorno a quella segnata 0 (zero), quali appariscono nel campo di vista dei due microscopî del comparatore (1).

Essenzialmente la scala è costituita di un tubo di ottone lungo 102 cm, del diametro esterno di mm. 44 e dello spessore di 2 mm. A ciascuna estremità del tubo, sopra una lunghezza *ab* (V, 1; VI, 2) di 22 mm., manca una porzione semicilindrica del tubo medesimo. Il semicilindro mancante ad una estremità del tubo è limitato allo stesso piano comprendente l'asse che limita l'altro semicilindro, i due semicilindri essendo dalla stessa parte di quel piano.

Mediante le viti *c*, *c* (V, 5; VI, 5) sono fissati internamente alle estremità del tubo due talloni prismatici a sezione mistilinea *abd* colle basi perpendicolari all'asse della scala e distanti fra loro mm. 17,5 = *de* (V, 1; VI, 2)

Il tallone, che è alla estremità M della scala, ha la sua sezione retta della forma indicata in *abd* (V, 5); sulla sua faccia laterale piana *ab* (5), *fg* (1) è saldata una sottile lamina rettangolare *ef* (5), *hl* (1), il cui piano comprende l'asse della scala. Su tale piano, in direzione perpendicolare all'asse e da una sola parte di questo, sono incise 23 divisioni a intervalli eguali di un decimo di millimetro. Tre di esse sono più lunghe di tutte le altre e sono la *seconda*, la *mediana* e la *ventiduesima*: due sono di lunghezza intermedia e sono la 7ª e la 17ª (V, 7). La divisione mediana è contraddistinta colla lettera M e segna la fine del *metro*. La retta più grossa AB coincide coll'asse della scala: le altre due ad essa parallele, sono due linee ausiliarie la distanza delle quali può servire di termine di paragone per istimare le distanze in direzione perpendicolare alle divisioni nel campo di vista del microscopio.

L'altro tallone ha la forma indicata in *abd* dalla fig. 5, Tav. VI. Sopra la sua faccia piana *ab* (5), *defg* (2) è pure saldata una laminetta d'argento *be* (5) *fghl* (2) il cui piano è in continuazione di quello dell'altra lamina; ma mentre quella è larga mm. 11 ed è egualmente estesa da una parte e dall'altra dell'asse, questa è larga

(1) In queste due figure apparisce che le punte delle seghe micrometriche sieno quattro, mentre in realtà nello strumento sono *cinque*.

metà e si trova da quella parte dell'asse dalla quale sono segnate le divisioni sull'altra lamina, in modo che l'asse della scala ne forma un margine. Su tale lamina sono incise perpendicolarmente all'asse tre sole divisioni distanti fra loro un decimo di millimetro. Quella di mezzo è più lunga delle altre due, è contraddistinta colla cifra 0 (zero) e costituisce il principio del metro (VI, 7).

Ciascuna estremità del tubo è inserita in un cappellozzo di ottone *mn m'n'* (V, 1; VI, 1, 2), fino quasi a toccarne il fondo, ed è ad esso congiunta mediante tre viti *o,o* (VI, 1). Dal fondo piano di ciascun cappellozzo, nella parte esterna, esce un cilindretto massiccio, avente l'asse sull'asse della scala e terminante nella sua estremità libera in cono. Presso alla congiunzione di tale cilindro col cappellozzo, alcuni giri di vite permettono di unirvi fortemente il puntale conico, rappresentato in iscala metà dalla fig. 6 (V), come si vede in R*c* (III, 1). È nella parte liscia del cilindretto opposto a quello inserito nel puntale, che s'infila il supporto *ab* (III, 1) della livelletta, che serve a disporre verticale l'asse della scala, in quello stesso modo come serve a disporre verticalmente l'asse del comparatore (VI, 6; VII, 1).

Se i due cappellozzi non avessero veruna apertura, non sarebbe possibile, finchè rimangono fissati colle viti *o,o* (VI, 1) al tubo, di vedere le divisioni tracciate alle estremità della scala. Pertanto nella parete cilindrica di ciascun cappellozzo, di fronte precisamente alla graduazione, è un foro D (VI, 1) del diametro di un centimetro circa, attraverso il quale si può introdurre la luce che serve a illuminare la scala, e si può mediante i microscopî micrometrici del comparatore eseguire le letture.

Per proteggere le graduazioni dalla polvere o da altri agenti esterni nel tempo in cui non si fanno osservazioni, si chiude il foro di ciascun cappellozzo mediante una fascia otturatrice di lamina d'ottone *pq p'q'* (VI, 1, 2) *fgh* (VI, 5), la quale può farsi girare a sfregamento dolce intorno al cappellozzo fra due posizioni limiti. Nella prima posizione limite (V, VI, 5) un foro perfettamente eguale a quello del cappellozzo trovasi nella fascia in perfetta corrispondenza con questo, che in tal maniera rimane aperto: nell'altra posizione limite il foro del cappellozzo non trovasi più in riscontro di quello della fascia e rimane perciò da questa interamente coperto.

§ XIX. *Il termometro metallico.*

Presso alla estremità *zero* della scala è saldata sulla superficie interna del tubo un'armilla di ottone, la forma della quale è determinata dalla rotazione, intorno all'asse della scala, dell'esagono rettangolare *tsruv* (VI, 2). Tale armilla presenta dalla parte dello zero della scala due imposte, una *rs* larga 7 mm., l'altra *t* larga 2 mm., per cui il diametro $r\,r' = u\,u'$ dell'apertura circolare che rimane libera è di mm. 22. Dall'altra parte dell'armilla si ha una sola imposta *uv* piana, perpendicolare all'asse e larga come la somma delle due precedenti.

Nel suo spessore più stretto l'armilla è attraversata liberamente da tre viti robuste parallele all' asse le cui teste a livello sono indicate in A,A,A (VI, 5). Quelle tre viti hanno le loro madreviti nello spessore di un coperchio CD C'D' (VI, 2, 3), il quale chiude a vite una delle estremità di una canna di acciaio GF G'F' (VI, 3) GG' (VI, 2) che, in tal modo, qualora sieno serrate le viti A,A,A, rimane fortemente congiunta per la

sola estremità FF′ all'armilla sopra descritta e al tubo della scala. La canna di acciaio è lunga fra le sue basi estreme DD′ (VI, 2), HH′ (V, 1) millimetri 945: il suo diametro esterno di mm. 34 è, sopra la lunghezza di un centimetro circa ad ambedue le estremità, allargato a mm 36 in causa dei coperchi, e il suo diametro interno è di millimetri 31.

Presso all'altra estremità della canna di acciaio, che rimane libera, e che si trova dalla parte della divisione segnata M, è saldata, sulla superficie interna della canna di ottone costituente la scala, una fascia *pqp′q′* (V, 1) pure di ottone dell'altezza di mm 11 e dello spessore di mm. 1,5. Così essa ristringe l'apertura interna della canna d'ottone fino quasi al contatto colla canna d'acciaio, la quale in tal modo, mentre può liberamente dilatarsi nel senso che va dal principio alla fine della scala, è mantenuta in tutta la sua lunghezza col proprio asse in coincidenza coll'asse della scala.

Nel centro del coperchio libero HLH′L′ (V, 1, 2) della canna d'acciaio è aperto un foro del diametro MM′ di mm. 7 e, intorno ad esso, sono altri tre fori equidistanti fra loro e dal centro liberamente attraversati da tre viti colle teste a livello A, A (V, 5). Queste tre viti hanno le loro madreviti nello spessore del coperchio di ottone NMM′N′ (V, 2) ONMM′N′O′ (V,3) saldato alla estremità di una canna cilindrica interna di zinco PNN′P′ (V, 2, 3) la quale, ove le tre viti sieno serrate, rimane fortemente fissata per una sua estremità in congiunzione colla corrispondente estremità della canna di acciaio. La canna di zinco, fra il punto N (V, 3) e il punto M (VI, 4), ha la lunghezza di mm. 932, ha il diametro esterno di mm. 29 e l'interno di mm. 26. Così fra la superficie interna della canna di acciaio e la esterna di quella di zinco rimane un interstizio costante di *un* millimetro.

L'altro coperchio della canna di zinco LMM′L′ (VI, 4), MM′ (VI, 3) porta nel suo centro esterno un'appendice cilindrica del diametro NN′ = mm 17, 8 (4, 3), la quale esce fuori liberamente per l'apertura circondata di collaretto EE′ (3, 2) praticata nel coperchio CDC′D′ (2) della canna di acciaio fisso alla scala.

Il cilindro NN′ ora nominato, formante parte del coperchio all'estremità libera della canna di zinco, dopo sbucato dal coperchio fisso della canna di acciaio, si prolunga fino in Q alla estremità della canna di ottone costituente la scala; ma sui suoi ultimi 21 millimetri prende una forma prismatica la cui sezione mistilinea è un settore *bmn* (VI, 5) del cerchio sezione primitiva del cilindro. Una delle faccie piane di tale prisma, quella proiettata in *bm*, cade in continuazione della faccia piana proiettata in *ab* del tallone vicino portante lo *zero* della scala. In quella faccia è pure saldata una laminetta rettangolare di argento *fgxy* con un lato *fg* sull'asse della scala e col suo piano in continuazione col piano della laminetta graduata vicina (VI, 2). Quella laminetta è pure graduata con 23 divisioni distanti fra loro un decimo di millimetro e distribuite, quanto a lunghezza, come le 23 divisioni che sono alla estremità M della scala, così che danno nel campo del corrispondente microscopio del comparatore l'apparenza indicata nella fig. 7 (VI). La seconda divisione, a partire dalla più lontana rispetto al mezzo della scala (dalla più vicina in apparenza), è contraddistinta con un *zero*, che dicesi lo zero del termometro metallico, essendo il termometro metallico costituito dall'insieme delle canne di acciaio e di zinco, non che di quella parte della canna di ottone (scala) che si estende dall'attaccatura DD′ della canna di acciaio fino allo zero della scala.

L'elemento variabile proporzionalmente alla temperatura, che assumesi come indicazione del termometro metallico, è l'intervallo compreso fra lo zero di questo e lo zero della scala inciso sulla laminetta contigua. La variazione di questo intervallo per la variazione di temperatura eguale ad un grado del termometro centesimale, dovrebbe essere prossimamente eguale alla differenza delle dilatazioni delle due canne una di acciaio l'altra di zinco. Prendendo i coefficienti di dilatazione lineare di queste due sostanze dall'*Annuaire du Bureau des longitudes pour l'an 1887* a pag. 701 e 697 si ha:

dilatazione della canna di *zinco* lunga mm. 932, essendo il coefficiente 0.0000295, $27^{\mu},5$
" " *acciaio* " 945, " " 0.0000137, 12, 9

differenza delle dilatazioni. . . . . β = 14, 6

Questo elemento β, come pure la indicazione m del termometro metallico ad una temperatura determinata, p. es. lo zero, desumonsi praticamente dal diretto confronto del termometro metallico con un buon termometro a mercurio od a gas a temperature considerevolmente diverse. Quanto ai termometri metallici delle due scale annesse al nostro apparato si è trovato: per la scala A; $\beta_a = 13^{\mu},0$ (pag. 125) e per la scala B; $\beta_b = 11^{\mu},8$ (pag. 126). Per la scala del pendolo austriaco l'*Orff* trovò $\beta = 17^{\mu},5$ (v. pag. 62 della sua Memoria) e per quella del pendolo prussiano *Bruhns* dedusse $\beta = 16^{\mu},6$.

Per completare la informazione relativamente alla scala ed al termometro annesso presento l'indicazione dei pesi delle singole parti e del loro insieme.

Peso della canna di ottone coi rispettivi talloni graduati: grammi 2339,5
Peso dei cappellozzi protettori . . . . " 352,0
Peso della scala coi suoi cappellozzi, senza termometro metallico gr. 2691,5
Peso della canna di acciaio . . . . gr. 1305,0
Peso della canna di zinco . . . . " 1048,5
Peso del termometro metallico . . . . gr. 2353,5

Peso della scala compreso il termometro metallico . . . . gr. 5045,0
Peso del puntale (V, 6) . . . . gr. 380,0

(I due talloni su cui sono le divisioni, pesati separatamente hanno dato 106 gr.).

Affinchè l'aria possa circolare con libertà fra le tre canne e comunicare coll'esterno, sono praticati in ciascuna canna sei fori, tre dei quali presso una estremità e tre presso l'altra in modo che i fori di una canna si trovino di prospetto ai fori dell'altra, come mostra la fig. 4 della tav. V, che è, come già fu detto, una sezione della scala fatta col piano di traccia AB (V, 1; VI, 1, 2).

§ XX. *Il comparatore.*

Nella Tav. III, fig. 2 in AB, fig. 3 in C, si hanno due proiezioni d'insieme a scala $\frac{1}{10}$ del comparatore sopra il primo verticale e sopra l'orizzonte. Dettagli a scala $\frac{1}{2}$ delle estremità superiore ed inferiore sono rappresentati nelle figure 1, 2, 3 della Tav. VII.

Come apparisce dalla Tav. III, fig. 2, la base del comparatore è un tronco di cono cavo AC alto 20 cm., le cui basi hanno i diametri di 135 e 56 millimetri. Lo spessore del suo mantello, *ab* (VII, 3), è di circa 5 mm., ed in esso mantello è praticata presso alla base una larga apertura, per la quale puossi agevolmente insinuare una grossa spina di acciaio e con essa far girare una robusta vite verticale, la quale, passando liberamente per un largo foro aperto nel centro della base inferiore del tronco di cono, entra in una madrevite di ottone incassata profondamente e stabilmente nel masso di pietra sottoposto D (III, 2). Infilata nella vite, fra la sua testa e il fondo del tronco di cono, è una grossa e larga armilla di ottone, il cui diametro esterno è considerevolmente maggiore di quello del foro suddetto e il diametro interno è minore di quello della grossa testa cilindrica della vite. Perciò quando si serra la vite, la base inferiore della sua testa preme fortemente sull'armilla, questa preme internamente sul fondo del cono e il fondo del cono preme sul masso di pietra sottoposto. In tale guisa il tronco di cono base del comparatore vien tenuto fisso in una determinata posizione, la quale può essere diversa entro un certo raggio, a volontà dell'operatore, in grazia della maggior larghezza del foro, attraverso il quale passa la vite, in confronto del diametro di questa. Nella base superiore del tronco di cono è un foro cilindrico del diametro $dd' = 32$ mm. (VII, 3): il suo contorno, che sull'altezza *ef* di 12 mm. ha lo spessore *ed* pure di 12 mm., è attraversato orizzontalmente in direzioni convergenti all'asse sotto un angolo di 120°, da tre robuste viti di pressione come la A (VII, 3), *a*, *a*, *a*, (III, 2), le quali servono a stringere fortemente, ed anche a spostare orizzontalmenre in qualunque direzione, entro ai limiti concessi dal foro, il pezzo di ottone *mm'nn'* (VII, 3) e il gambo di acciaio in esso inserito, sul quale appoggia direttamente la punta del comparatore.

Il pezzo di ottone ora nominato *mm'nn'* (forato lungo l'asse di figura), al disotto del luogo ove è incontrato dalle viti A, porta scolpita nel suo interno la madrevite cui si adatta la vite colla quale termina inferiormente il gambo di acciaio sopra una lunghezza di 20 mm. Nella sua parte estrema inferiore il cilindro madrevite *ss'* è ridotto, sulla lunghezza di 10 mm., a parete abbastanza sottile, perchè, praticate in questa due fenditure rettilinee diametralmente opposte, le due mezze madreviti che ne risultano possano, in grazia della elasticità, avvicinarsi alquanto per le loro estremità libere in seguito ad uno sforzo fatto nel senso opportuno, con che viene a diminuire sensibilmente il diametro della madrevite. Tale effetto di ristringimento è ottenuto in modo semplice mediante l'anello a madrevite un po' conica, *rr'*, il quale s'avvolge sulla corrispondente vite conica *ss'* scolpita esternamente nei due semi-gusci cilindrici racchiudenti il gambo di acciaio. Se l'anello è allentato in modo che i due semi-gusci prendano la loro posizione naturale, il gambo di acciaio può salire o scendere girando con tutta agevolezza. Arrivato il gambo, mediante tale movimento, nella posizione dovuta, per impedire la ulteriore sua rotazione, non si ha da fare altro che stringere fortemente l'anello *rr'*, con che i due semi-gusci si stringono per le loro estremità libere addosso alla vite del gambo.

Il gambo di acciaio presenta superiormente una piccola cavità conica nella quale entra la punta del comparatore. Saldato all'estremità superiore del gambo è il disco di

ottone BB' al contorno del quale si applicano le dita quando si vuol girare nella sua madrevite, per alzarlo od abbassarlo, il gambo di acciaio previamente reso libero al moto coll'allentamento dell'anello *rr'*. Il disco BB' è superiormente foggiato in una specie di bacinella cilindrica destinata a contenere la materia lubrificante che serve a diminuire l'attrito intorno alla punta di appoggio del comparatore.

Il comparatore consta di un tubo cilindrico verticale di ottone MN (III, 2) lungo 174 cm., del diametro esterno di 56 mm., formato di lamina dello spessore di 1 mm. Alla sua estremità inferiore è saldato colla base maggiore di un tronco di cono rovescio dell'altezza di 150 mm., il quale termina inferiormente con una base del diametro di 10 mm. Su questa base è saldato un piccolo cono di acciaio, avente al suo vertice l'apertura di 90°, che costituisce la punta di appoggio del comparatore.

Presso alla sua estremità superiore il tubo del comparatore è tenuto fermo in posizione verticale da una intelaiatura orizzontale DFGN (III, 3) connessa stabilmente mediante due robuste viti D ed N al cilindro di getto che costituisce il supporto del pendolo. In causa di tale legame, nell'atto di rettificare la posizione del piano di agata su cui appoggia il coltello del pendolo colle viti K,L,M, si viene ad alzare o ad abbassare anche l'intelaiatura senza però che si sposti sensibilmente in direzione orizzontale.

Il tubo del comparatore ha colla intelaiatura tre soli punti di contatto, uno dei quali colla lamina FG costituente il lato mobile e snodato, rimosso il quale dal suo posto è possibile anche la remozione del comparatore.

Siccome, a comparatore rimosso, la lamina FG è curva verso C così che il punto di contatto col comparatore è più vicino agli altri due punti di contatto di quello che importi il diametro del tubo, ne viene che quando il comparatore è a posto, la lamina per elasticità raddrizzasi alquanto ed esercita sul tubo del comparatore una pressione sufficiente per assicurare sempre il contatto sui tre punti, mentre il movimento di rotazione del comparatore intorno all'asse di figura del tubo rimane sufficientemente agevole.

Alla estremità superiore del tubo del comparatore è applicato orizzontalmente uno dei due microscopî micrometrici fra loro eguali dei quali è fornito lo strumento. La congiunzione del microscopio al tubo è tale da permettere l'alzamento o l'abbassamento di quello entro a certi limiti con moto micrometrico.

Ciò è ottenuto nel seguente modo. Il lungo tubo di lamina del comparatore, che si è detto avere lo spessore di un millimetro, ABB'A' (VII, 1), è rinforzato alla sua estremità superiore con un altro tubo lungo mm. 104 molto più robusto e di getto la cui forma risulta dalla rotazione, intorno all'asse, della figura mistilinea *abcde*. Questo tubo addizionale entra nel tubo principale a sfregamento per la lunghezza BC di mm. 48 e vi è fissato mediante la vite D. La fascia indicata in *bcb'c'*, che gira intorno al tubo addizionale, diligentemente lavorata a cilindro, e sverniciata, è quella veramente che viene a contatto colla intelaiatura di cui sopra è parola e costituisce il perno di rotazione all'estremità superiore del comparatore.

All'orifizio inferiore del tubo addizionale è applicato con tre viti *f'* un fondo di cui la figura *f f' g g'* è la sezione diametrale. Nel centro del fondo è praticato un foro,

dentro al quale è la madrevite della vite di acciaio, a gambo lungo mm. 122, la cui testa a disco vedesi in hh'. Girando questa vite nel senso di avvitarla, la sua testa avvicinasi al fondo, e nello stesso tempo spinge avanti, insinuandolo a sfregamento dolce nel tubo addizionale sopra descritto, un altro tubo liscio esternamente $pp'qq'$ sul quale è impostata ad angolo retto la mensoletta $rpp'r'$. Affinchè, quando si gira la vite nel senso di svitarla, e quindi la testa allontanasi dal fondo, il tubo mobile colla mensola risalga rimanendo a contatto colla imposta che è sotto alla testa della vite, serve una robusta molla ss' di acciaio ad elica, carica, la quale ha i suoi due punti di appoggio in s ed in s'. — Affinchè ruotando la vite in un senso o nell'altro, non giri con essa anche il tubo $pp'qq'$ che dee muoversi solo longitudinalmente, sulla superficie esterna di questo è fissato con viti in direzione parallela all'asse un listello di acciaio la cui sezione vedesi presso a', il quale trova la corrispondente incanalatura nel tubo abc.....$a'b'c'$..... Siccome però può occorrere di fare ruotare di una piccola quantità il porta-microscopio $rpqq'p'r'$ intorno all'asse verticale, la scanalatura è un po' più larga del listello (VII, 2) e nel tubo abc...$a'b'c'$... predetto hanno le loro madreviti due viti orizzantali $a.a$ (VII, 2), tangenti al tubo mobile, fra le punte delle quali può essere serrato il listello. Per dare al supporto del microscopio $rpqq'p'r'$ (VII, 1) una piccola rotazione intorno alla verticale, basta allora allentare una di tali viti a (VII, 2), mentre si stringe corrispondentemente l'altra: è il gioco preciso che s'incontra nei tubi degli oculari muniti di reticolo per dare a questo la dovuta orientazione. Affinchè il moto longitudinale del tubo cursore $pqq'p'$ (VII, 1) sia agevole senza tentennamenti, dalla parte opposta al listello è applicata colla vite t, nell'interno del tubo fisso, una molla d'acciaio le cui estremità entrano in apposite nicchie e la quale, mediante le due viti v, v', può essere spinta con minore o maggior forza a contatto del tubo cursore. Stringendo fortemente queste due viti si può arrivare a rendere inefficace l'azione della vite maggiore hh' e della molla. Una volta rettificato il comparatore giova che le viti v,v' sieno serrate.

La tavoletta rettangolare EE' appoggia sulla mensola $rpp'r'$sottoposta mediante la superficie cilindrica nella quale è terminato il listello disposto secondo uno dei lati minori della tavoletta medesima, così che il contatto è sopra una retta. Il movimento orizzontale della tavoletta è impedito dalla vite F, la quale passa liberamente, fino alla base della sua testa cilindrica, per lo spessore della mensola ed ha la sua chiocciola nel listello e tavoletta sovrapposta. Benchè sia stretta la vite F, è tuttavia possibile un lieve moto di rotazione della tavoletta intorno alla retta di contatto. Tale rotazione è prodotta mediante il sistema delle tre viti che sono all'altra estremità della mensola, due delle quali (come la G che sola si vede) hanno le loro madreviti nello spessore della mensola e premono colle loro punte arrotondate contro il piano inferiore della tavoletta; la terza H è nel mezzo fra le due, passa liberamente per la mensola ed entra nella sua madrevite che è nello spessore della tavoletta sovrapposta, e la trae con forza in giù a premere sulle punte delle due viti laterali poco fa nominate. È chiaro ora come, facendo agire successivamente nel medesimo senso (di avvitare o svitare) tanto le due viti prementi G quanto la vite tirante H, si possa ottenere il movimeno di rotazione della tavoletta (rispettivamente verso l'alto o verso il basso) intorno

all'estremità E e nello stesso tempo di fissare la tavoletta nell'ultima posizione che le si è data.

Fissi alle due estremità della tavoletta sono due anelli, i quali stringono il tubo del microscopio. All'estremità superiore del loro diametro verticale essi sono divisi da una fenditura che comprende l'asse del microscopio, e ai bordi di ciascuna fenditura (che rimangono distanti fra loro di una frazione di millimetro) sono saldate due appendici prismatiche verticali K,K′ (VII, 1) le quali hanno due faccie rispettivamente parallele, racchiudenti un intervallo eguale a quello della fenditura suddetta. Tali appendici sono attraversate orizzontalmente da una vite situata nel piano dell'anello, la quale, entrando liberamente per una delle appendici fino alla base della propria testa, trova nell'appendice di fronte la sua madrevite, e pertanto, qualora si muova nel senso di avvitarla, essa tende a ravvicinare le due appendici, e diminuire così la larghezza della fenditura e il diametro dell'anello. Lo scopo di tale costruzione è palese. Qualora si voglia spostare longitudinalmente il microscopio, o lo si voglia far ruotare intorno al proprio asse entro gli anelli, si allentano dapprima le viti che stringono gli anelli, e, raggiunta la posizione voluta, si stringono nuovamente, con che ogni ulteriore movimento rimane impedito.

Le appendici od orecchiette su descritte si assottigliano superiormente così da lasciare fra loro un intervallo in forma di U. In quell'intervallo vanno a trovarsi, senza però aver contatto colle orecchiette che lo formano, i due bastoncini L,L' avvitati nella custodia della livelletta a mano MM′, che si sovrappone al microscopio, come mostra la figura, quando si voglia rettificare il comparatore. È chiaro che, ove l'asse della livelletta fosse un po' troppo deviato dal piano verticale dell'asse del microscopio, in luogo di cadere andrebbe ad appoggiare coi suoi bastoncini contro le orecchiette più vicine.

Per ottenere i piccoli movimenti longitudinale e rotatorio del tubo del microscopio serve il seguente meccanismo. Un collaretto N aperto lateralmente e, sui due capi che determinano l'apertura, fornito di orecchiette alquanto disgiunte fra loro ed attraversate da una vite che può ravvicinarle diminuendo così il diametro del collaretto medesimo, è, mediante la vite ora detta, fissato invariabilmente sul tubo del microscopio fra l'obbiettivo e uno degli anelli prima descritti in grande vicinanza di questo. A quel collaretto è congiunta inferiormente una specie di scatola parallelepipeda P di ottone colle pareti perpendicolari e parallele all'asse del microscopio, dalla quale sieno state asportate la parete verticale che è verso l'oculare e la parete inferiore. Nello spessore delle due pareti laterali pressochè verticali sono le chiocciole di due viti (la testa di una è indicata in Q), le quali vanno a puntare in direzione opposta contro un'appendice parallelepipeda R fissata nel vicino lato minore della tavoletta EE′. Evidentemente, finchè ambedue le viti rimangano serrate contro la detta appendice R, la rotazione del tubo del microscopio è impedita anche qualora sieno allentate le viti degli anelli; ma, allentando una di quelle due viti Q e avvitando della stessa quantità l'altra, mentre il parallelepipedo R compreso fra le loro punte rimane fermo, la scatola in cui hanno le madreviti, non che il collaretto e il tubo del microscopio, riceveranno un corrispondente movimento di rotazione. Per ottenere il movimento longitudinale serve la terza vite S, la quale nel suo gambo liscio, che attraversa

la parete della scatola situata dalla parte dell'obbiettivo, ha due listelli che formano imposta da una parte e dall'altra di detta parete, così che, girando la vite, la testa di essa non può spostarsi relativamente alla parete da essa attraversata per un foro, il quale nel senso orizzontale è molto più largo del diametro del gambo. Quella vite ha la sua madrevite nell'appendice parallelepipeda contro la quale puntano le due viti laterali. È evidente che l'azione di queste non è impedita affatto dalla presenza della terza vite in grazia della larghezza del foro attraverso il quale quest'ultima passa. Effetto della vite S è evidentemente di spostare il microscopio dalla parte dell'obbiettivo quando si sviti: di spostarlo verso l'oculare quando invece si avviti. L'azione della terza vite non è impedita dalle viti laterali, giacchè durante il moto di quella, le punte di queste strisciano sulle faccie verticali del parallelepipedo R contro il quale appoggiano.

Alla distanza di un metro dall'asse del microscopio superiore (III, 2) trovasi inferiormente l'altro microscopio, la cui tavoletta è congiunta ad una mensola fissa sulle soglie di due finestre opposte delle quattro che sono aperte alla stessa altezza nel tubo del comparatore. Prima di praticare le quattro aperture, il costruttore rinforzò la parete saldandovi esternamente un manicotto *ee′ff′* lungo mm. 23 e fornito di modanature, per cui, misurato sul contorno delle finestre, lo spessore del tubo lo si trova ben maggiore del millimetro già enunciato.

Microscopî del comparatore. L'obbiettivo è al modo solito impostato alla estremità di un tubo di sottile lamina di ottone TUT′U′, il quale riveste parzialmente il tubo VV′ cui è avvitata la scatola micrometrica. Il tubo obbiettivo predetto ha una fenditura longitudinale, e, una volta che abbia preso la posizione richiesta dal rapporto voluto fra la grandezza della immagine e quella dell'oggetto preso di mira, viene fissato al tubo che lo infila, mediante un collaretto aperto XX′ e fornito di orecchiette che si ravvicinano col mezzo di una vite come per gli altri anelli.

Il costruttore aveva già dato all'obbiettivo la posizione conveniente rispetto al reticolo: essa è di circa 258 mm., mentre il centro dell'obbiettivo dista dall'oggetto metà della distanza che lo separa dalla immagine. L'ingrandimento del microscopio in tali condizioni è $= 60$.

Il reticolo, come vedesi nelle figure 7 delle Tav. V, VI, è composto di sei fili orizzontali e di uno verticale. Nel piano del reticolo è posta una sega con 5 punte: tali punte sono distanti fra loro quanto è il passo della vite micrometrica, o micrometro, e poichè con un giro del micrometro si porta un filo trasversale dalla immagine di una divisione della scala alla immagine di una divisione immediatamente vicina, ne viene che, il valore del passo apparente essendo $\frac{1}{10}$ di millimetro, il valore del passo reale sarà $\frac{1}{5}$ di millimetro giacchè, a motivo della posizione sopra indicata dell'obbiettivo fra l'oggetto e la sua immagine, questa risulta doppia di quello. — La piccola vite *w* (VII, 1) serve a portare il principio del giro della vite micrometrica in quel punto in cui una delle punte della sega cade esattamente in mezzo fra i due fili terzo e quarto.

La testa del micrometro è divisa in *cento* parti eguali e perciò ad ognuna di esse corrisponde il valore di *un micron.* Così il numero di giri del micrometro, che leggonsi sulla sega, dà le centinaia di *microni*, sulla testa del micrometro leggonsi

direttamente le *decine* e le *unità* di micron, e per istima i *decimi* di micron. Portando successivamente ciascuno dei *sei* fili in coincidenza colla stessa divisione, e facendo le letture corrispondenti, ho trovato per le distanze apparenti rispettive dei fili i seguenti risultati:

Micrometro inferiore.		Micrometro superiore.	
2°—1°	32,7 μ	2°—1°	33,0 μ
3—2	42,4	3—2	42,6
4—3	72,8	4—3	76,5
5—4	34,5	5—4	32,3
6—5	47,2	6—5	42,4
	229,6		226,8

(N.B. — Il primo filo trovasi in alto apparentemente).

Nelle mie ricerche il puntamento fu da me fatto sempre disponendo i due fili di mezzo del reticolo simmetricamente rispetto alla immagine della divisione o a quella del coltello presa di mira. Alcune letture disposte opportunamente mi hanno persuaso della grandissima regolarità del passo delle viti micrometriche in tutta la sua estensione: i risultati complessivi delle osservazioni ne mostrano la sensibile costanza. Ho creduto del resto inutile di occuparmi di questa causa di errore trattandosi di misure di differenze micrometriche che, se possono ritenersi costanti nel breve tempo in cui dura un semplice confronto, variano da un confronto all'altro per effetto della temperatura; onde è che le letture cadono successivamente in molti punti distribuiti su tutta la estensione del passo, e nella media dei risultati le piccole irregolarità di questo possono considerarsi come eliminate.

Talune osservazioni preliminari mi hanno condotto alla convinzione, che, delle dilatazioni irregolari dello strumento determinate da alterazioni di temperatura provenienti dalla presenza dell'osservatore, sono presso che insensibili quelle dovute al calore irraggiato dal corpo dell'operatore attraverso lo strato interposto d'aria, mentre sono molto temibili quelle occasionate dal diretto contatto.

Per togliere la possibilità di toccare inavvertentemente l'asta del comparatore durante le osservazioni e per dare un opportuno sostegno alle lampade elettriche, più che per difenderlo dal calore raggiante, è stato protetto il comparatore stesso col tubo esagonale di legno IJI'J' (III, 2), PQRS (III, 3) piantato inferiormente sul pavimento di legno e superiormente raccomandato ai mensoloni di marmo che sostengono lo strumento, così che fra comparatore e tubo non vi è alcun punto di contatto diretto. Naturalmente nel tubo sono praticate delle aperture in corrispondenza coll'obbiettivo e coll'oculare del micrometro inferiore ed altre per poter collocare a posto la livelletta e per leggere le sue indicazioni. Altri fori furono aperti nel tubo presso il pavimento per agevolare l'equilibrio di temperatura fra l'aria esterna e la interna.

Per girare il comparatore dalla scala al pendolo e vice-versa, serve la piccola impugnatura di legno L (III, 2) avvitata sopra un anello che abbraccia il tubo del comparatore presso al luogo di contatto del comparatore colla intelaiatura entro la quale esso ruota.

§ XXI. *Apparato per la determinazione del centro di gravità del pendolo.*

La Tav. VIII colle due proiezioni verticale ed orizzontale rappresentate nelle figure 1 e 2 mostra l'insieme dell'apparato col pendolo sovrappostovi. Le figure 3, 4, 5 sono due proiezioni verticali ortogonali fra loro ed una orizzontale del gruppo sul quale viene appoggiato in bilico il pendolo. Le figure 6 e 7 sono una proiezione verticale ed una orizzontale della estremità dell'apparato portante la leva di contatto.

Il pezzo prismatico di ottone, la cui sezione retta è il poligono mistilineo *abcd* (VIII, 3) e il cui spessore *aa'dd'* (5) (distanza delle basi) è di millimetri 23, appoggia sopra due punti di un supporto orizzontale AB (3) mediante le basi convesse di due peduncoli cilindrici C,C′ (2,3) ed è attraversato parallelamente ai suoi spigoli da un foro cilindrico DD′ (3), il quale si prolunga per l'asse del manicotto AA′ (5), BB′ (4).

Attraversa il foro, e può scorrervi dentro orizzontalmente a sfregamento dolce, il cilindro massiccio di ottone C (4,5) FG (1,2) del diametro di mm. 23 e della lunghezza di cm. 59, il quale, mediante il peduncolo D (1, 6) e la molla d'acciaio E (1), appoggia sull'istesso supporto orizzontale su cui appoggiano i peduncoli C,C′ (2,3).

Pertanto siffatto cilindro, infilato nel pezzo prismatico prima descritto, forma un sistema, il quale s'intende deva appoggiare sopra il supporto in quattro punti; e si capisce come ciò possa sempre avvenire in grazia della elasticità del peduncolo-molla E (1). I due pezzi componenti il sistema si fissano insieme mediante la vite di fermata F (3, 4, 5). Il cilindro presenta superiormente in tutta la sua lunghezza una spianatura orizzontale parallela all'asse e larga mm. 17, sulla quale è tracciata una serie di divisioni di centimetro in centimetro.

Nel manicotto cilindrico AA′ (5) è praticata una apertura, i cui lati rettilinei *bb'cc'* sono spianati in continuazione del piano della graduazione. Sopra il lato *cc'* è fissata mediante due piccole viti una laminetta rettangolare, la quale si estende fino in *v* al piano verticale dell'asse del cilindro e porta su questo lato undici divisioni distanti ciascuna dalla vicina per un decimo di millimetro. La prima di tali divisioni dalla parte verso la quale cresce la numerazione della scala, costituisce l'indice B (5). Il pezzo prismatico *abcd* (3), CC′ (2), che sorregge il pendolo, viene sempre disposto in modo che una delle divisioni centimetriche cada fra le dieci divisioni vicine all'indice B: allora è evidente che la posizione di quest'indice è data dalla lettura a quella divisione centimetrica, aumentata della sua distanza dall'indice B, la quale si può leggere direttamente in decimi di millimetro e per istima in centesimi.

Nei due ritti prismatici verticali G,G′ (3,5) formanti parte del supporto del pendolo sono praticati i fori cilindrici entro ai quali s'aggirano i perni d'una carrucola di acciaio H di piccolo diametro a gola molto allargata, e ad asse perpendicolare al piano verticale comprendente l'asse del cilindro graduato. Su tale carrucola viene appoggiato orizzontalmente il gambo del pendolo LM (1, 2, 3, 4, 5) in tale maniera ch'esso vi rimanga in bilico. Allora il piano verticale dell'asse della carrucola contiene il centro di gravità del pendolo e l'asse di questo riesce parallelo all'asse del cilindro graduato. Appoggiato a caso il pendolo sulla carrucola, per ottenere il bilico basterà

far girare opportunamente la carrucola H con che il pendolo si trasporterà orizzontalmente. La rotazione della carrucola ottiensi con due mezzi. Per ottenere i movimenti grandi si applica direttamente la mano alla periferia del disco N (1, 2, 3, 4, 5), nel cui centro è impostato l'asse della carrucola, e per ottenere i movimenti micrometrici si agisce sulla vite di richiamo O dopo di avere stretta la vite di pressione P.

Finchè non siasi ancora ottenuto il bilico del pendolo bisogna che questo, affinchè non trabocchi, sia sorretto almeno in un altro punto fuori del piano verticale dell'asse della carrucola. Vi è pertanto un pezzo ausiliario Q (1, 2), il quale si fissa al cilindro graduato alla maggior possibile distanza dalla carrucola. Nella sua parte essenziale esso consiste in un telaietto di forma quadrata con due lati orizzontali, situato in piano perpendicolare all'asse del cilindro graduato e col centro sull'asse del gambo del pendolo allorquando questo trovasi in equilibrio.

Il lato del telaio, misurato internamente, è alcun poco maggiore del diametro esterno del gambo, per cui, quando questo è in equilibrio, il telaietto non è dal gambo toccato in verun punto. Al cessare dell'equilibrio, il gambo va immediatamente a contatto col lato inferiore o col lato superiore secondo il caso. Uno dei lati verticali del telaietto è snodato intorno al suo estremo superiore e può essere rovesciato sopra il contiguo lato orizzontale. Allora il telaietto può ruotare intorno ad asse verticale situato nel piano verticale dell'asse del cilindro graduato e può quindi essere portato ad abbracciare il pendolo, oppure venire facilmente allontanato dal medesimo, il quale allora rimane libero e può essere asportato ed invertito.

Nel mettere il pendolo in bilico, si ha cura di disporre gli spigoli dei suoi coltelli in piano verticale. È poi sempre possibile di dare preventivamente al supporto *abcd* (3) del pendolo posizione tale che uno dei coltelli cada a breve distanza da quella estremità G (1, 2, 6, 7) del cilindro graduato dalla quale incomincia la numerazione. In questa estremità entra la vite R (1, 2, 6, 7), la quale, girata in un senso oppure nel senso opposto, sposta parallelamente all'asse del cilindro graduato un pezzo di ottone QQ′ la cui posizione relativa è data da un indice A (7) ad esso congiunto e accompagnato, a guisa dell'indice B, da una serie di dieci divisioni distanti reciprocamente un decimo di millimetro. Su questo pezzo di ottone QQ′ è fissato il supporto SS′ (6, 7) di una leva UU′ a braccia molto diseguali affinchè il piccolo movimento comunicato all'estremità del braccio minore venga proporzionatamente ingrandito all'estremità del braccio maggiore. Mediante la vite R, si può poi trasportare la leva ora detta a dolcissimo contatto col taglio del coltello più vicino in modo che l'estremità dell'altro braccio della leva incominci appena appena a staccarsi dal piuolo contro al quale ordinariamente appoggia.

Sia ora il pendolo in bilico sulla carrucola d'acciaio essendo il taglio del coltello più lontano dal centro di gravità a leggero contatto colla leva. Sieno b ed a le letture rispettive ai due indici B ed A. Consideriamo i quattro piani verticali passanti, il primo pel centro di gravità del pendolo e per l'asse della carrucola di sostegno e gli altri tre paralleli ad esso passanti rispettivamente per B, A e per il punto di contatto della leva col taglio del coltello, essendo il contatto leggerissimo. Indichiamo con x la somma delle distanze incognite che separano il primo piano dal secondo e

il terzo dal quarto e con s_1 la distanza, pure incognita, che separa il primo dal quarto, cioè la distanza del centro di gravità dal coltello più lontano. Avremo

$$s_1 - x = b_1 - a_1$$

Rovesciando il pendolo, cioè portando a contatto colla leva l'altro coltello, le letture ai due indici si cambieranno in b_2, a_2 e sarà s_2 la distanza del centro di gravità dal coltello che è a contatto colla leva, mentre x rimane lo stesso. Avremo allora

$$s_2 - x = b_2 - a_2$$

e pertanto: $$s_1 - s_2 = (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2) = D.$$

Conosciamo poi per la diretta misura la distanza dei coltelli, che indicheremo con L, per cui

$$s_1 + s_2 = L,$$

e quindi $$s_1 = \tfrac{1}{2}(L + D)$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2}(L - D).$$

§ XXII. *Illuminazione.*

Fino da quando ebbi la prima volta ad occuparmi del coordinamento delle ricerche necessarie per una completa determinazione della lunghezza del pendolo a secondi, parvemi che sarebbe stato molto vantaggioso di rendere le misure di lunghezza del pendolo e di durata delle sue oscillazioni, indipendenti dall'ora del giorno, sostituendo alla illuminazione diurna una illuminazione artificiale. In tal modo soltanto era possibile di scegliere per le osservazioni le ore più comode, più tranquille e più prossime a quelle nelle quali vengono fatte le determinazioni astronomiche del tempo, ed era possibile di ottenere facilmente costanza nella direzione e nella intensità della illuminazione.

Circa la scelta della sorgente luminosa artificiale, la difficoltà consistette nel trovare una lampada, dalla quale si potesse rapidamente e facilmente ottenere a momenti dati una luce molto viva, mentre ordinariamente rimanesse spenta o quasi spenta. Tentato con mediocrissimo successo di attivare un sistema di illuminazione con lampade a gas e a regolatore, mi decisi di ricorrere alla illuminazione elettrica prodotta da lampade a incandescenza del sistema Swan, inserite nel circuito di una *pila Gandini* di dieci elementi. Le lampade impiegate furono quattro. Una serviva per illuminare alternativamente l'estremità inferiore della scala e il coltello inferiore del pendolo; la seconda serviva per illuminare l'estremità superiore della scala e il coltello superiore; la terza, portata a mano, serviva per le letture alle teste dei micrometri ed ai termometri; la quarta finalmente era destinata ad illuminare l'arco graduato su cui si misura l'ampiezza dell'oscillazione.

Onde evitare qualunque possibile dannosa influenza sugli apparati dei vapori acidi svolti dalla pila, questa fu tenuta sempre segregata, come già si disse, nel vano della finestra G (II, 3) separato con una parete di tavole dalla stanza di osservazione, e tenuto sgombro (quando volevasi lasciar chiuse le invetriate) dai vapori mediante un aspiratore a fiamme di gas.

La montatura e la manutenzione della pila sono semplicissime: la costanza e la

durata dell'azione sono molto soddisfacenti. Fu però trovato necessario di usare alcune precauzioni ed avvertenze.

1°. Si prestò grande attenzione affinchè i contatti delle lamine di rame coi zinchi e coi carboni fossero nelle migliori condizioni.

2°. Si lasciava la pila montata solamente nelle ore nelle quali accadevano le operazioni: la smontatura e la rimontatura di una tale pila sono cosa di pochi minuti.

3°. Si trovò opportunissimo a pila smontata, di immergere i vasi porosi col liquido eccitatore da essi contenuto in altrettanti vasi contenenti del medesimo liquido, e ciò al fine che la pila entri immediatamente in azione subito dopo la sua rimontatura. Si ha così anche il vantaggio che, nelle ore d'inazione della pila, il liquido eccitatore dei vasi porosi riacqnista alquanto della sua efficacia a carico del liquido esterno.

Un altro punto importantissimo da considerare era quello della illuminazione dei tagli dei coltelli. Fino dalle prime esperienze fatte da *Plantamour* col pendolo di Repsold, fu introdotta la pratica di collimare al taglio del coltello, illuminando prima il fondo e lasciando oscuro il coltello, poi illuminando il coltello e lasciando nell'oscurità il campo. Finchè si trattò di coltelli di acciaio, codesto procedimento parve buono, e si ascrisse a quell'effetto di irradiazione che appunto con tale processo tendevasi ad eliminare, la piccola differenza nei risultati offerti separatamente dai due modi d'illuminazione. L'apparato che si trova a mia disposizione ha però i coltelli di agata, e fino dai primordi delle mie ricerche, mi accorsi di una differenza troppo grande, per essere ascritta a semplice effetto d'irradiazione, fra i risultati dei due modi d'illuminazione, e propriamente mi avvidi, che, illuminando simultaneamente coi riflettori appositi, forniti dal costruttore insieme collo strumento, così il coltello come il fondo (e ciò allo scopo di poter mettere il taglio del coltello in mezzo al doppio filo del micrometro), il coltello appariva terminato sul taglio da una grossa linea quasi nera, leggermente sfumata verso la base del coltello, la quale, a campo scuro, doveva sparire facendo sembrare spostato di tutta la sua grossezza il taglio del coltello. Tale fatto però non fu soltanto osservato da me, ma fu osservato ed anche spiegato dall'Oppolzer nel suo rapporto letto nel Congresso geodetico internazionale di Roma del 1883, del quale rapporto piacemi qui trascrivere il brano relativo ad una tale questione.

« La difficoltà che si presenta nella misura della distanza dei coltelli dipende da questo che, nella disposizione data da *Repsold* al pendolo a reversione di Bessel, questa misura si effettua mediante il confronto degli spigoli dei coltelli con una scala a *tratti*. Questo procedimento dà luogo a un effetto d'irradiazione che si sperava di evitare facendo apparire successivamente i coltelli illuminati ed oscuri e prendendo la media delle puntate. Perchè tale espediente fosse applicabile bisognerebbe che il taglio dei coltelli fosse assolutamente acuto, poichè allora il limite del coltello oscuro sarebbe identico con quello del coltello illuminato.

« Nelle circostanze nelle quali ci troviamo realmente, lo spigolo chiaro su fondo oscuro sembrerà sempre spostato verso il corpo del coltello, poichè si prenderà sempre come spigolo la linea del massimo riflesso prodotto dalla illuminazione verticale.

« Questa differenza non si è fatta sentire molto nei coltelli di acciaio ai quali

si può dare quasi rigorosamente la forma ideale di uno spigolo vivo; ma per coltelli in agata il puntamento del coltello illuminato accusa uno spostamento di circa 20 microni. Si poteva facilmente rendersi conto della esistenza di questa sorgente di errore illuminando simultaneamente il coltello dall'alto e per di dietro. Tutto il campo visuale è allora illuminato e interrotto nel mezzo da una riga oscura, larga 20 *microni*, la cui grossezza misura la distanza del taglio oscuro dalla linea del massimo riflesso. Il relatore crede dunque vantaggioso di rinunciare interamente al puntamento dei coltelli illuminati, di non osservare che i coltelli oscuri e di annientare l'influenza della irradiazione con dei mezzi appropriati. Uno di tali mezzi sembra al relatore poter p. es. essere questo: di portare uno dei fili del micrometro quasi a contatto collo spigolo, così che vi rimanga una linea di luce libera framezzo e poi cercando la riduzione di questo puntamento al mezzo dei due fili, tendendo nel microscopio un filo fisso ausiliario, avvicinando il filo mobile a quel filo fisso fino ad un contatto analogo a quello dapprima fatto col coltello e poi puntando il filo fisso col mezzo dei due mobili: la differenza fra la prima lettura e la media di queste due è la chiesta riduzione ».

Per parte mia stimai di poter superare la difficoltà illuminando simultaneamente coltello e campo e cercando nelle collimazioni di collocare nel mezzo dei due fili mediani mobili, il margine esterno della grossa linea (più grossa della metà dell'intervallo dei fili) che termina la immagine del coltello.

Mentre però il sistema di riflettori ausiliarî annessi all'apparato di Repsold permette la illuminazione simultanea del coltello inferiore e del fondo su cui apparisce proiettato, rende impossibile una simile illuminazione pel coltello superiore. Nel cercare di risolvere questa difficoltà mi avvidi di poter con vantaggio impiegare le lampade stesse che servono ad illuminare la scala e che, situate lateralmente davanti all'obbiettivo di ogni microscopio, inviano la loro luce sull'oggetto da osservare anche nella direzione dell'asse del microscopio, mediante un riflettore piano (con foro centrale davanti all'obbiettivo) inclinato di 60° alla direzione di quest'asse.

Per poter utilizzare a tale scopo le lampade ora dette bisognava che, girando il comparatore intorno al suo asse verticale, potessero esse pure ruotare onde trovarsi al momento delle collimazioni nelle stesse posizioni relativamente ai riflettori.

Per ottenere un tale scopo applicai le lampade a supporti tali che, rimanendo soltanto collegati alla fodera prismatica di legno, la quale protegge il comparatore senza avere con esso verun punto di contatto, fossero dotati di un movimento di rotazione intorno all'asse del comparatore medesimo. In ogni supporto poi vi è il mezzo per dare alla lampada rispetto al riflettore quella posizione che dà il grado più conveniente di illuminazione.

Dei raggi luminosi inviati nella direzione LMO (IV, 4, 5) dalla lampada verso il coltello, per mezzo del riflettore che sta davanti all'obbiettivo del microscopio, una parte cade sopra la prima faccia del coltello stesso fe, che è inclinata alla verticale di 45°, e viene riflessa verticalmente, un'altra parte procede oltre, va a cadere sullo specchio O che sta al di là del coltello, e, se questo specchio è perpendicolare all'asse del microscopio, ritorna indietro per O L, attraversa il microscopio ed entra nell'occhio dell'osservatore.

F a i raggi da quello specchio rimandati nell'occhio in direzioni poco differenti

fra loro, sono da considerare in particolare quelli che s'intersecano reciprocamente sul filo del coltello, in quanto che essi vanno, dopo di avere attraversato l'obbiettivo del microscopio, ad intersecarsi di nuovo nel luogo stesso dove si formerebbe l'immagine del filo del coltello se questo fosse per sè stesso luminoso. Ne viene in conseguenza, che il piano coniugato dello spigolo del coltello rimane diviso dalla immagine dello spigolo stesso in due parti, su una delle quali arrivano raggi riflessi dallo specchio O, che è al di là del coltello, mentre sull'altra parte non ne cadono affatto, e, pertanto, la immagine dello spigolo, alla quale si dovrà collimare col reticolo, sarà appunto la retta separatrice della parte oscura dalla parte illuminata del campo. Cosi dunque si ottiene la illuminazione del campo su cui si proiettano ambidue i coltelli e fin qui non apparisce verun vantaggio da tale disposizione in confronto di quell'altra.

Ma in tale condizione di cose la collimazione alla immagine dello spigolo non potrebbe effettuarsi nel modo col quale si effettua la collimazione di una divisione della scala, che consiste, come s'è detto, nel disporre il doppio filo mediano in modo che la divisione apparisca nel mezzo e parallela ai due fili. E la ragione di tale impossibilità sta in ciò che i fili del micrometro, i quali si proiettano sulla parte oscura del campo, non sono visibili.

Per ottenere la visibilità dei fili, così da una parte come dall'altra della retta immagine del taglio del coltello, presentasi ovvia la idea di illuminare la parte oscura del campo con quella luce che, cadendo sulle faccie anteriori *ef*, *fg* (IV, 4, 5) inclinate del coltello, si riflette parte verticalmente e parte quasi verticalmente.

A tale scopo fu disposto in immediata vicinanza del coltello, dalla parte del microscopio, un secondo specchietto M, parallelo al primo e terminato da un orlo rettilineo parallelo al taglio del coltello e tanto vicino al piano orizzontale di detto taglio, quanto è possibile senza intercettare veruno dei raggi luminosi che, provenendo dall'altro specchio, radono il taglio del coltello e vanno a formare l'immagine di questo.

In seguito a siffatta disposizione, il campo di vista interamente illuminato presentasi attraversato diametralmente da una stretta zona grigia rettilinea ed orizzontale (IV, 6). La tinta grigia della zona ha intensità massima sopra uno dei margini, il quale si presenta precisamente e nettamente terminato, staccando molto bene dal fondo chiaro, e corrisponde esattamente all'immagine del coltello. Da quel margine verso l'altro la tinta grigia va gradatamente indebolendosi fino a svanire per cui il secondo margine è piuttosto indeterminato. Quella striscia grigia è la immagine del lembo di coltello che sporge dal piano orizzontale dello spigolo dello specchietto, veduta attraverso la luce riflessa dal bordo dello specchietto e dai punti immediatamente vicini, giacchè il piano coniugato di detto spigolo essendo molto fuori dal piano coniugato del taglio del coltello (che solo è alla visione distinta) la immagine dello spigolo stesso deve presentarsi in isfumatura.

La larghezza e la intensità della striscia grigia possono alquanto diminuirsi avvicinando un po' più lo spigolo dello specchio al piano orizzontale del taglio del coltello. È facile regolare il potere riflettente dello specchio più lontano in guisa che la differenza di luce fra il fondo chiaro e il margine più scuro della zona grigia sia così piccola da rendere impercettibile l'effetto della irradiazione.

Ho potuto convincermi che, nella disposizione da me adottata, l'effetto dell'irradiazione è, in generale, trascurabile, osservando che, con varî gradi d'illuminazione relativa della zona e del fondo, il margine più scuro e preciso della zona non manifestava verun sensibile spostamento rispetto ai fili del reticolo mantenuti in una determinata posizione.

Soltanto nel caso in cui il fondo presenti nel centro del campo molta chiarezza e poca ne presenti sul contorno, mi sono accorto della esistenza della irradiazione notando, appunto nel centro del campo, una leggera inflessione del margine più scuro della zona, come se ivi dal fondo chiaro trabordasse alquanto di luce entro al confine della zona stessa.

Nelle figure 4 e 5 della Tav. IV sono date le sezioni degli specchietti riflettori e dei loro supporti fatte col piano comprendente l'asse del pendolo e quello del comparatore.

Lo specchietto O, che, rispetto al comparatore, trovasi al di là del coltello superiore (fig. 4), appoggia in B sull'orlo della intelaiatura cui quel coltello è congiunto e mediante l'appendice BA, che col suo peso tenderebbe a rovesciarlo verso il coltello, appoggia in A contro il gambo del pendolo.

Lo specchietto M trovasi fissato all'estremità di un tubetto CD, inargentato internamente e reso specolare affine di raccogliere nel campo una maggior quantità di luce. Questo tubetto appoggia in E, pure sulla intelaiatura suddetta, ed è tenuto in posizione dall'appendice DF mediante la quale in F appoggia contro il gambo.

Il riflettore O del coltello inferiore (fig. 5) ha un supporto della forma indicata dalla figura ABCDE, mediante il quale appoggia internamente in C sull'orlo inferiore del foro che gli sta di contro nel gambo, e appoggia contro il gambo mediante un archetto in cui termina l'estremità E dell'appendice DE.

Lo specchietto M, pure fisso all'estremità di un tubetto FG, simile a quello che porta lo specchietto omonimo dell'altro coltello, è tenuto a posto dall'appendice GH opportunamente conformata.

Benchè i supporti degli specchietti non sieno provveduti di sistemi di aggiustamento micrometrico, possono per facili e brevissimi tentativi, fatti con leggeri tocchi della mano, essere collocati al posto più conveniente.

§ XXIII. *Avvertenze e norme per l'uso e per l'aggiustamento dello strumento.*

1. Il piano L M (I, 7) su cui appoggiano successivamente i due coltelli del pendolo deve essere orizzontale. Per ottenere la orizzontalità servono le tre paia di viti K, L, M (III, 3) e la livelletta a mano (I, 10) la cui particella ha il valore angolare di 25″. Usando qualche diligenza si può giungere ad un errore di orizzontalità del piano suddetto minore di mezzo minuto primo.

2. Appoggiato il pendolo mediante uno dei suoi coltelli sopra quel piano, il gambo del pendolo si dispone verticalmente e la sua punta inferiore *d* (III, 1, 2) dovrà trovarsi in coincidenza collo *zero* dell'arco graduato fissato al supporto ed avente il suo centro nel taglio del coltello superiore. Se lo zero non corrisponde esattamente alla punta del pendolo si può soddisfare a tale condizione spostando opportunamente l'arco

graduato. Però avendo nelle mie osservazioni fatto dipendere la determinazione della durata di una oscillazione dalla osservazione di due serie staccate di sessanta passaggi successivi del pendolo per lo zero, e la determinazione dell'amplitudine dalla misura di una serie di massime digressioni osservate alternativamente da una parte e dall'altra dello zero, un errore anche rilevante nella posizione di questo non ha influenza sui risultati.

3. Si rende immobile il pendolo nella sua posizione verticale chiudendo la sua estremità inferiore fra la punta appianata di una vite orizzontale e l'estremità di un'asticella scorrevole, avente l'asse in continuazione di quello della vite e reagente contro la vite stessa in virtù di una forte molla ad elica. Girando la vite si può dare al pendolo un piccolo moto di rotazione intorno al coltello superiore. Vite ed asticella sono portate da un pezzo girevole a cerniera intorno ad asse parallelo al comune loro asse, e diretto orizzontalmente nel piano di oscillazione del pendolo, così che quando questo deve rimaner libero di oscillare, il pezzo suddetto viene ribaltato dietro all'arco graduato in modo da togliere qualunque impedimento al moto.

4. Quando l'aggiustamento si voglia fare indipendentemente dalla luce diurna, si mettono a posto gli specchietti riflettori che servono alla illuminazione dei tagli dei coltelli (IV, 4, 5). Mediante la livelletta apposita M M′ (VII, 1), fornita di viti di rettifica, di cui una particella ha il valore di 30″, mediante le viti G ed H (VII, 1) che servono a variare la direzione dell'asse del microscopio rispetto a quello del comparatore, e mediante le viti a, a, a (III, 2), A, A′ (VII, 3) del piede, si dà al comparatore direzione verticale e nello stesso tempo si dispongono gli assi di figura dei microscopî orizzontalmente. Tali due condizioni sono avverate quando la bolla della livelletta, appoggiata successivamente su ambidue i microscopî, tanto in una posizione quanto nella posizione invertita, si conserva nel medesimo posto in tutti gli azimut.

5. Sciolgasi l'anello madrevite $r\,r'$ (VII, 3) e per poter fare ciò si leva provvisoriamente il comparatore dal suo appoggio inferiore e si toglie il pezzo B B′ $n\,n'$ dal suo posto allentando una delle viti A, A′. Allentato l'anello $r\,r'$, si rimette il pezzo e il comparatore a posto e si serra nuovamente la vite. Mediante la vite B B′ del piede s'innalzi o si abbassi il comparatore diretto al pendolo fintanto che, guardando pel microscopio inferiore, si vegga la immagine del taglio del coltello passare per la punta di mezzo del pettine micrometrico. Si cerca intanto di vedere distintamente il taglio del coltello servendosi della vite orizzontale contro la quale appoggia la punta inferiore del pendolo. Ottenuto lo scopo, si ripetono le operazioni di prima per poter stringere fortemente l'anello madrevite $r\,r'$. Questa avvertenza di stringere fortemente il detto anello è assolutamente necessaria; perchè altrimenti potrebbe accadere (e questo m'è accaduto taluna volta nelle osservazioni di prova) che, girando il comparatore, giri per attrito anche la vite B B′ e quindi che il comparatore s'innalzi o si abbassi mentre dovrebbe rimanere sempre alla stessa altezza.

6. Si sposti in seguito il tubo corsoio $p\,q\,p'q'$ (VII, 1) che porta il microscopio superiore, servendosi della vite $h\,h'$ dopo di avere alquanto allentate le viti v, v' (con che naturalmente l'altezza dell'altro microscopio non varia) finchè, guardando pel microscopio stesso, si vegga l'immagine del taglio del coltello superiore passare per la punta di mezzo delle cinque che compongono il pettine micrometrico rispettivo. Indi si stringono nuovamente le viti v e v'. Successivamente, dopo di avere allentato

alquanto le viti che stringono gli anelli K, K′, si sposta il microscopio nella direzione del proprio asse colla vite S (VII, 1) fino a tanto che la visione del taglio del coltello sia distinta come quella dei fili micrometrici e sia nullo qualunque indizio di parallasse del reticolo.

7. Si dispongono i fili dei reticoli, mediante la rotazione dei microscopî intorno ai rispettivi assi ottenuta colle viti Q , così che riescano paralleli ai tagli dei coltelli. Ciò si fa tanto pel micrometro superiore, quanto per l' inferiore, dopo di che si stringono nuovamente le viti dei collaretti K , K′.

8. Mediante la piccola vite *w* esterna alla scatola micrometrica si trasporta, occorrendo, il telaietto dei fili di ogni micrometro in posizione tale che, l' indice sulla testa del micrometro segnando zero, i due fili di mezzo si trovino a eguale distanza da una delle cinque punte del pettine micrometrico. Lo scopo di questa rettifica è di poter vedere prossimamente nel movimento dei fili del reticolo il principio di ogni giro successivo della vite micrometrica.

9. Il verso nel quale devono contarsi positivamente i giri (nel nostro strumento da sotto in su apparentemente) è determinato dal verso nel quale si vedono muoversi i fili del reticolo, mentre il tamburo del micrometro gira in modo che le cifre, le quali si presentano successivamente all' indice, sieno crescenti. Per non aver a leggere rivoluzioni negative è opportuno di contare *zero* rivoluzioni sulla prima punta del pettine (nel caso nostro sulla punta inferiore) così che sulla punta di mezzo si leggono *due* giri e sull'ultima si leggono *quattro* giri.

10. Essendo i due micrometri sulle posizioni $2^{riv}\cdot0^{p}$, ed i tagli dei coltelli apparendo nel mezzo dei due fili mediani, si gira il comparatore in guisa da portare i microscopî presso a poco nel piano della scala, cioè in modo che, guardando attraverso i microscopî stessi, appariscano le divisioni estreme della scala. Se allora, mediante la vite O (III, 1) che serve a spostare verticalmente la scala, si fa in modo che nel mezzo dei due fili mediani di un microscopio (nelle nostre esperienze sempre il microscopio inferiore) si trovi la divisione *zero* della scala, la divisione 1^{M} si troverà certamente fra mezzo ai due fili mediani dell'altro microscopio, giacchè la distanza dei due microscopî è eguale alla distanza dei coltelli e questa dal costruttore fu fatta molto prossimamente eguale ad un metro.

11. Si porta in seguito l'estremità superiore della scala alla distinta visione del microscopio superiore, servendosi del meccanismo apposito *de* (III, 3).

12. Mediante la medesima livelletta M M′ (VII, 1) che ha servito per disporre verticale l'asse del comparatore, e mediante le viti *i*, *i* (III, 1) che agiscono come le viti *a*, *a*, *a* (III, 2) al piede del comparatore, e che si trovano al piede della scala, si dà pure a questa posizione verticale. Ciò fatto, guardando pel microscopio inferiore, si dovrebbe vedere distintamente l'altra estremità della scala senza bisogno di ulteriori aggiustamenti. Nel caso in cui si presentasse un piccolo errore di parallasse fra il reticolo e le divisioni della scala, si potrà toglierlo collo spostare alquanto lungo il proprio asse il microscopio inferiore mediante la sua vite S, dopo avere alcun poco allentato le viti dei collaretti K e K′ (VII, 1), salvo poi a rimettere alla visione distinta il taglio del coltello inferiore del pendolo mediante la vite della morsetta che trattiene inferiormente la punta del pendolo.

13. Disposto il comparatore in modo che il filo verticale del micrometro inferiore si trovi, nel caso nostro, sulla linea di contatto delle immagini della scala e del termometro metallico, si osservi se anche il filo verticale del microscopio superiore apparisca sul margine del lembo graduato: se ciò non avesse luogo, si faccia ruotare il tubo corsoio $p\,p'q\,q'$ (VII, 1), portante il microscopio superiore, intorno all'asse verticale del comparatore, mediante le opportune viti a, a (VII, 2) operanti a contrasto, fino a che l'errore sia tolto. Bisogna naturalmente fare in modo, che quando il filo verticale del microscopio superiore è a posto, lo sia anche il filo verticale del microscopio inferiore.

14. Conviene verificare se con un giro intero della vite di ciascun micrometro si porti il doppio filo da una divisione all'altra della scala. Siccome non sarà possibile ottenere in modo costante soddisfatta una tale condizione con tutta l'esattezza, converrà nelle letture procedere secondo il modo solito usato nelle misure micrometriche, cioè puntare sempre a più di una divisione onde potere ad ogni lettura applicare la correzione del passo ad essa conveniente. Nel nostro strumento tale condizione è così bene adempiuta per opera del costruttore stesso, come può riconoscersi dai quadri delle osservazioni, che non reputai necessario di toccare minimamente la posizione degli obbiettivi dei microscopî rispetto ai piani dei fili.

15. Naturalmente dopo di avere eseguiti tutti gli aggiustamenti descritti, si dovrà verificare se il comparatore sia rimasto verticale e gli assi dei microscopî sieno ancora orizzontali e, nel caso di bisogno, correggere nuovamente.

§ XXIV. *Influenza di alcuni errori di aggiustamento sul risultato della comparazione.*

Suppongo che i fili verticali dei due micrometri si trovino in uno stesso piano coll'asse di rotazione del comparatore, e tanto sulle divisioni 0 e $1^{\rm M}$ della scala, quanto sui tagli dei coltelli, le collimazioni vengano sempre fatte sui punti che, in una data posizione del comparatore, si trovano nel piano ora detto determinato dall'asse del comparatore e dai fili micrometrici verticali.

Se la perpendicolare comune ai tagli dei coltelli e la perpendicolare alle divisioni 0 e $1^{\rm M}$ della scala non sono parallele al piano di collimazione, ma formino rispettivamente con esso gli angoli γ e σ, essendo C ed S le vere lunghezze di dette perpendicolari, le distanze C′ ed S′ dei punti collimati, sia nel pendolo sia sulla scala, avranno i valori:

$$C' = C \sec\gamma \qquad ; \qquad S' = S \sec\sigma \,.$$

Se le rette C′ ed S′ fossero parallele all'asse di rotazione del comparatore, questo ne darebbe direttamente la differenza di lunghezza. Ove però esse formino coll'asse del comparatore rispettivamente gli angoli c ed s il comparatore porge invece la differenza $\varDelta'$ delle loro proiezioni sull'asse del comparatore, cioè:

$$\begin{aligned}\varDelta' &= C'\cos c - S'\cos s \\ &= C \cos c \sec\gamma - S \cos s \sec\sigma \,,\end{aligned}$$

ovvero, tralasciando i termini d'ordine superiore al secondo,

$$\varDelta' = C - S - \frac{C}{2}(c^2 - \gamma^2) + \frac{S}{2}(s^2 - \sigma^2)\,.$$

Ponendo $C - S = \Delta$, e, pel calcolo dei due ultimi termini, $C = S$, avremo:

$$\Delta' = \Delta - \frac{S}{2}(c^2 + \sigma^2 - \gamma^2 - s^2).$$

In questo caso il massimo errore si ha quando una delle due rette C' ed S' è parallela all'asse del comparatore per cui c od $s = 0$, e l'altra retta delle due non devia dal piano di collimazione, vale a dire se $s = 0$ sia $\gamma = 0$, se $c = 0$ sia $\sigma = 0$. Abbiamo allora o

$$\Delta' = \Delta - \frac{S}{2}(c^2 + \sigma^2)$$

oppure

$$\Delta' = \Delta + \frac{S}{2}(\gamma^2 + s^2).$$

Se invece di fare la collimazione sui punti delle scale o dei coltelli situati nel medesimo piano coll'asse del comparatore e coi fili micrometrici verticali, si fanno le collimazioni stesse alle estremità delle rette C ed S abbiamo:

$$\Delta'_1 = C \cos c \cos \gamma - S \cos s \cos \sigma$$

$$= C - S - \frac{C}{2}(c^2 + \gamma^2) + \frac{S}{2}(s^2 + \sigma^2)$$

ovvero, facendo $C - S = \Delta$ e $C = S$ nei due ultimi termini,

$$\Delta'_1 = \Delta - \frac{S}{2}(c^2 + \gamma^2 - s^2 - \sigma^2).$$

In tal caso il massimo errore si ha quando una delle due rette da misurare sia parallela all'asse di rotazione del comparatore. Allora si ha una o l'altra di queste due equazioni:

$$\Delta'_1 = \Delta - \frac{S}{2}(c^2 + \gamma^2)$$

$$\Delta'_1 = \Delta + \frac{S}{2}(s^2 + \sigma^2).$$

In un caso e nell'altro, ammettendo che ciascuno dei quattro angoli c, γ, s, σ possa assumere il valore di $1' = \frac{1}{R'} = \frac{1}{3438}$ del raggio, abbiamo tutto al più:

$$\Delta' = \Delta \mp \frac{S}{2}\left(\frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R'^2}\right)$$

$$= \Delta \mp 0{,}000\ 000\ 0846\, S.$$

Fatto $S = 1^m$ si ottiene

$$\Delta' = \Delta \mp 0^\mu{,}0846.$$

Cioè l'error massimo della comparazione non potrà superare nel caso più sfavorevole *un* decimo di *micron* in più od in meno.

Ancorchè la scala ed il pendolo sieno tutti e due paralleli all'asse di rotazione del comparatore, è possibile che i due punti collimati del pendolo si trovino a una distanza diversa da quella a cui si trovano i due punti della scala presi di mira rispetto all'asse del comparatore. Giacchè vi è sempre uno spazio piccolissimo entro al quale, spostando l'oggetto nella direzione dell'asse del microscopio, l'oggetto non cessa di

essere veduto distintamente e non nasce nel reticolo veruna parallasse sensibile. Pertanto possiamo supporre esista una differenza d fra la distanza del pendolo e quella della scala.

In causa delle deviazioni c ed s, delle quali sopra è parlato, può però la differenza di distanza, per esempio delle estremità inferiori, essere alquanto maggiore di quella d che passa fra le distanze delle estremità superiori. Nel caso più sfavorevole, in cui uno o l'altro dei due accennati angoli sia nullo e l'altro massimo ed eguale p. es. ad $\frac{1'}{2}$, la differenza di distanza fra le estremità inferiori potrà essere

$$d + 1^{m} \operatorname{sen} 0',5 = d + 0^{mm},15 = d_1 .$$

Questa differenza d_1 non può però eccedere il massimo valore dello spostamento che si può dare all'oggetto senza che scemi la distinzione della visione. Supponiamo con Bruhns $d_1 = 0^{mm},3$ e allora sarà $d = 0^{mm},15$. Se indichiamo con δ la inclinazione all'orizzonte del microscopio superiore l'errore che si commette nella comparazione delle estremità superiori dipendentemente da d sarà

$$d \operatorname{tg} \delta$$

e, indicando con ε l'inclinazione del microscopio inferiore, l'errore di comparazione dipendentemente da d_1 sarà

$$d_1 \operatorname{tg} \varepsilon .$$

Nel caso più sfavorevole in cui i due errori si sommino, l'errore complessivo sarà

$$d (\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \varepsilon) + 0^{mm},15 \operatorname{tg} \varepsilon .$$

Posto $\delta = \varepsilon = \frac{1'}{2}$, $d = 0^{mm},15$, risulta l'errore $0^{mm},15 \frac{3}{2} \frac{1'}{R'} = 0^{\mu},07$.

Il massimo valore che può assumere d_1 è d, ma allora deve essere anche $s = 0$ e quindi il massimo possibile errore sarà, coi dati superiori,

$$d (\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \delta) = 0^{mm},3 \frac{1'}{R'} = 0^{\mu},09 .$$

In conclusione anche questo errore è sempre trascurabile, nei limiti di esattezza adottati, sempre che siasi aggiustato convenientemente lo strumento.

§ XXV. *Della influenza di alcuni errori istrumentali sui risultati delle osservazioni.*

Gli errori dei quali vuolsi qui tener conto possono essere definiti come segue.

1°. Pel centro di gravità C (VII, 4) del pendolo s'immagini condotto il piano perpendicolare al taglio del coltello più lontano A A′ e sieno A e B i punti d'intersezione di quel piano rispettivamente con ambidue i tagli A A′ e B B′. Sarà la retta B A perpendicolare al taglio A A′ ma, in generale, non all'altro B B′. S'immagini in seguito il piano R B D condotto per B perpendicolarmente a B A: esso taglia il piano dell'angolo B A A′ in una retta B D parallela ad A A′. Il piano dell'angolo B′B A taglia il piano R B D lungo la B Q e forma col piano D B A il diedro misurato dall'angolo piano Q B D, che porremo $= d$ e che diremo *deviazione diedrale* del secondo coltello rispetto al primo. La retta B B′ fa colla sua proiezione B Q sul piano R B D l'angolo Q B B′, che indicheremo con e e che diremo *elevazione* del coltello B B′ sul piano perpendicolare alla retta B A. Se B A è verticale come ritiensi

succeda nel caso pratico, a motivo della orizzontalità di A A′, quando si eseguisce la misura della distanza dei coltelli, e rappresenta la *inclinazione del 2° coltello* all'orizzonte e d è la *differenza d'azimut* dei due coltelli.

Sono paralleli fra loro i tagli dei coltelli allora soltanto che d ed e sieno simultaneamente nulli.

2°. Conducansi le rette $CB = \sigma_2$ e $CE = s_2$, quest'ultima perpendicolare in E al coltello BB_1. Le rette $CA = s_1$ e $CE = s_2$, che misurano rispettivamente le distanze del centro di gravità C dai coltelli primo e secondo, possono formare fra loro un angolo diverso da 180°, cioè non cadere una sul prolungamento dell'altra, anche quando i tagli dei coltelli sono paralleli fra loro. Dicasi ω il supplemento dell'angolo A C E, cioè l'angolo fatto da una di quelle perpendicolari col prolungamento dell'altra e dicasi ω_1 il supplemento dell'angolo B C A.

3°. Si ritiene che nel pendolo l'asse longitudinale di figura coincida coll'asse principale d'inerzia di momento minimo. Per brevità di discorso diremo *equatore d'inerzia* del pendolo il piano condotto pel baricentro che comprende i due assi principali d'inerzia di momenti *massimo* e *medio*, e diremo *primo meridiano d'inerzia* il piano che comprende gli assi principali di momenti massimo e minimo. Può accadere che i tagli dei due coltelli oltre a non essere paralleli fra loro, non sieno paralleli all'equatore d'inerzia e non deviino egualmente dal primo *meridiano*. Si può individuare la direzione di ogni coltello rispetto a quei due piani col mezzo di coordinate angolari analoghe alla latitudine ed alla longitudine geografiche. Ammettiamo in conseguenza che i tagli dei coltelli primo e secondo abbiano rispettivamente le *latitudini* μ_1 e μ_2 e le *longitudini* ν_1 e ν_2.

Se, essendo orizzontale il taglio del coltello superiore, possa ammettersi l'equatore d'inerzia come orizzontale, abbiamo $\mu_2 - \mu_1 = e$, $\nu_1 - \nu_2 = d$.

Si tratta ora di tener conto della influenza esercitata dagli errori e, d, ω, $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ sulla dipendenza esistente fra la distanza misurata dei coltelli e la lunghezza del pendolo semplice equivalente.

Mentre il pendolo oscilla intorno al coltello distante s_1 dal centro di gravità, la lunghezza l_1 del pendolo semplice equivalente è espressa da

$$l_1 = s_1 + \frac{i_1^2}{s_1},$$

essendo i_1 il raggio di girazione del pendolo intorno ad asse passante pel centro di gravità parallelamente al taglio del primo coltello. Quando il pendolo oscilla intorno all'altro coltello, supposto non parallelo al primo, abbiamo

$$l_2 = s_2 + \frac{i_2^2}{s_2},$$

essendo i_2 il raggio di girazione intorno al 2° coltello. Supposta l'*eguaglianza dei tempi di oscillazione* intorno ai due coltelli, abbiamo anche $l_2 = l_1 = l$, e allora, avendosi

$$l_1 s_1 - l_2 s_2 = l(s_1 - s_2),$$

risulta

$$l = s_1 + s_2 + \frac{i_1^2 - i_2^2}{s_1 - s_2}. \tag{101}$$

Valori approssimativi di s_1 ed s_2, i quali servano esuberantemente al calcolo del denominatore della piccola frazione del secondo membro, e, in generale, di tutti i piccoli termini di correzione che s' incontreranno in seguito, si ottengono mediante l'*apparato per la determinazione del centro di gravità* annesso allo strumento.

La somma $s_1 + s_2$ è quella che si cerca di ottenere colla maggior precisione possibile confrontando, mediante il comparatore, la distanza dei coltelli colla lunghezza della scala.

Nel misurare la distanza dei coltelli ecco come si fa. Si rivolge il comparatore al pendolo in modo che, il taglio del coltello superiore essendo orizzontale, esso apparisca alla visione distinta nel microscopio superiore e in modo che il punto A cada, per quanto si può stimare, nel centro del campo. In virtù del processo che serve a rettificare tutto lo strumento, il punto che cade alla distanza della visione distinta nel centro del campo del microscopio inferiore trovasi verticalmente sotto il punto A, per cui, ponendo anche il coltello inferiore alla visione distinta, la retta che si misura realmente è la verticale A B, che indicheremo con L_1, ed ha per espressione:

$$L_1 = \sqrt{s_1^2 + \sigma_2^2 + 2\, s_1\, \sigma_2 \cos \omega_1}\,. \tag{102}$$

Se invece della retta A B si potesse misurare la retta $A\,E = L$ avremmo:

$$L = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + 2\, s_1\, s_2 \cos \omega} \tag{103}$$

ovvero, tenuto conto soltanto dei termini fino al terzo ordine inclusive per quanto riguarda ω,

$$L = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - s_1\, s_2\, \omega^2}\,,$$

d'onde:

$$s_1 + s_2 = L + \frac{s_1\, s_2}{2L}\, \omega^2 \tag{103)^1 (}$$

cioè, ove si conoscesse L e approssimativamente s_1, s_2, ω, si conoscerebbe $s_1 + s_2$. Importa pertanto di vedere quale relazione passi fra la quantità misurata L_1 ed L.

Innanzi tutto, se indichiamo con b l'angolo E C B, abbiamo

$$s_2 = \sigma_2 \cos b \tag{104}$$

e, sottraendo il quadrato della (103) da quello della (102) colla osservazione che

$$L_1^2 - L^2 = 2L\,(L_1 - L) + (L_1 - L)^2\,,$$

e avendo riguardo alla (104), sarà

$$2L\,(L_1 - L) + (L_1 - L)^2 = \sigma_2^2 \operatorname{sen}^2 b + 2\, s_1\, \sigma_2\, (\cos \omega_1 - \cos b \cos \omega)\,. \tag{105}$$

Se ora con centro B e raggio *uno* si descrive la sfera, questa sarà tagliata dalle rette B A, B C, B D nei punti G, H, M_1, i quali determinano un triangolo sferico G H M_1 *birettangolo* in H e G, così che $M_1 G = M_1 H = H G M_1 = G H M_1 = 90°$. E, se indichiamo con c il piccolo angolo C B A, sarà arco G H = ang. sferico G M_1 H = c. Sia M_1 Q l'arco di cerchio massimo nel quale il piano E B D taglia la sfera, e sia M_2 l'intersezione con essa del taglio B B′ del secondo coltello. Se si considerano condotti pel polo G del cerchio M_1 Q i due cerchi massimi G M_1 e G M_2 Q, è l'arco Q M_2 = e

e l'arco $M_1 Q$ = ang. sferico $M_1 G Q = d$ e, condotto anche l'arco $H M_2$, è questo la misura dell'angolo formato da $B C = \sigma_2$ con $B B'$ ed ha quindi per valore $90° - b$. Finalmente s'indichi con a l'angolo sferico $M_1 H M_2$ e, poichè $G H M_1 = 90°$, sarà $G H M_2 = 90° - a$ e sarà eguale all'angolo diedro fatto dal piano $B C E$ col piano $B C A$. Intanto dal triangolo sferico $G H M_2$, nel quale l'angolo in G è $= 90° + d$, applicando le solite formole, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} e \cos c - \cos e \operatorname{sen} c \operatorname{sen} d \\ \cos b \operatorname{sen} a &= \operatorname{sen} e \operatorname{sen} c + \cos e \cos c \operatorname{sen} d \\ \cos b \cos a &= \cos e \cos d , \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

dalle quali, tenendo conto soltanto fino ai termini del 2° ordine inclusive, risultano le altre:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= e - c\, d \\ \operatorname{sen}^2 b &= e^2 \\ \cos b \operatorname{sen} a &= d + c\, e . \end{aligned}\right\} \quad (106)'$$

Tirando ora $B P_1$ parallela a $C A$ e $B P_2$ parallela ad $E C$ e intendendo i punti P_1 e P_2 sulla sfera di raggio uno che ha il centro in B, nel triangolo sferico $P_1 P_2 H$ è evidente che $H P_1$ non è altro che l'arco $H G$ prolungato ed è eguale ad ω_1. Sarà poi $P_1 P_2 = \omega$, e $P_2 H$ sarà sul prolungamento di $M_2 H$ ed $= b$.

Essendo gli angoli sferici $P_1 H P_2$ e $P_1 H Q$ fra loro supplementari, sarà l'angolo $P_1 H P_2 = 90° + a$ e allora dal triangolo sferico $P_1 P_2 H$ si ottiene subito:

$$\cos \omega = \cos \omega_1 \cos b - \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a .$$

Moltiplicando ambidue i membri di questa equazione per $\cos b$, e sottraendo i prodotti da $\cos \omega_1$, abbiamo

$$\cos \omega_1 - \cos b \cos \omega = \cos \omega_1 \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} b \cos b \operatorname{sen} a,$$

e sostituendo questo valore nella (105) risulta:

$$2L(L_1 - L) + (L_1 - L)^2 = \sigma_2 (\sigma_2 + 2 s_1 \cos \omega_1) \operatorname{sen}^2 b + 2 s_1 \sigma_2 \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} b \cos b \operatorname{sen} a .$$

Si osservi che il termine più grande del secondo membro è una piccola quantità del 2° ordine e pertanto di tale ordine è pure $L_1 - L$, mentre $(L_1 - L)^2$ è del 4° ordine. Limitandoci ai termini del 2° ordine dovremo tralasciare dunque nel primo membro il termine $(L_1 - L)^2$ e l'ultimo termine del 2° membro che è del 3° ordine. E rimane, avuto riguardo alle equazioni (106'),

$$2L (L_1 - L) = \sigma_2 (\sigma_2 + 2 s_1 \cos \omega_1) e^2 .$$

Ma poichè $\sigma_2 = s_2 + \frac{s_2}{2} b^2$; $\cos \omega_1 = 1 - \frac{1}{2} \omega_1^2$, per l'approssimazione adottata, avremo:

$$2L (L_1 - L) = (s_2^2 + 2 s_1 s_2) e^2 . \quad (107)$$

Sospendendo il pendolo sull'altro coltello l'inclinazione e del coltello inferiore

rimane quella stessa di prima, ma s_2, s_1 ed L_1 si cambiano rispettivamente in s_1, s_2, L_2 ed abbiamo

$$2L(L_2 - L) = (s_1^2 + 2\, s_1\, s_2)\, e^2 . \qquad (108)$$

La media aritmetica delle due (107) e (108), divise prima per 2L prossimamente $= 2(s_1 + s_2)$, porge:

$$\frac{1}{2}(L_1 + L_2) - L = \{ (s_1 + s_2)^2 + 2\, s_1\, s_2 \} \frac{e^2}{4(s_1 + s_2)},$$

$$L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) - \left(\frac{s_1 + s_2}{4} + \frac{s_1\, s_2}{2(s_1 + s_2)} \right) e^2 .$$

Pertanto, avendosi dalla (103)[1]

$$L = s_1 + s_2 - \frac{s_1\, s_2}{2(s_1 + s_2)}\, \omega^2 ,$$

sarà:

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) + \frac{s_1\, s_2}{2(s_1 + s_2)}\, \omega^2 - \left(\frac{s_1 + s_2}{4} + \frac{s_1\, s_2}{2(s_1 + s_2)} \right) e^2 . \qquad (109)$$

Per il calcolo di $i_1^2 - i_2^2$ giova definire le direzioni dei tagli dei coltelli rispetto agli assi principali d'inerzia del corpo. Sieno C X, C Y, C Z i tre assi principali d'inerzia e nella figura (VII, 5) sia X Y Z il trirettangolo corrispondente. Sieno M_1 ed M_2 i punti della sfera nei quali èssa è incontrata, dalla parte positiva dell'asse delle X, da due rette condotte pel centro di gravità parallelamente ai tagli dei coltelli. Sieno ε_1, ε'_1, ε''_1 gli angoli misurati rispettivamente dagli archi $M_1 X$, $M_1 Y$, $M_1 Z$ formati dal primo coltello coi tre assi coordinati e sieno ε_2, ε'_2, ε''_2 gli angoli analoghi pel 2° coltello. Intenderemo che ε_1 ed ε_2 sieno due angoli molto piccoli, cioè che i tagli dei coltelli sieno prossimamente paralleli all'asse principale C X. Necessariamente gli altri angoli saranno prossimamente retti. Detti k, k', k'' i tre raggi di girazione del corpo rispettivamente intorno ai tre assi principali d'inerzia, per un noto teorema avremo:

$$i_1^2 = k^2 \cos^2 \varepsilon_1 + k'^2 \cos^2 \varepsilon'_1 + k''^2 \cos^2 \varepsilon''_1$$
$$i_2^2 = k^2 \cos^2 \varepsilon_2 + k'^2 \cos^2 \varepsilon'_2 + k''^2 \cos^2 \varepsilon''_2$$

dove i due ultimi termini del secondo membro di ciascuna equazione sono piccolissimi in confronto del primo, in grazia della ipotesi fatta intorno alla grandezza relativa degli angoli ε. Dalle due equazioni si ottiene:

$$i_1^2 - i_2^2 = k^2 (\cos^2 \varepsilon_1 - \cos^2 \varepsilon_2) + k'^2 (\cos^2 \varepsilon'_1 - \cos^2 \varepsilon'_2) + k''^2 (\cos^2 \varepsilon''_1 - \cos^2 \varepsilon''_2) .$$

In ogni pendolo essendo k' poco differente da k possiamo porre:

$$k'^2 = k^2 \pm \delta\, k^2$$

e allora, osservando che

$$\cos^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon' + \cos^2 \varepsilon'' = 1 ,$$

avremo

$$i_1^2 - i_2^2 = (k^2 - k''^2)(\cos^2 \varepsilon''_2 - \cos^2 \varepsilon''_1) \pm \delta\, k^2 (\cos^2 \varepsilon'_1 - \cos^2 \varepsilon'_2) . \qquad (110)$$

In generale il termine in $\delta\, k^2$ è piccolissimo in confronto del primo termine. Se questo può dirsi per i pendoli di Bohnenberger, di Kater e per quello immaginato da Bessel

ed eseguito da Lohmeier [1], a più forte ragione vale per il pendolo di Repsold, il quale, fatta astrazione dalle armature dei coltelli, è un solido di rivoluzione intorno all'asse suo longitudinale [2]. Per il pendolo di Repsold potremo quindi senza errore sensibile porre $\delta k^2 = 0$ per cui otteniamo semplicemente:

$$i_1^2 - i_2^2 = (k^2 - k''^2)(\cos^2 \varepsilon''_2 - \cos^2 \varepsilon''_1) . \qquad (111)$$

È poi da osservare, tanto per il pendolo di Repsold quanto per qualunque altro pendolo, che k''^2 è considerevolmente minore di k^2.

Prolungando ora i meridiani ZM_1 e ZM_2 fino all'*equatore d'inerzia* XY in Q_1 e Q_2, e supposto che sia YZ il *primo meridiano*, a motivo delle definizioni già date in principio, avremo:

$$Q_1 M_1 = \mu_1 \quad , \quad Q_2 M_2 = \mu_2 \quad , \quad X Q_1 = \nu_1 \quad , \quad X Q_2 = \nu_2 .$$

Allora dai triangoli sferici rettangoli $M_1 Q_1 Y$, $M_2 Q_2 Y$ ricaviamo:

$$\left.\begin{aligned} \cos \varepsilon'_1 &= \cos \mu_1 \operatorname{sen} \nu_1 \\ \cos \varepsilon'_2 &= \cos \mu_2 \operatorname{sen} \nu_2 \\ \text{essendo evidentemente:} \quad \cos \varepsilon''_1 &= \operatorname{sen} \mu_1 \\ \cos \varepsilon''_2 &= \operatorname{sen} \mu_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Colla sostituzione di questi valori nelle equazioni (110), (111), ove si trascurino i termini d'ordine superiore al terzo, otteniamo per un pendolo in *generale*

$$i_1^2 - i_2^2 = (k^2 - k''^2)(\mu_2^2 - \mu_1^2) \pm \delta k^2 (\nu_2^2 - \nu_1^2) \qquad (113)$$

e per il pendolo di Repsold semplicemente:

$$i_1^2 - i_2^2 = (k^2 - k''^2)(\mu_2^2 - \mu_1^2) . \qquad (114)$$

Si può qui osservare che, mentre negli altri pendoli una differenza di longitudine dei due coltelli può avere una certa influenza sui risultati, all'infuori del caso in cui le longitudini sieno eguali e di segno opposto, nel pendolo di Repsold invece la

[1] Da una lettera del signor prof. C. F. W. Peters di Kiel ho appreso che il pendolo di Lohmeier, da lui adoperato ad Altona, Berlino e Königsberga, è costruito esattamente come era stato proposto da Bessel, quindi anche cogli assi dei due cilindri pieno e cavo perpendicolari al piano del movimento.

[2] Si è detto in più di un luogo che il *pendolo a reversione di Repsold* è costruito secondo le idee ed i precetti di Bessel. Anzi negli Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1870 dell'Istituto geodetico Prussiano pubblicati dal dott. C. Bruhns (Leipzig 1871), a pag. 112 è istituito un parallelo fra le dimensioni del pendolo di Repsold (pendolo prussiano) e quelle calcolate da Bessel nel n. 697 delle Astronomische Nachrichten (vol. XXX pag. 1). Non vedo però in alcun luogo fatto cenno alla particolarità, non senza importanza, che distingue fra loro le due costruzioni. Essa è questa; che il Bessel suppone gli assi dei due cilindri *pieno e cavo* diretti perpendicolarmente al piano di oscillazione, mentre il Repsold dispone gli assi stessi in coincidenza coll'asse longitudinale del pendolo che così riesce un solido di rivoluzione. Da una lettera dei signori Repsold in risposta ad una mia, nella quale io domandava loro qualche schiarimento, tolgo quanto segue: « Già nella costruzione « del nostro primo nuovo pendolo a reversione (per Plantamour, 1863) sono stati disposti gli assi dei « pesi in coincidenza coll'asse longitudinale. Un modello per siffatta costruzione non esisteva, ma essa « ci si presentò naturalmente come la più semplice e la più facilmente eseguibile ...... L'esempio « dato da Bessel nel vol. XXX delle Astronomische Nachrichten non ci diede verun aiuto nella costru- « zione del nostro pendolo ».

differenza di longitudine dei coltelli (prossimamente coincidente colla loro differenza d'azimut) non ha influenza di sorte.

Non essendo mai $k''^2 = k^2$, affinchè possa essere $i_1^2 - i_2^2 = 0$, è necessario soltanto che $\mu_2^2 - \mu_1^2 = 0$ pel pendolo di Repsold e per gli altri pendoli è necessario inoltre che sia $\nu_2^2 - \nu_1^2 = 0$. Queste condizioni sono soddisfatte esattamente quando i tagli dei coltelli sono fra loro paralleli, oppure qualora, non essendo paralleli, sia $\pm \mu_2 = \mp \mu_1$, $\pm \nu_2 = \mp \nu_2$ oppure $\mu_2 = \mu_1$ con $\pm \nu_2 = \mp \nu_1$, e $\pm \mu_2 = \mp \mu_1$ con $\nu_2 = \nu_1$.

Nell'atto della misura della distanza dei coltelli, essendo il taglio del coltello superiore prossimamente orizzontale e la retta B A essendo verticale, è, come già avvertimmo, molto prossimamente $\mu_2 - \mu_1 = e$, $\nu_2 - \nu_1 = d$, e quindi, non considerando ora che il solo pendolo di Repsold, sarà:

$$i_1^2 - i_2^2 = (k^2 - k''^2)(\mu_2 + \mu_1)\, e\,. \tag{115}$$

Sostituendo questo valore e il valore di $s_1 + s_2$ dato dalla (109) nella (101) otteniamo la espressione cercata:

$$l = \frac{1}{2}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2) + \frac{s_1\, s_2}{2(s_1+s_2)}\,\omega^2 - \left(\frac{s_1+s_2}{4} + \frac{s_1\, s_2}{2(s_1+s_2)}\right) e^2 + \frac{k^2 - k''^2}{s_1 - s_2}\,(\mu_2+\mu_1)\, e\,. \tag{116}$$

Si tratta ora di calcolare i coefficienti di ω^2, e^2, $(\mu_2 + \mu_1)\, e$ in numeri pel caso del pendolo italiano. Abbiamo: $s_1 = 0^m,69$; $s_2 = 0^m,31$ e pertanto

$$\frac{s_1\, s_2}{2\,(s_1 + s_2)} = 0^m,10695\ ;\ \frac{s_1 + s_2}{4} + \frac{s_1\, s_2}{2\,(s_1 + s_2)} = 0^m,35695\,.$$

Per semplificare il calcolo di $\dfrac{k^2 - k''^2}{s_1 - s_2}$ e conservargli tuttavia un'approssimazione sufficiente, considereremo il pendolo siccome composto soltanto di tre solidi cilindrici. — 1° Il *tubo cilindrico*, costituente il gambo del pendolo, generato dalla rotazione intorno a Z Z' del rettangolo $a\, b\, c\, d$ (VII, 6). In questo tubo s'indichi con r_0 il raggio interno, con r il raggio esterno, con λ_1 la distanza del centro di gravità C di tutto il sistema dall'estremità più lontana e con λ_2 la distanza dalla base più vicina, per cui $\lambda_1 + \lambda_2$ rappresenterà la intera lunghezza del tubo. — 2° Il *cilindro massiccio* forato lungo l'asse, generato dalla rotazione intorno a Z Z' del rettangolo $e\, m$. Il raggio del foro essendo eguale al raggio esterno r del gambo, s'indichino con ϱ ed h rispettivamente il raggio esterno e l'altezza del cilindro massiccio, e, trovandosi questo alla estremità del gambo che è più vicina al centro di gravità del sistema, indichiamo con D_2 la distanza di C dalla base di esso che è più vicina a questo punto. — 3° Il *cilindro cavo,* di forma esteriore identica a quella del precedente massiccio, generato dalla rotazione intorno a Z Z' dei due rettangoli $q\, n$ e $o\, p$. Si può supporre che il contorno del rettangolo interno disti tutto in giro egualmente dal contorno del rettangolo esterno di una piccola quantità ε. S'indichi in fine con D_1 la distanza di C dalla base di tale cilindro che è a C più vicina.

Il solido essendo omogeneo, nella espressione del suo momento d'inerzia comparirà, come fattore comune a tutti i termini, la massa dell'unità del volume, la quale si eliminerà per divisione colla massa unitaria che, moltiplicata pel volume del corpo, dà la massa totale di questo. Detto I il momento d'inerzia del corpo diviso per la

massa contenuta nell'unità di volume, e detto V il volume del corpo intero, il quadrato k^2 del raggio di girazione sarà dato dal quoziente:

$$k^2 = \frac{I}{V}.$$

Calcoliamo prima V. Detti V_1, V_2, V_3 i volumi dei tre solidi sopra enumerati sarà:

$$V_1 = \pi(r^2 - r_0^2)(\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$V_2 = \pi(\varrho^2 - r^2)h$$
$$V_3 = 2\pi(\varrho + r)(\varrho - r + h)\varepsilon$$

supponendo nell'ultima di queste espressioni che sia ε quantità così piccola che i termini contenenti il suo quadrato e le potenze superiori sieno trascurabili. Sarà poi

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Indicando con I''_1, I''_2, I''_3 ed I'' rispettivamente i momenti d'inerzia divisi per l'unità di massa dei tre solidi componenti il pendolo e del pendolo intero intorno all'asse ZZ', abbiamo:

$$I''_1 = \tfrac{1}{2}\pi(r^4 - r_0^4)(\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$I''_2 = \tfrac{1}{2}\pi(\varrho^4 - r^4)h$$
$$I''_3 = \pi\{(\varrho^4 - r^4) - 2h(\varrho^3 + r^3)\}\varepsilon,$$

e poi

$$I'' = I''_1 + I''_2 + I''_3$$

e

$$k''^2 = \frac{I''}{V}.$$

Se poi indichiamo con I_1, I_2, I_3 ed I rispettivamente i momenti d'inerzia divisi per l'unità di massa dei tre solidi e quello del pendolo intero intorno all'asse CX', abbiamo:

$$I_1 = \pi(r^2 - r_0^2)\left\{\frac{1}{4}(r^2 + r_0^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{3}(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)\right\}$$

$$I_2 = \pi(\varrho^2 - r^2)\left\{\frac{1}{4}(\varrho^2 + r^2) + D_2(D_2 + h) + \frac{h^2}{3}\right\}h$$

$$I_3 = \pi(\varrho + r)\left\{\frac{1}{2}(\varrho^2 + r^2)(\varrho - r + 2h) + h^2\left(\varrho - r + \frac{2}{3}h\right) + 2D_1(D_1 + h)(\varrho - r + h) - \varrho r h\right\}\varepsilon$$

poi

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

e

$$k^2 = \frac{I}{V}.$$

Le varie lunghezze occorrenti per il calcolo di k^2 e k''^2 furono misurate direttamente ad eccezione di ε, che fu dedotta indirettamente per mezzo dei pesi p e P dei cilindri cavo e massiccio, formando con essi la proporzione $p : P = V_3 : V_2$, dalla quale, coi valori di V_3 e V_2 dati di sopra, risulta

$$\varepsilon = \frac{p}{2P}\,\frac{\varrho - r}{\varrho - r + h}\,h.$$

Ecco ora gli elementi numerici adoperati:

$\varrho = 0^m{,}063$, $r = 0^m{,}022$, $r_0 = 0^m{,}020$, $h = 0^m{,}026$, $\lambda_1 = 0^m{,}814$, $\lambda_2 = 0^m{,}434$
$D_1 = 0^m{,}775$, $D_2 = 0^m{,}395$, $p = 348^{gr}{,}5$, $P = 2236^{gr}{,}5$, $\varepsilon = 1^{mm}{,}24$, $s_1 - s_2 = 0^m{,}38$.

Si ottennero i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} & \quad\ (cm)^3 \\ V_1 &= 105,00\,\pi \\ V_2 &= 90,61\,\pi \\ V_3 &= 14,13\,\pi \\ \hline V &= 209,74\,\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \quad\ (cm)^5 \\ I''_1 &= 464,10\,\pi \\ I''_2 &= 2017,43\,\pi \\ I''_3 &= 24.34\,\pi \\ \hline I'' &= 2505,87\,\pi \end{aligned}$$

$$\log\left(k''^2 = \frac{I''}{V}\right) = 1,077278\ (cm)^2 \qquad \frac{k''^2}{s_1 - s_2} = 0^m,00314$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 174139,95\,\pi \\ I_2 &= 151892,26\,\pi \\ I_3 &= 87897,62\,\pi \\ \hline I &= 413929,83\,\pi \end{aligned}$$

$$\log\left(k^2 = \frac{I}{V}\right) = 3,295246\ (cm)^2 \qquad \frac{k^2}{s_1 - s_2} = 0^m,51935$$

e pertanto:
$$\frac{k^2 - k''^2}{s_1 - s_2} = 0^m,51621\,.$$

La espressione di l per il pendolo di Repsold di proprietà della Commissione geodetica italiana è dunque:

$$l = \tfrac{1}{2}(L_1 + L_2) + 0^m,10695\,\omega^2 - 0^m,35695\,e^2 + 0^m,51621\,(\mu_2 + \mu_1)\,e\,. \quad (116)^1$$

Si osservi ora che i termini in ω^2 ed e^2 sono essenzialmente di segno opposto e quindi che, se ciascuno di essi individualmente non arriva all'ammontare di *mezzo micron*, rimarrà sempre inferiore a mezzo micron anche la loro somma algebrica.

Affinchè il termine in ω^2 arrivi al valore di mezzo micron bisogna che sia $\omega = \frac{1}{463}$ del raggio ovvero che, in minuti primi, sia $\omega = 7',4$. Bisognerebbe che sospendendo liberamente il pendolo pel coltello più vicino al centro di gravità (il quale allora si dispone naturalmente nel piano verticale del taglio del coltello di appoggio) il filo a piombo calato dal punto di mezzo del taglio del coltello superiore passasse alla distanza di un *millimetro e mezzo* dal taglio del coltello inferiore. Un errore di tale entità non è certamente compatibile coll'attuale grado di precisione della meccanica scientifica.

Perchè a sua volta il termine in e^2 ammontasse a mezzo micron bisognerebbe che fosse $e = \frac{1}{845}$ del raggio cioè circa $4',1$. Siccome il campo di vista dei microscopî micrometrici del comparatore ha il diametro di *quattro millimetri*, se uno dei fili orizzontali del reticolo avesse un punto comune col taglio del coltello ad una estremità del diametro orizzontale del campo, all'altra estremità del diametro stesso il filo dovrebbe apparire staccato dalla immagine del coltello per quasi *cinque microni*. Tale distacco sarebbe sensibilissimo e, poichè nel caso pratico non ha luogo distacco sensibile, convien dire che e sia considerevolmente minore di $4'$. Per esempio nel *pendolo*

pesante della Commissione austriaca del Grado, l'errore di convergenza dei coltelli non è che 0',1 , mentre nel *pendolo leggero* è 0',3. Per quei due pendoli dunque il termine dipendente da e^2 non arriverebbe ad *un ventesimo* di micron e non altererebbe la 7ª decimale di l espressa in metri.

Supposto per esuberanza che fosse $e = 1'$ ovvero $\frac{1}{3438}$ del raggio, l'ultimo termine della espressione di l giungerebbe a $0^{\mu},5$ qualo a $\mu_2 + \mu_1$ fosse $= \frac{1}{300}$ del raggio ovvero circa 11'. Poichè $\mu_2 - \mu_1 = e = 1'$, bisognerebbe dunque che fosse

$$\mu_2 = 6' \qquad \text{e} \qquad \mu_1 = 5'$$

cioè che le deviazioni dei due coltelli dal piano perpendicolare all'asse longitudinale del pendolo fossero considerevolmente superiori agli errori temibili di costruzione.

La conclusione della precedente discussione è che, nel caso di un pendolo costruito così diligentemente come quelli di Repsold, la media aritmetica delle due misure ottenute per la medesima distanza dei tagli dei coltelli, rappresenta la lunghezza del pendolo semplice la cui durata di oscillazione, ridotta al pendolo cicloidale, eguaglia la comune durata di oscillazione del pendolo a reversione intorno a ciascuno dei suoi coltelli.

L'Oppolzer nella sua dotta relazione più volte citata, ha toccato in termini generali la questione trattata nel presente capitolo nel seguente modo (v. pag. 45-46):

« Le due condizioni, egli dice, 1° che i coltelli devano essere perpendicolari agli assi principali d' inerzia e 2° che il piano passante per i coltelli considerati come paralleli deva contenere il centro di gravità del pendolo, non hanno bisogno di essere soddisfatte che approssimativamente; in fatti, tutti gli errori provenienti da queste imperfezioni non influenzano i risultati che col loro quadrato: basterà dunque che quelle condizioni sieno adempiute una volta per sempre da parte del meccanico col dare una posizione presso a poco esatta alle superficie terminali così del pendolo come dei coltelli. Anche un errore di alcuni minuti in arco non influirà di una maniera sensibile sulla settima decimale del risultato, e si può sempre raggiungere tale esattezza apportandovi le cautele necessarie: così, per esempio, l'errore di convergenza dei coltelli del pendolo pesante costruito da Repsold per la misura del grado austriaco non è che 0',1 , quello del pendolo leggero è 0',3: esso è dunque insignificante assolutamente per il risultato. La deviazione dei coltelli dalla posizione esatta per rispetto all'azimut può esser molto più grande e sarà completamente senza influenza quando si può considerare il pendolo come un solido di rivoluzione rispetto all'asse verticale. I pendoli dei quali si fa uso soddisfano presso a poco a tale condizione, in modo che errori anche di parecchi gradi nell'azimut rimangono senza importanza per l'esattezza del risultato. Una Memoria poco conosciuta del signor J. W. Lubbok (Philosophical Transactions of the royal Society of London 1830, part I, pag. 201) alla quale il relatore si permette di rinviare, si occupa del calcolo dell' influenza di tali errori...... ».

La lettura di queste righe dell'Oppolzer e il desiderio di comprenderne io stesso tutta la portata m' indussero a trattare il problema che forma l'argomento del presente capitolo, dopo di avere preso cognizione del lavoro del Lubbok or ora citato.

PARTE TERZA

Ricerche sperimentali.

§ XXVI. *Campionatura della scala* B (n. 2) *e del termometro a mercurio.*

Eseguito nel gennaio 1886 il confronto della scala A colla scala B, mediante il comparatore del pendolo, avrei desiderato di poter ottenere un confronto diretto di quest'ultima scala col campione dell'Eichungscommission di Berlino e, in conseguenza, anche la relazione fra le scale del nostro apparato e quelle dei pendoli austriaco e prussiano. Ma, dietro l'autorevolissimo parere espressomi dall' illustre signor prof. Foerster in una sua cortesissima lettera del 27 marzo 1886, mi convenne lasciare tale desiderio inappagato. Pertanto mi rivolsi al Presidente della Commissione Italiana, generale Ferrero, affinchè volesse fare le pratiche opportune presso il Bureau International à Breteuil collo scopo di ottenere da quello la campionatura della scala.

Delle pratiche fatte dal Presidente della Commissione geodetica italiana è memoria a stampa nelle pagine 12, 195, 196 e 197 dei « Procès-verbaux des séances de 1886 » del « Comité International des poids et mesures (Paris 1887) », ed in seguito ad esse ricevetti dal Presidente stesso l' invito di spedire la scala a Firenze d'onde sarebbe stata immediatamente inoltrata a Breteuil.

Feci allora un nuovo confronto fra le due scale, e il 24 luglio spedii la scala B per via ferrata a destinazione, entro alla sua cassetta originale di mogano, questa essendo contenuta in una robusta cassa imbottita internamente di stoppa e chiusa a chiave. Nella cassetta medesima della scala fu collocato anche un termometro centigrado, diviso in decimi, del Tecnomasio affinchè esso pure venisse campionato intorno alle temperature alle quali furono eseguite da me le operazioni.

Il 6 luglio 1887, cioè quasi un anno dopo l' invio, ricevetti di ritorno da Firenze la cassa in pieno ordine con entrovi la scala B ed il termometro, e nei giorni successivi dal 13 al 21 eseguii l'ultimo confronto di essa colla scala A, che, fino dall'epoca delle osservazioni di agosto 1885, era sempre rimasta nella medesima posizione verticale.

Insieme colla cassa ricevetti anche il « Certificat » e le tavole numeriche, che qui riferisco.

Bureau International
des
Poids et Mesures

Pavillon de Breteuil *Sévres* (S.-et-O.) 15 Juin 1887

CERTIFICAT

pour une Règle de Pendule à réversion de la longueur d'un mètre,
appartenant à la Commission Géodésique de l'Italie,
reçue le 18 Août 1886 avec demande, par lettre du 7 Août, de M.r le Général

A. Ferrero, Président de la Commission Géodésique d'Italie, d'en faire l'étude; *designée* dans les cahiers du Bureau international par le symbole **i**.

La Règle est accompagnée d'un thermomètre à mercure dont on a de même demandé la vérification par comparaison entre les températures de 9° centigrades et de 23°,6.

Description de la Règle

La Règle est en laiton, de la forme cylindrique des règles de pendule à réversion, systeme Repsold. Les traits se trouvent sur une surface ramenée dans l'axe du cylindre, et coïncidant avec le plan neutre.

Le trait zéro de la Règle est accompagné de traits auxiliaires de chaque côté, à la distance approximative de $0^{mm},1$. À l'autre bout se trouvent ses traits à des intervalles de $0^{mm},1$ depuis $998^{mm},9$ jusqu'à $1001^{mm},1$.

La Règle porte un thermomètre métallique.

Étude de la Règle

L'étude de la Règle a été confiée à M.r Palaz, aide du Bureau sous la direction de M.r Benoît, premier adjoint.

L'étude a été faite au Comparateur universel, construit par Starke et Kammerer, à Vienne et à la température de l'air ambiant.

La Règle de Pendule a été placée sur des supports appropriés, disposés sur un des bancs du Comparateur, entre deux Règles du Bureau portant des divisions bien étudiés et placées, chacune sur deux rouleaux. Ces deux Règles sont la Règle *N* en bronze à section en Π et la Règle Type III en platine irridié à section en X. Les températures ont été mesurées par quatre thermomètres du Bureau parfaitement étudiés, savoir: les Thermomètres Tonnelot N.os 4254, 4255, 4256 et 4257, placés de part et d'autre de la Règle de Pendule.

Les comparaisons ont été effectuées par cinq series d'observations à des époques assez espacées, comprises entre le 24 Août 1886 et le 22 Janvier 1887, à des températures comprises entre 4°3 et 18°5. On a fait une étude complète des intervalles des traits auxiliaires.

Le thermomètre métallique dont la Règle est munie a fait l'objet d'une étude spéciale immédiatement après chacune des cinq series de comparaison.

Résultats

Comme résultat des comparaisons, on à trouvé l'équation de la Règle de Pendule entre les traits 0 et 1000, à la température de t^0 d'après l'echelle des thermomètres à mercure Tonnelot :

$$\mathbf{i} = 999^{mm},960^{\mu},5\,[1 + 0{,}000\,018\,085\,t]\,.$$

L'erreur probable de cette détermination ne dépasse pas $\pm 0^{\mu},3$ entre les limites 4° et 19°.

L'étude des intervalles entre le trait zéro et les traits de la division à l'autre extrémité de la Règle, a fourni, après réduction à la température zéro, le tableau suivant:

		mm μ
Du trait zéro au trait	998.9	998.861.7
id.	999.0	998.961.9
id.	999.1	999.062.0
id.	999.2	999.162.9
id.	999.3	999.261.3
id.	999.4	999.362.7
id.	999.5	999.461.7
id.	999.6	999.560.6
id.	999.7	999.661.5
id.	999.8	999.762.4
id.	999.9	999.861.4
id.	1000.0	999.960.5
id.	1000.1	1000.061.9
id.	1000.2	1000.161.0
id.	1000.3	1000.261.8
id.	1000.4	1000.360.0
id.	1000.5	1000.460.8
id.	1000.6	1000.561.0
id.	1000.7	1000.660.1
id.	1000.8	1000.759.2
id.	1000.9	1000.860.5
id.	1001.0	1000.961.6
id.	1001.1	1001.060.2

Enfin les deux traits auxiliaires qui accompagnent le trait zéro, sont aux distances suivantes de ce trait

mm	μ
— 0.1	
	99.70
0.0	
	100.45.
+ 0.1	

L'étude du thermomètre métallique a donné les résultats suivants par cinq comparaisons avec les thermomètres à mercure Tonnelot

Température des thermomètres à mercure Tonnelot	Position du zéro de la Règle sur l'échelle du thermomètre métallique	Valeur d'un degré du thermomètre à mercure en microns du thermomètre métallique
18°.715	mm μ 1.014.2	
		μ 12.91
13.818	0.951.0	
		11.62
11.038	0.918.7	
		12.99
7.497	0.872.7	
		11.44
4.263	0.835.7	

A chaque degré du thermomètre à mercure correspond donc en moyenne un déplacement de $12^{\mu}.24 \pm 0^{\mu}.5$ de l'échelle du thermomètre métallique et un déplacement de 1^{μ} sur l'échelle du thermomètre métallique correspond à $0^{\circ}.082 \pm 0^{\circ}.003$.

Description du thermomètre à mercure accompagnant la Règle.

Le thermomètre est émaillé et porte l'inscription: « Tecnomasio Milano ». Les divisions sont en dixièmes de degré centigrades depuis $-15^{\circ}.0$ jusqu'à $+55^{\circ}$.

Les dimensions caractéristiques sont:

	mm
Distance du milieu du réservoir au zéro	132.5
Longueur du degré.	6.867
Longueur extérieure du thermomètre . .	553.0 .

Étude du thermomètre.

L'étude de ce thermomètre a été confiée à M.r le D.r Guillaume savant attaché au Bureau international, chargé de la Section de thermométrie. Les corrections ont été déterminées par comparaisons avec le thermomètre en verre dur Tonnelot n. 4330 appartenant au Bureau. Les comparaisons ont été faites en Juin 1887, approximativement de 3° en 3° et en position horizontale. Le point zéro correspondant à chaque température a été déterminé en position verticale et réduit à la position horizontale. Ces comparaisons ont donné les résultats suivants.

Lectures brutes du thermomètre italien	Zéros reduits à la position horizontale	Lectures réduites du thermomètre italien	Lectures réduites du thermomètre Tonnelot	Corrections du thermomètre italien
9°.368	+ 0°.198	9°.170	9°.141	— 0°.029
12.178	+ 0.189	11.989	11.967	— 0.022
15.274	+ 0.181	15.093	15.090	— 0.003
18.188	+ 0.179	18.009	17.990	— 0.019
21.094	+ 0.174	20.920	20.865	— 0.055
24.063	+ 0.164	23.899	23.792	— 0.107

Une table de corrections pour tous les dixièmes de degré entre 9° et 24° en a été déduite par interpolation graphique.

Coefficient de pression. — Le coefficient de pression extérieure a été déterminé par M.r Guillaume le 13 Juin 1887:

$$\beta_e = 0.000\,170\,0 \pm 0.000\,000\,6\,.$$

Tables. — Les tables accompagnant ce certificat donnent:

Table I. — Table de réduction à l'echelle du thermomètre à mercure en verre dur pour tous les degrés entre 9° et 24°.

Table II. — Table des corrections de pression intérieure pour tous les degrés depuis -9° jusqu'à $+55^{\circ}$.

Table III. — Table des corrections de pression extérieure pour tous les millimètres de pression mercurielle depuis 700^{mm} jusqu'à 819^{mm}.

Table IV. — Corrections de réduction au thermomètre à azote pour tous les degrés.

La Règle de Pendule, ainsi que le thermomètre qui l'accompagne, a été envoyée à la Commission Géodésique de l'Italie à Florence le 17 Juin 1887.

Le Directeur du Bureau
D.r O. J. Broch.

TABLE I.

Corrections par rapport aux thermomètres en verre dur.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9	— 0.029	— 0.029	— 0.029	— 0.029	— 0.029	— 0.029	— 0.029	— 0.029	— 0.029	— 0.029	9
10	— 0.029	— 0.029	— 0.028	— 0.028	— 0.028	— 0.028	— 0.028	— 0.027	— 0.027	— 0.027	10
11	— 0.027	— 0.026	— 0.026	— 0.026	— 0.025	— 0.025	— 0.025	— 0.024	— 0.024	— 0.023	11
12	— 0.023	— 0.022	— 0.022	— 0.021	— 0.021	— 0.020	— 0.019	— 0.019	— 0.018	— 0.018	12
13	— 0.017	— 0.016	— 0.016	— 0.015	— 0.014	— 0.013	— 0.013	— 0.012	— 0.011	— 0.010	13
14	— 0.010	— 0.009	— 0.008	— 0.007	— 0.006	— 0.006	— 0.005	— 0.005	— 0.004	— 0.004	14
15	— 0.004	— 0.003	— 0.003	— 0.003	— 0.003	— 0.003	— 0.003	— 0.003	— 0.003	— 0.003	15
16	— 0.004	— 0.004	— 0.004	— 0.004	— 0.005	— 0.005	— 0.006	— 0.006	— 0.007	— 0.008	16
17	— 0.008	— 0.009	— 0.010	— 0.011	— 0.012	— 0.012	— 0.013	— 0.014	— 0.015	— 0.016	17
18	— 0.017	— 0.018	— 0.019	— 0.020	— 0.021	— 0.022	— 0.023	— 0.024	— 0.025	— 0.026	18
19	— 0.027	— 0.028	— 0.029	— 0.030	— 0.032	— 0.033	— 0.034	— 0.035	— 0.036	— 0.038	19
20	— 0.039	— 0.040	— 0.042	— 0.043	— 0.044	— 0.046	— 0.047	— 0.049	— 0.050	— 0.052	20
21	— 0.053	— 0.055	— 0.056	— 0.058	— 0.060	— 0.061	— 0.063	— 0.064	— 0.066	— 0.067	21
22	— 0.069	— 0.071	— 0.072	— 0.074	— 0.076	— 0.077	— 0.079	— 0.081	— 0.083	— 0.085	22
23	— 0.086	— 0.088	— 0.090	— 0.092	— 0.094	— 0.096	— 0.098	— 0.100	— 0.102	— 0.104	23
24	— 0.106	— 0.107	—	—	—	—	—	—	—	—	24
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Thermomètre accompagnant la Règle de Pendule d'Italie.

Coefficient de pression du réservoir $\beta = 0.0001700 \frac{\text{degré}}{\text{mm}}$

Coefficient de compressibilité du mercure $0.0000154 \frac{\text{degré}}{\text{mm}}$

Coefficient de pression intérieure par millim. $\beta = 0^\circ.0001854$

Coefficient du pression intérieure par degré $\beta'_i = 0^\circ.00012731$

TABLE II.

Corrections de pression intérieure.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
— 0	+0.0246	+0.0233	+0.0220	+0.0207	+0.0195	+0.0182	+0.0169	+0.0157	+0.0144	+0.0131	— 0
+ 0	+0.0246	+0.0258	+0.0271	+0.0284	+0.0297	+0.0309	+0.0322	+0.0335	+0.0347	+0.0360	+ 0
10	+0.0373	+0.0386	+0.0398	+0.0411	+0.0424	+0.0437	+0.0449	+0.0462	+0.0475	+0.0488	10
20	+0.0500	+0.0513	+0.0526	+0.0538	+0.0551	+0.0564	+0.0577	+0.0589	+0.0602	+0.0615	20
30	+0.0628	+0.0640	+0.0653	+0.0666	+0.0679	+0.0691	+0.0704	+0.0717	+0.0729	+0.0742	30
40	+0.0755	+0.0768	+0.0780	+0.0793	+0.0806	+0.0819	+0.0831	+0.0844	+0.0857	+0.0869	40
50	+0.0882	+0.0895	+0.0908	+0.0920	+0.0933	+0.0946	—	—	—	—	50
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Table III.

Corrections de pression extérieure.

Mill.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mill.
700	+0.0102	+0.0100	+0.0099	+0.0097	+0.0095	+0.0093	+0.0092	+0.0090	+0.0088	+0.0087	700
710	+0.0085	+0.0083	+0.0082	+0.0080	+0.0078	+0.0076	+0.0075	+0.0073	+0.0071	+0.0070	710
720	+0.0068	+0.0066	+0.0065	+0.0063	+0.0061	+0.0059	+0.0058	+0.0056	+0.0054	+0.0053	720
730	+0.0051	+0.0049	+0.0048	+0.0046	+0.0044	+0.0042	+0.0041	+0.0039	+0.0037	+0.0036	730
740	+0.0034	+0.0032	+0.0031	+0.0029	+0.0027	+0.0025	+0.0024	+0.0022	+0.0020	+0.0019	740
750	+0.0017	+0.0015	+0.0011	+0.0012	+0.0010	+0.0008	+0.0007	+0.0005	+0.0003	+0.0002	750
760	0.0000	—0.0002	—0.0003	—0.0005	—0.0007	—0.0008	—0.0010	—0.0012	—0.0014	—0.0015	760
770	—0.0017	—0.0019	—0.0020	—0.0022	—0.0024	—0.0025	—0.0027	—0.0029	—0.0031	—0.0032	770
780	—0.0034	—0.0036	—0.0037	—0.0039	—0.0041	—0.0042	—0.0044	—0.0046	—0.0048	—0.0049	780
790	—0.0051	—0.0053	—0.0054	—0.0056	—0.0058	—0.0059	—0.0061	—0.0063	—0.0065	—0.0066	790
800	—0.0068	—0.0070	—0.0071	—0.0073	—0.0075	—0.0076	—0.0078	—0.0080	—0.0082	—0.0083	800
810	—0.0085	—0.0087	—0.0088	—0.0090	—0.0092	—0.0093	—0.0095	—0.0097	—0.0099	—0.0100	810
Mill.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mill.

Table IV.

Corrections pour rapporter au thermomètre à azote les températures aux thermomètres étalons à mercure en verre dur, de M. Tonnelot, appartenant au Bureau international des Poids et Mesures.

$$T_{azote} = T_{mercure} + \text{correction.}$$

T_m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T_m
— 20	+ 0°.159	+ 0°.170	+ 0°.181	+ 0°.192	+ 0°.204	+ 0°.216	—	—	—	—	— 20
— 10	+ 0.067	+ 0.075	+ 0.083	+ 0.091	+ 0.100	+ 0.109	+ 9°.119	+ 0°.128	+ 0°.138	+ 0°.148	— 10
— 0	+ 0.000	+ 0.006	+ 0.011	+ 0.018	+ 0.024	+ 0.030	+ 0.037	+ 0.044	+ 0.051	+ 0.059	— 0
+ 0	— 0.000	— 0.005	— 0.011	— 0.016	— 0.021	— 0.025	— 0.030	— 0.034	— 0.038	— 0.042	+ 0
+ 10	— 0.046	— 0.050	— 0.053	— 0.056	— 0.059	— 0.062	— 0.065	— 0.068	— 0.070	— 0.073	+ 10
+ 20	— 0.075	— 0.077	— 0.079	— 0.081	— 0.083	— 0.084	— 0.086	— 0.087	— 0.089	— 0.090	+ 20
+ 30	— 0.091	— 0.092	— 0.093	— 0.094	— 0.094	— 0.095	— 0.095	— 0.096	— 0.096	— 0.096	+ 30
+ 40	— 0.097	— 0.097	— 0.097	— 0.096	— 0.096	— 0.096	— 0.096	— 0.096	— 0.095	— 0.095	+ 40
+ 50	— 0.094	— 0.093	— 0.093	— 0.092	— 0.091	— 0.090	— 0.089	— 0.088	— 0.087	— 0.086	+ 50
+ 60	— 0.085	— 0.084	— 0.083	— 0.082	— 0.080	— 0.079	— 0.077	— 0.076	— 0.074	— 0.073	+ 60
+ 70	— 0.071	— 0.070	— 0.068	— 0.066	— 0.064	— 0.062	— 0.061	— 0.059	— 0.057	— 0.055	+ 70
+ 80	— 0.052	— 0.050	— 0.048	— 0.046	— 0.044	— 0.041	— 0.039	— 0.037	— 0.034	— 0.032	+ 80
+ 90	— 0.029	— 0.026	— 0.024	— 0.021	— 0.018	— 0.015	— 0.012	— 0.009	— 0.006	— 0.003	+ 90
100	0.0	+ 0.003	—	—	—	—	—	—	—	—	100

Le Directeur du Bureau
D.[r] O.-J. Broch.

§ XXVII. a) *Riduzione delle indicazioni del* Termometro del Tecnomasio *a quelle del* Termometro ad azoto.

Il termometro del Tecnomasio, di cui è parola nel *Certificato*, mi pervenne agli ultimi di luglio del 1885 dall'Ufficio Centrale di Meteorologia, che lo aveva acquistato soltanto pochi giorni prima. Non è bene nota l'epoca della sua costruzione, ma credesi risalga al 1878.

Il sig. professore dott. Ciro Chistoni, prima di spedire il termometro, ne determinò le correzioni corrispondentemente ai gradi 0, 12, 25, 32 e le trovò tutte eguali fra loro ed eguali a $-0^{\circ},1$.

Il 21 luglio 1887, cioè *due* anni dopo il suo arrivo, determinai lo zero dello stesso termometro nel modo consueto e trovai la sua correzione eguale circa a $-0^{\circ},12$. Ne deduco che, durante i due anni suddetti, lo *zero* non ha subìto spostamento tale da doverne tenere conto. Perciò mi valgo degli elementi contenuti nel *Certificat* del *Bureau International* ritenendoli valevoli per qualunque epoca compresa nell' intervallo dei due anni medesimi.

Coi numeri della colonna seconda intestata *zéros reduits à la position horizontale*, nella terza tabella del *Certificat*, ho costruito una curva per coordinate ortogonali, e da essa ho dedotto i numeri della

Tabella 1.ª

Gradi del termometro	Zeri ridotti alla posizione orizzontale
8°	0.203°
9	0.199
10	0.196
11	0.192
12	0.189
13	0.187
14	0.184
15	0.181
16	0.180
17	0.179
18	0.179
19	0.178
20	0.177
21	0.174
22	0.172
23	0.169
24	0.165

Prima di proseguire osservo che la influenza delle variazioni della pressione atmosferica (pressione esterna) sulle indicazioni del termometro, facendosi sentire soltanto nella terza cifra decimale, Table III, può nel caso nostro essere completamente trascurata.

Sia ora data una lettura al Termometro del tecnomasio situato in *posizione verticale*. Per ridurla a quella che presumibilmente otterrebbesi se il termometro fosse in posizione orizzontale bisognerà applicarvi la correzione per la pressione interna data dalla Table II.

Ridotta la lettura alla posizione orizzontale vi si applica la correzione di *zero* dedotta dalla Tabella 1ª di questo paragrafo e si ha così la lettura ridotta del termometro del Tecnomasio (corrispondente a quella della colonna III; tav. della pag. 154).

Applicando a questa la correzione data dalla Table I, calcolata sui numeri della colonna quinta nella tavola su citata, si ha la lettura corrispondente del termometro Tonnelot in vetro duro.

Finalmente, applicando la correzione data dalla Table IV, si ha la lettura corrispondente del termometro ad azoto.

Esempio. Lettura al termometro in posizione verticale . . . . 10°,00
Riduzione alla posizione orizzontale (Table II, pressione interna) + 0°,04
Zero ridotto alla posizione orizzontale (Tabella 1ª) . . . . — 0,20
Riduzione al termometro Tonnelot (Table I). . . . . — 0,03
Riduzione al termometro ad azoto (Table IV) . . . . — 0,05
Somma delle correzioni — 0,24

Temperatura corrispondente . . . . 9°,76

Facendo il medesimo calcolo per varî altri gradi interi, costruendo graficamente le correzioni e perequandone i valori ad occhio, ottengo la

Tabella 2.ª

Gradi del termometro del Tecnomasio	Riduzione al termometro ad azoto
8°	— 0°.24
9	0.24
10	0.23
11	0.23
12	0.22
13	0.22
14	0.21
15	0.20
16	0.20
17	0.21
18	0.22
19	0.23
20	0.24
21	0.26
22	0.27
23	0.28
24	— 0.30

b) *Correzioni dei Termometri* Alvergniat *usati nella misura delle temperature.*

Nella misura delle temperature dell'aria ambiente feci uso di tre termometri a mercurio dell'Alvergniat divisi in quinte parti di grado centesimale, portanti rispettivamente i numeri di fabbrica 24488, 35994, 37134, e favoritimi, insieme col termometro a decimi di grado del Tecnomasio, dall'Ufficio Centrale di Meteorologia in Roma.

Distinguendo per brevità il termometro del Tecnomasio col n. 1, indicherò i tre termometri Alvergniat rispettivamente coi numeri 2, 3, 4.

I confronti fra i quattro termometri furono da me eseguiti in due epoche diverse: cioè alcuni nei giorni 7 ed 8 novembre 1885 tenendo immersi i bulbi nell'acqua riscaldata e rimescolata, gli altri (coll'assistenza del dott. Ciscato) nei giorni 21 e 23 luglio 1887 immergendo i termometri nell'acqua previamente raffreddata.

I risultati dei confronti sono dati dalle tabelle 3ª e 4ª, nelle quali ogni numero è il medio di tanti numeri parziali quanto è il numero dei confronti segnati a fianco.

Tabella 3.ª

7-8 novembre 1885.

Indicazione del term. n. 2	Differenza media n. 1 - n. 2	Indicazione del term. n. 3	Differenza media n. 1 - n. 3	Indicazione del term. n. 4	Differenza media n. 1 - n. 4	Comune n. dei confronti
15°.74	— 0°.33	15°.90	— 0°.49	15°.74	— 0°.33	5
18.40	0.32	18.57	0.49	18.43	0.35	3
20.88	0.21	21.00	0.43	20.92	0.35	2
21.02	0.29	21.19	0.46	21.04	0.30	5
21.95	0.27	22.10	0.42	22.00	0.32	3
22.89	0.29	23.03	0.43	22.93	0.33	2
23.85	0.22	24.03	0.40	23.93	0.30	2
24.86	0.26	25.01	0.41	24.89	0.28	7
25.43	0.25	25.58	0.41	25.46	0.28	5
25.89	0.27	26.05	0.43	25.89	0.27	4
26.63	0.25	26.81	0.43	26.62	0.24	5
27.34	— 0.24	27.55	— 0.45	27.33	— 0.23	5

Tabella 4.ª

21-23 luglio 1887.

Indicazione del term. n. 2	Differenza media n. 1 - n. 2	N. dei confronti	Indicazione del term. n. 3	Differenza media n. 1 - n. 3	N. dei confronti	Indicazione del term. n. 4	Differenza media n. 1 - n. 4	N. dei confronti
5°.00	— 0°.28	7	5°.29	— 0°.57	7	5°.17	— 0°.45	7
7.78	0.29	4	9.14	0.53	8	9.06	0.45	8
8.88	0 27	8	9.39	0.53	5	9.36	0.42	8
10.26	0.31	8	9.59	0.52	8	25.93	— 0.30	10
11.84	0.32	8	10.96	0.53	10			
25.91	— 0.28	10	26.13	— 0.50	10			

Estraendo dalle due tabelle i risultati dei confronti eseguiti nelle due epoche molto prossimamente alla medesima temperatura otteniamo la

TABELLA 5.ª

Nome del termometro	Indicazione del termometro in		Differenza col termom. n. 1 in		Probabile spostamento relativo dello *zero*
	novembre 1885	luglio 1887	novembre 1885	luglio 1887	
1	2	3	4	5	6
n. 2	25°.89	25°.91	— 0°.27	— 0°.28	0°.01
n. 3	26.05	26.13	— 0.43	— 0.50	0.07
n. 4	25.89	25.93	— 0.27	— 0.30	0.03

dove i numeri dell'ultima colonna, essendo le differenze fra i numeri delle colonne 4ª e 5ª, esprimono i probabili spostamenti degli *zeri* dei tre termometri rispetto allo zero del termometro di confronto n. 1, nei *venti* mesi trascorsi fra le due epoche.

Diminuendo le differenze medie della Tabella 4ª rispettivamente degli spostamenti relativi di zero registrati nell'ultima colonna della Tabella 5ª si vengono a ridurre i confronti della Tabella 4ª alla stessa epoca (principio di novembre 1885) cui corrispondono i confronti della Tabella 3ª.

Coi dati così ridotti alla medesima epoca, mediante una interpolazione grafica si ottengono i numeri della

TABELLA 6.ª

Gradi del termometro	Novembre 1885. Differenza del termometro n. 1 col termometro		
	n. 2	n. 3	n. 4
8°	— 0°.27	— 0°.47	— 0°.41
9	— 0.28	— 0.46	— 0.40
10	— 0.29	— 0.45	— 0.38
20	— 0.29	— 0.46	— 0.33
21	— 0.27	— 0.45	— 0.33
22	— 0.27	— 0.44	— 0.32
23	— 0.26	— 0.42	— 0.32
24	— 0.26	— 0.41	— 0.30

i quali esprimono le correzioni da attribuirsi rispettivamente alle indicazioni dei termometri n. 2, n. 3 e n. 4 per ottenere quelle che sarebbonsi ottenute probabilmente col termometro n. 1 ai primi di novembre 1885.

Finalmente sommando le correzioni della Tabella 6ª colle rispettive riduzioni del termometro n. 1 al termometro ad azoto, fornite dalla Tabella 2ª, ottengonsi i numeri della Tabella 7ª, i quali valgono pel novembre del 1885.

TABELLA 7.ª

Gradi del termometro	Novembre 1885. Riduzione al termometro ad azoto del termometro		
	n. 2	n. 3	n. 4
8°	— 0°.51	— 0°.71	— 0°.65
9	— 0.52	— 0.70	— 0.64
10	— 0.52	— 0.68	— 0.61
20	— 0.53	— 0.70	— 0.57
21	— 0.53	— 0.71	— 0.59
22	— 0.54	— 0.71	— 0.59
23	— 0.54	— 0.70	— 0.60
24	— 0.56	— 0.71	— 0.60

Per ottenere quelli competenti a un'altra epoca precedente o susseguente basterà applicarvi una piccolissima correzione proporzionale al tempo facendo uso dei numeri contenuti nell'ultima colonna della Tabella 5ª.

§ XXVIII. *Costanti dei termometri metallici congiunti alle due scale* A *e* B.

Per esprimere la relazione esistente fra la indicazione M in *microni* del termometro metallico, la indicazione t del termometro normale a mercurio (riportato al termometro ad azoto) supposto situato a metà altezza fra gli estremi della scala, in grande vicinanza di questa, si assume la equazione lineare

$$M = m + \beta . t$$

dove m rappresenta la indicazione del termometro metallico per $t = 0$, e β rappresenta la variazione di M corrispondentemente alla variazione di una unità in t.

Per determinare queste quantità m e β, supposte costanti, ho fatto concorrere tutte le osservazioni eseguite simultaneamente sui termometri a mercurio e sui termometri metallici.

a) *Termometro metallico della scala* A (N. 1).

Nelle misure di distanza dei coltelli istituite nell'agosto 1885 e nel febbraio 1886, i termometri a mercurio n. 2 e n. 3 erano situati sulla stessa verticale a pochi centimetri al sud della scala A, uno col bulbo presso l'estremità inferiore, l'altro col bulbo presso l'estremità superiore della scala medesima.

Le colonne 10ª e 11ª della Tabella 56ª, 11ª e 12ª della Tabella 57ª contengono i medî di due osservazioni fatte rispettivamente ai termometri a mercurio e al termometro metallico al principio e alla fine di ogni confronto della distanza dei coltelli colla scala A.

La Tabella 8ª nella prima riga orizzontale, colonne 3ª e 8ª, dà il medio dei numeri contenuti rispettivamente nelle colonne 10ª e 11ª della Tabella 56ª e nella seconda riga, colonne medesime, dà i medî delle colonne 11ª e 12ª della Tabella 57ª.

Nei confronti della scala A colla scala B istituiti in gennaio 1886, luglio 1886 e luglio 1887 i termometri a mercurio conservati alla stessa altezza, furono trasportati al nord della scala A quasi a metà intervallo fra le due scale paragonate.

Nelle righe 3ª, 4ª, 5ª della Tabella 8ª, ancora alle colonne 3ª e 8ª, sono registrati rispettivamente i medî delle colonne 4ª e 5ª delle Tabelle 12ª, 13ª, 14ª.

Mediante la Tabella 7ª fu calcolata la riduzione al termometro ad azoto del medio dei due termometri a mercurio, registrata nella colonna 4ª. I numeri della 3ª colonna, corretti per quelli della 4ª, conducono alle temperature della 5ª colonna, che sono quelle state poste a base del calcolo delle quantità m_a e β_a insieme cogli elementi registrati nella colonna 9ª.

Tabella 8ª.

Epoca delle Osservazioni	N.° delle Osserv.	Media dei termometri a mercurio	Riduzione al termometro ad azoto	Term. ad azoto ossevato O	Term. ad azoto calcolato C	O—C	Media lettura al termometro metallico meno 1000μ	Media lettura riportata allo zero del term. metall. Scala A. - Osserv.e	Lettura al term. metallico. Calcolo	O—C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1885 VIII 5-27	40	24°.110	— 0°.635	23°.475	23°.526	— 0°.051	+ 48μ.99	1048μ.99	1048μ.34	+ 0μ.65
1886 II 7-24	64	9.509	— 0.605	8.904	8.838	+ 0.066	— 142.31	857.69	858.54	— 0.85
» I 22-27	88	9.518	— 0.605	8.913	8.962	— 0.049	— 140.70	859.30	858.66	+ 0.64
» VII 20-24	40	21.668	— 0.625	21.043	21.045	— 0.002	+ 16.68	1016.68	1016.66	+ 0.02
1887 » 13-21	32	21.898	— 0.625	21.274	21.255	+ 0.019	+ 19.42	1019.42	1019.66	— 0.24

Il confronto degli elementi delle colonne 5ª e 9ª contenuti nella riga prima coi termini corrispondenti della seconda riga, e il confronto dei dati della terza successivamente con quelli delle righe quarta e quinta, conducono alle tre determinazioni parziali:

m_a	β_a
μ	μ
740,80	13,128
743,66	12,945
743,84	12,954.

La differenza alquanto sensibile fra la prima determinazione e le altre due, probabilmente dipende dalla differente posizione dei termometri a mercurio. Siccome non ho creduto sia prezzo dell'opera l'indugiarmi in ricerche per chiarire questo punto,

suppongo che quella differenza sia dovuta a cause accidentali e faccio il medio, dando alla prima determinazione peso *due* e a ciascuna delle altre peso *uno e mezzo*, giacchè non sono che per metà fra loro indipendenti.

Ottengo così:

$$M_a = 742^{\mu},6 + 13^{\mu},025\, t\,. \qquad (A)$$

Assumendo per t successivamente i valori della colonna 5ª (Tabella 8ª), si hanno da questa equazione i valori della colonna 10ª, e quindi le differenze della colonna 11ª.

Dalla equazione stessa ricavasi

$$t = \frac{M_a - 742^{\mu},6}{13^{\mu},025} = 0^{\circ},07678\,(M_a - 742,6)$$

dalla quale, introducendo successivamente per M_a i valori dati dalla colonna 9ª, si ottengono i numeri registrati nella 6ª e quindi le differenze della 7ª.

La piccolezza delle differenze contenute nelle colonne 7ª e 11ª serve a dare una idea della precisione con cui la equazione sopra ottenuta rappresenta i dati fondamentali.

b) *Termometro metallico della scala* B (N. 2).

Gli elementi che hanno servito per il calcolo delle costanti m_b e β_b di questo termometro sono stati ottenuti in occasione del confronto delle due scale e sono contenuti nella

TABELLA 9.ª

Epoca delle Osservazioni	Posizione dello O della Scala B	N.° delle Osserv.	Media dei termometri a mercurio	Riduzione al termometro ad azoto	Termom. centig. ad azoto Osservato	Termometro centigrado Calcolato	O—C	Media lettura al termometro metallico Scala B.—1000µ	Media lettura riportata allo zero del term. metall. Scala B. - Osserv.e	Lettura al term. metallico Calcolata	O—C
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
			°	°	°	°	°	µ	µ	µ	µ
1886 I 22-27	b	20	9.526	— 0.605	8.921	8.982	— 0.061	— 104.85	895.15	894.44	+ 0.71
	a	20	9.505	— 0.605	8.900	8.842	+ 0.058	— 106.49	893.51	894.19	— 0.68
1886 VII 20-24	b	20	21.634	— 0.625	21.009	20.926	+ 0.083	+ 35.66	1035.66	1036.64	— 0.98
	a	20	21.702	— 0.625	21.077	21.036	+ 0.041	+ 36.96	1036.96	1037.44	— 0.48
1887 VII 13-21	b	16	21.986	— 0.625	21.361	21.398	— 0.037	+ 41.21	1041.21	1040.78	+ 0.43
	a	16	21.810	— 0.625	21.185	21.278	— 0.093	+ 39.81	1039.81	1038.71	+ 1.10

Siccome la scala B fu confrontata colla A in ambedue le sue posizioni, cioè collo zero in *basso* (b) e collo zero in *alto* (a), si è voluto dapprima tenere disgiunti i risultati ottenuti nelle due posizioni, affine di vedere se queste avessero una sensibile influenza.

Come si vedrà più tardi la posizione della scala B *zero in basso* comprende le posizioni indicate I e IV nella colonna 2ª delle Tabelle 12ª, 13ª e 14ª, mentre la posizione *zero in alto* comprende le posizioni II e III. Nella Tabella 9ª, qui sopra riferita, le righe prima, terza e quinta contengono nelle colonne 3ª e 8ª i medî delle

posizioni I e IV dati rispettivamente nelle colonne 4ª e 6ª delle Tabelle 12ª, 13ª, 14ª, mentre le righe 2ª, 4ª, 6ª analogamente contengono i dati ottenuti nelle posizioni II e III.

Confrontando gli elementi offerti dalla prima riga con quelli delle righe 3ª e 5ª, indi quelli della riga seconda con quelli delle righe 4ª e 6ª ottengonsi i risultati seguenti:

	m_b	β_b	
	μ	μ	
Gennaio 1886 e luglio 1886	791,5	11,624	zero in basso
" " " 1887	790,4	11,741	zero in basso
" " " 1886	788,7	11,780	zero in alto.
" " " 1887	787,5	11,909	zero in alto.

Fatte separatamente le differenze dei valori 1° e 3° e dei valori 2° e 4° si ha

	zero in alto meno zero in basso	
I 1886 e VII 1886	+ 2,8	— 0,156
" e VII 1887	+ 2,9	— 0,168
media differenza	+ 2,8	— 0,163.

L'accordo dei due risultati parziali sembra indicare nella differenza un carattere sistematico.

Le equazioni medie pel termometro metallico della scala B, disposta verticalmente nelle due posizioni, sono:

$$M'_b = 790^{\mu},9 + 11^{\mu},683\,t \quad \text{per zero in basso,}$$
$$M''_b = 788,0 + 11,845\,t \quad \text{" " in alto.}$$

E sarà la equazione media

$$M_b = 789^{\mu},5 + 11^{\mu},764\,t, \tag{B}$$

da cui

$$t = \frac{M_b - 789^{\mu},5}{11^{\mu},764} = 0^{\circ},08500\,(M_b - 789,5).$$

Colla prima di queste equazioni e coi dati della 5ª colonna sono stati calcolati i numeri della colonna 10ª, e colla seconda equazione, partendo dai numeri M_b dati dalla 9ª colonna, sono calcolati i numeri della 6ª. Le differenze delle colonne 7ª e 11ª comprendono oltre agli scostamenti accidentali anche quelli d'indole sistematica provenienti dall'aver combinato in una sola le due equazioni valevoli separatamente per le due posizioni e probabilmente da questa circostanza, che fra i confronti delle scale istituiti in luglio 1886 ed in luglio 1887 la scala B fu a Breteuil per la campionatura; onde non è assolutamente impossibile che, a motivo delle continue vibrazioni cui fu esposta nel viaggio di strada ferrata e di vetture ordinarie (malgrado tutte le cure poste nel suo imballaggio), sia avvenuto un qualche piccolo reciproco spostamento delle parti costituenti il termometro metallico e fors'anche una minima variazione dei coefficienti di dilatazione. Il fatto è che la equazione media del termometro è risultata:

$$M_b = 790^{\mu},1 + 11^{\mu},702\,t \quad \text{prima del viaggio,}$$
$$M_b = 789,0 + 11,825\,t \quad \text{dopo il viaggio.}$$
$$\text{Differenza} \quad + \; 1,1 - 0,123\,t.$$

Questa differenza esprime molto probabilmente una reale variazione del termometro metallico; ma nello stesso tempo colla sua piccolezza dimostra che il viaggio Padova-Firenze-Breteuil e ritorno non ha recato al termometro metallico verun sensibile nocumento.

Dai dati sperimentali contenuti nel *Certificat* del *Bureau International*, trascritto nel § XXVI, dopo di avere ridotto le temperature al termometro ad azoto, si ottiene la equazione del termometro metallico della scala B

$$M_b^h = 783^{\mu},6 + 12^{\mu},24\, t \quad \text{in posizione orizzontale}. \qquad (C)$$

Benchè il valore $12^{\mu},24$ del coefficiente β_b qui ottenuto presenti un errore probabile ($\pm\, 0^{\mu},5$) tale da non permettere di ritenere come abbastanza sicura la differenza $+\,0^{\mu},476$ fra esso e il valore $11^{\mu},764$ dedotto dalla posizione verticale, si deve però concludere, fino a prova in contrario, che non sarebbe esatto usare l'equazione dedotta dal termometro metallico in posizione orizzontale per calcolare le temperature corrispondenti a indicazioni del termometro esplorato in posizione verticale e vice-versa. Se p. es., con quest'ultima equazione e coi dati della colonna 9ª Tabella 9ª, si calcolano le temperature t corrispondenti, si trovano numeri, i quali differiscono da quelli della colonna 5ª perfino di oltre *mezzo grado*.

§ XXIX. *Variazioni della temperatura intorno allo strumento.*

Le condizioni della temperatura intorno allo strumento variano, non solo a motivo della presenza dell'operatore e delle lampade, ma anche in causa della variazione naturale diurna della temperatura all'aria libera.

Tanto nelle osservazioni di agosto 1885 quanto in quelle del febbraio 1886 la temperatura esterna, all'aria libera, fu sempre più bassa della interna, per oltre *due gradi e mezzo* nella prima di tali due epoche e per oltre *cinque gradi* nella seconda, e per tale circostanza, sì nell'una che nell'altra epoca e durante le operazioni, doveva avvenire intorno allo strumento una progressiva diminuzione della temperatura anche perchè la temperatura esterna si trovava in continuo decremento. Evidentemente nel febbraio 1886 il raffreddamento dell'ambiente avrebbe dovuto essere nell'unità di tempo maggiore che in agosto 1885.

La presenza dell'operatore e della lampada porta invece un aumento di temperatura tanto più sensibile quanto più bassa è la temperatura ambiente. È facile a comprendere come, fra la diminuzione della temperatura occasionata dal raffreddamento notturno dell'aria libera e l'aumento dovuto alle due cause ora nominate, possa avvenire quasi un totale compenso così che il raffreddamento oppure il riscaldamento definitivo riesca piccolissimo.

Le due seguenti Tabelle 10ª e 11ª, dedotte dalle Tabelle 56ª e 57ª, e precisamente dalle colonne 3ª e 10ª della prima, 3ª e 11ª della seconda, in un modo che non ha bisogno di spiegazione, possono servire a dare una idea della entità e della regolarità con cui ogni sera, fra il principio e la fine delle misure, ha variato la temperatura nell'aria che stava intorno allo strumento.

TABELLA 10ª.

Agosto 1885	Media dei term. nel 1° confronto (non corretta)	Ora media corrispondente	Media termomet. nel 2° confronto (non corretta)	Ora media corrispondente	Variazione media fra i due confronti	Intervallo di tempo corrispondente	Temperatura esterna delle 9 pomerid.
	°	h m	°	h m	+	h m	°
5	23.92	11.30	23.97	13.29	0°.05	1.59	24.5
6	24.14	11.16	24.19	13.17	0.05	2. 1	25.5
19	24.04	11.10	24.17	13.29	0.13	2.19	20.2
20	24.01	11. 6	24.14	13. 4	0.13	1.58	17.9
21	24.08	10.50	24.15	12.50	0.07	2. 0	20.9
23	23.99	10.47	24.08	12.53	0.09	2. 6	20.5
24	24.09	11. 2	24.23	13.13	0.14	2.11	19.6
25	24.12	10.57	24.15	13.16	0.13	2.19	20.8
26	24.07	10.22	24.16	12.45	0.09	2.23	20.0
27	24.12	10.22	24.28	12.44	0.16	2.22	20.7
	24.06	10.56	24.16	13. 6	0.10	2.10	21.1

Temperatura media $= 24^{\circ}.11 - 0^{\circ}.64 = 23^{\circ}.47$ a $12^{h}.1^{m}$.

Aumento medio orario della temperatura $= \frac{0^{\circ}.10}{2.17} = 0^{\circ}.05$.

TABELLA 11ª.

Febbraio 1886	Media dei term. nel 1° confronto (non corretta)	Ora media corrispondente	Media dei term. nel 2° confronto (non corretta)	Ora media corrispondente	Variazione media fra il 1° ed il 2° confronto	Intervallo di tempo fra i due confronti	Media dei term. nel 3° confronto (non corretta)	Ora media del 3° confronto	Media dei term. nel 4° confronto (non corretta)	Ora media del 4° confronto	Variazione media fra il 3° ed il 4° confronto	Intervallo di tempo fra i due confronti	Temperatura esterna delle 9 p.
	°	h m	°	h m	+	h m	°	h m	°	h m	+	h m	°
7	9.38	9.29	9.72	10.59	0°.34	1.30	9.63	11.47	9.75	13.21	0°.12	1.34	3.1
8	9.31	9.11	9.64	10.48	0.33	1.37	9.56	11.44	9.65	13.12	0.09	1.38	3.5
9	9.32	9. 4	9.61	10.41	0.29	1.37	9.56	11.26	9.65	12.58	0.09	1.32	1.6
16	9.22	8.50	9.46	10.27	0.24	1.37	9.37	11.20	9.45	13. 4	0.08	1.44	3.4
17	9.20	9.20	9.49	10.53	0.29	1.33	9.42	11.36	9.58	13. 7	0.16	1.31	5.1
18	9.54	8.50	9.83	10.30	0.29	1.40	9.78	11.21	9.85	12.51	0.07	1.30	6.3
23	9.20	8.34	9.47	10. 8	0.27	1.34	9.39	10.55	9.53	12.28	0.14	1.33	4,6
24	9.19	9.38	9.48	11. 9	0.29	1.31	9.50	11.56	9.55	13.28	0.05	1.32	4.7
	9.30	9. 7	9.59	10.42	0.29	1.35	9.53	11.31	9.63	13. 5	0.10	1.34	4.0

Temp. media $= 9^{\circ}.45 - 0^{\circ}.61 = 8^{\circ}.84$ a $9^{h}.45^{m}$.

Aum.^{to} medio orario della temp. $= \frac{0^{\circ}.29}{1.58} = 0^{\circ}.18$.

Temp. media $= 9^{\circ}.58 - 0^{\circ}.61 = 8^{\circ}.97$ a $12^{h}.18^{m}$.

Aum.^{to} medio orario della temp. $= \frac{0^{\circ}.10}{1.57} = 0^{\circ}.06$.

Temperatura media $= 8^{\circ}.90$.

Le variazioni di temperatura indicate dal termometro metallico, quali risulterebbero dalla colonna 11ª della Tabella 56ª e dalla colonna 12ª della Tabella 57ª, sono:

per agosto 1885, aumento medio orario $= \frac{0^\circ.24}{2.17} = 0^\circ.11$,

per febbraio 1886, aum. med. nella 1ª serie di ogni sera ... $= \frac{0^\circ.18}{1.58} = 0^\circ.11$,

nella 2ª serie " " ... $= \frac{-0^\circ.02}{1.57} = -0^\circ.01$

cioè in agosto alquanto maggiori di quelle indicate dal termometro a mercurio ed in febbraio alquanto minori.

§ XXX. *Dilatazione del comparatore rispetto alla scala* A.

Il comparatore va soggetto a dilatazione, non solo a motivo delle variazioni di temperatura comuni alla scala ed al pendolo, ma anche per le variazioni di temperatura provenienti in esso dalla immediata vicinanza dell'operatore. L'influenza dell'operatore deve necessariamente essere tanto più sensibile quanto maggiore è la differenza fra la temperatura dell'operatore stesso e quella dello strumento e quanto più lungo è il tempo di permanenza dell'operatore in vicinanza dello strumento. Così fatta influenza pertanto doveva esercitarsi molto più sensibile nelle osservazioni di febbraio che in quelle di agosto, poichè in febbraio la permanenza dell'osservatore in vicinanza del comparatore fu ogni sera di doppia durata rispetto alla permanenza di agosto e la differenza fra la temperatura dell'osservatore (supposta la stessa nelle due stagioni) e quella dello strumento era in febbraio 14°.6 maggiore che in agosto.

La influenza dell'osservatore sulla dilatazione del comparatore deve manifestarsi nel modo seguente. La distanza scambievole dei due microscopî essendo eguale alla lunghezza della scala, e il tubo di ottone congiungente i due microscopî avendo composizione molto prossimamente eguale a quella delle scale, la variazione di lunghezza fra il principio e la fine delle osservazioni deve essere tanta nel comparatore quanta nella scala, se comparatore e scala si trovino nelle medesime condizioni di temperatura e pertanto, all'alzamento del microscopio inferiore rispetto allo zero della scala, deve riuscire eguale l'alzamento del microscopio superiore rispetto all'estremo 1ᵐ della scala nel medesimo intervallo di tempo. Se invece il comparatore si riscalda più della scala, il microscopio superiore deve alzarsi più dell'inferiore.

Agosto 1885. — Facendo la media aritmetica delle *prime* quattro letture eseguite ogni sera sulla divisione *zero* della scala e registrate nella colonna 6ª della Tabella 56ª si ha:

lettura media allo zero *della scala al principio delle osservazioni* 319$^{\mu}$,30

e, facendo la media aritmetica delle *altre* quattro letture di ogni sera registrate nella stessa colonna, si ha:

lettura media allo zero *della scala alla fine delle osservazioni* 327,26,

quindi fra il principio e la fine delle osservazioni si ebbe:

alzamento medio del microscopio inferiore rispetto allo zero *della scala* 7,96.

Operando in maniera analoga sui numeri della colonna 7ª abbiamo:

lettura media alla divisione 1ᵐ *della scala al principio delle osservazioni* $250^{\mu},02$,
lettura media alla divisione 1ᵐ *della scala alla fine delle osservazioni* 259, 23,
alzamento medio del microscopio sup. rispetto alla divis. 1ᵐ *della scala* 9, 21.

In conseguenza si vede che la distanza dei due microscopî è aumentata in più di quello di cui siasi allungata la scala per

$$1^{\mu},25$$

e ciò nell'intervallo di oltre *due* ore. Supposto di 17^{μ} la dilatazione assoluta dell'intervallo dei microscopî (che è eguale ad un metro) per l'aumento di 1° centesimale nella temperatura, si vede che, fra il principio e la fine delle osservazioni, il comparatore ebbe un alzamento di temperatura maggiore di quello della scala di

$$\frac{1^{\mu},25}{17^{\mu}}\,1^{\circ} = 0^{\circ},07\,,$$

mentre l'aumento di temperatura della scala $= \frac{3^{\mu},23}{13^{\mu},02}\,1^{\circ} = 0^{\circ},25$ (term. metall.).

Febbraio 1886. — Operando nello stesso modo sui numeri delle colonne 7ª e 10ª della Tabella 57ª, corrispondenti al primo e al quarto confronto del pendolo colla scala eseguiti ogni sera, si ha:

lettura media alla divisione zero *al principio delle osservazioni* $182^{\mu},72$,
lettura media alla divisione zero *alla fine delle osservazioni* 195, 70,
alzamento medio del microscopio inferiore rispetto allo zero *della scala* 12, 98,
lettura media alla divisione 1ᵐ *al principio delle osservazioni* 154, 62,
lettura media alla divisione 1ᵐ *alla fine delle osservazioni* 173, 06,
alzamento medio del microscopio super. rispetto alla div. 1ᵐ *della scala* 18, 44.

E pertanto si ha un eccesso di dilatazione dell'intervallo dei due microscopî, in confronto della lunghezza della scala, per

$$5^{\mu},46$$

e ciò nel medio intervallo di *quattro ore.* Nella stessa ipotesi fatta di sopra vedesi che, fra il principio e la fine delle osservazioni, il comparatore si è riscaldato più della scala per

$$\frac{5^{\mu},46}{17^{\mu}}\,1^{\circ} = 0^{\circ},32\,.$$

mentre l'aumento di temperatura della scala fu $= \frac{4^{\mu},53}{13^{\mu},02}\,1^{\circ} = 0^{\circ},35$ (term. met.).

Benchè l'errore nel confronto del pendolo colla scala, che può provenire dal riscaldamento che il comparatore riceve dalla presenza dell'osservatore nell'intervallo brevissimo che passa fra una puntata al pendolo e una successiva puntata alla scala, deva riuscire trascurabile, tuttavia, per maggiore scrupolo, sono state combinate le osservazioni dei confronti in modo che l'errore rimanga eliminato nella ipotesi di riscaldamento proporzionale al tempo. E questo s'intese ottenere facendo in modo che, in ogni

confronto, la differenza di altezza fra un coltello e la corrispondente estremità della scala risultasse dalla media aritmetica di due confronti, uno fatto passando successivamente dal pendolo alla scala, l'altro retrocedendo dalla scala al pendolo.

§ XXXI. *Equazione della scala* A *dedotta dal confronto colla scala* B *eseguito a Padova e dalla equazione della scala* B *determinata a Breteuil.*

Dall'agosto 1885 a tutto luglio 1887 la scala A (N. 1) fu lasciata sempre nello stesso posto indicato dalle figure della Tav. III collo zero in basso e sostenuta verticalmente sulla sua estremità inferiore mediante il puntale già descritto.

Per poter paragonare la scala A colla scala B mediante il comparatore dello strumento, dopo rimosso il pendolo dal suo luogo, feci fissare con robuste viti sui bordi del vano ellittico *a b c* (III, 3) una appropriata impalcatura ausiliaria di getto d'ottone, alla quale e al bordo inferiore del cilindro A B C D (III, 1) venne assicurato un supporto perfettamente analogo a quello della scala A in modo tale che la scala B, collocata a luogo pel confronto, veniva a trovarsi disposta verticalmente a circa otto centimetri di distanza dall'asse del cilindro suddetto e a una distanza dal comparatore eguale a quella che lo separa dalla scala A.

L'estremità superiore della scala B poteva facilmente venire congiunta ad una estremità del giogo di una specie di bilancia grossolana eretta sul piano del piastrone T (III, 3) ed avente all'altra estremità del giogo un piatto sul quale si può collocare un peso sufficiente. In tal modo si viene ad esercitare sulla scala B una trazione da sotto in su, la quale si può far giungere fino ad ottenere che la scala stessa rimanga sospesa per la sua estremità superiore.

Pertanto poterono essere date successivamente alla scala B le quattro disposizioni seguenti:

I.	Scala sostenuta sulla sua estremità inferiore,	*zero in basso*;
II.	" " " " " " ,	*zero in alto*;
III.	Scala sospesa per la sua estremità superiore,	*zero in alto*;
IV.	" " " " " " " ,	*zero in basso*;

e in ognuna di tali quattro disposizioni fu misurata la sua differenza di lunghezza colla scala A mediante il comparatore.

I risultati delle misure sono registrati nell'ultima colonna delle Tabelle 12ª, 13ª, 14ª.

TABELLA 12.ª

Gennaio 1886	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione dei termometri a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità (immagine rovescia) — Ordine dei confronti diretto: inferiori	diretto: superiori	inverso: superiori	inverso: inferiori	Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	°	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
22	III.	8.24 a	9.27	141.2	105.6	18.3	5.6	5.0	17.9	12.7	12.9	11.7
		8.45 »	9.60	140.1	105.9	16.9	7.3	7.0	18.6	9.6	11.6	
		8.57 »	9.59	140.9	105.7	19.6	7.5	5.7	18.0	12.1	12.3	11.9
		9.16 »	9.70	137.9	105.1	17.6	6.4	6.5	18.5	11.2	12.0	
		9.28 »	9.72	140.1	105.2	18.0	6.8	6.2	19.4	11.2	13.2	11.2
		9.47 »	9.77	139.4	104.7	18.8	8.1	8.3	18.0	10.7	9.7	
26	»	8.33 »	9.08	142.7	107.9	21.5	7.9	7.5	20.6	13.6	13.1	12.6
		8.55 »	9.35	142.4	107.5	20.4	9.3	8.5	21.1	11.1	12.6	
		9.10 »	9.35	143.9	108.2	22.7	9.4	8.7	20.0	13.3	11.3	11.7
		9.31 »	9.47	141.7	106.7	19.8	9.4	10.8	22.7	10.4	11.9	
		9.43 »	9.35	142.5	107.4	21.6	9.1	8.7	19.0	12.5	10.3	11.5
		10. 4 »	9.48	140.4	106.5	20.8	10.5	10.2	22.9	10.3	12.7	
»	»	2.53 p	9.15	142.6	108.9	21.5	10.5	10.3	21.6	11.0	11.3	11.6
		3.13 »	9.40	142.2	106.9	20.2	8.6	10.0	22.5	11.6	12.5	
		3.35 »	9.24	140.5	107.9	20.7	10.3	10.0	19.8	10.4	9.8	10.6
		3.55 »	9.52	142.3	107.7	20.7	10.3	9.6	21.4	10.4	11.8	
		4. 9 »	9.37	142.1	106.6	20.4	9.8	10.2	21.5	10.6	11.3	11.9
		4.33 »	9.56	140.0	107.2	24.0	11.1	11.9	24.7	12.9	12.8	
»	»	8.18 »	9.16	147.0	109.7	22.9	10.4	10.4	21.1	12.5	10.7	12.8
		8.38 »	9.58	142.8	107.5	23.5	9.7	10.5	24.8	13.8	14.3	
		8.48 »	9.50	141.7	108.8	24.5	12.3	11.2	23.0	12.2	11.8	12.4
		9. 7 »	9.69	140.2	106.6	23.2	12.2	12.8	27.4	11.0	14 6	
		9.19 »	9.53	141.1	106.1	23.9	12.1	12.0	23.6	11.8	11.6	11.7
		9.37 »	9.68	138.6	107.4	23.4	11.0	13.1	24.3	12.4	11.2	

Gennaio 1886	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione dei termometri a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità (immagine rovescia) Ordine dei confronti diretto: infe-riori	diretto: supe-riori	inverso: supe-riori	inverso: infe-riori	Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
22	II.	2.15 *p*	9.42	140.7	104.8	61.6	49.5	47.1	61.2	12.1	14.1	12.5
		2.35 »	9.70	139.8	106.1	62.1	51.9	48.6	62.1	10.2	13.5	
		2.47 »	9.58	138.4	106.5	62.1	49.3	49.5	62.3	12.8	12.8	12.5
		3. 7 »	9.70	139.1	104.4	60.3	50.2	47.0	61.2	10.1	14.2	
		3.19 »	9.69	138.0	105.6	60.8	49.3	48.1	61.1	11.5	13.0	12.2
		3.39 »	9.79	136.0	105.0	61.5	50.5	47.6	61.0	11.0	13.4	
»	»	8.32 »	9.52	140.4	104.4	61.2	49.5	48.4	63.9	11.7	15.5	13.1
		8.50 »	9.74	139.9	102.1	60.6	50.2	47.7	62.5	10.4	14.8	
		9. 0 »	9.68	140.1	104.8	61.3	49.0	49.9	63.8	12.3	13.9	13.6
		9.19 »	9.85	139.0	104.6	62.0	49.8	46.3	62.2	12.2	15.9	
		9.31 »	9.70	140.0	106.0	62.5	49.7	49.7	62.7	12.8	13.0	13.5
		9.50 »	9.86	136.5	106.1	64.0	49.4	48.9	62.3	14.6	13.4	
27	»	8.30 *a*	9.11	143.7	108.2	25.5	10.3	12.7	26.5	15.2	13.8	13.8
		8.52 »	9.43	143.3	108.0	26.1	14.3	12.2	26.6	11.8	14.4	
		9. 9 »	9.34	143.0	108.9	26.0	12.3	14.2	26.6	13.7	12.4	12.2
		9.30 »	9.52	141.9	107.0	25.7	14.0	14.4	25.4	11.7	11.0	
		9.39 »	9.39	140.4	107.3	25.8	12.9	14.3	25.8	12.9	11.5	12.9
		9.59 »	9.58	140.7	107.4	24.6	11.7	9.5	23.9	12.9	14.4	
»	»	3.30 *p*	9.17	142.6	108.2	24.7	11.9	13.6	25.6	12.8	12.0	12.6
		3.52 »	9.50	143.7	107.7	25.8	12.2	12.3	24.4	13.6	12.1	
		4. 0 »	9.41	141.8	107.0	24.8	13.1	14.3	25.7	11.7	11.4	12.4
		4.21 »	9.63	141.0	101.1	25.0	12.3	10.5	24.3	12.7	13.8	
»	»	7.55 »	9.19	142.9	108.9	25.3	12.1	12.8	25.1	13.2	12.3	12.2
		8.18 »	9.55	143.1	106.1	26.5	14.4	12.3	23.4	12.1	11.1	

Gennaio 1886	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione dei termometri a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità (immagine rovescia) — Ordine dei confronti diretto: inferiori	diretto: superiori	inverso: superiori	inverso: inferiori	Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
27	II.	8.27 *p*	9.44	140.6	108.1	24.4	11.5	12.3	25.9	12.9	13.6	12.7
		8.48 »	9.67	139.6	107.8	24.6	13.6	11.9	25.2	11.0	13.3	
23	I.	11.49 *a*	9.40	138.2	103.0	— 3.5	— 16.7	— 15.6	— 2.9	13.2	12.7	12.7
		12. 7 »	9.65	138.4	104.0	— 3.9	— 16.2	— 14.7	— 2.0	12.3	12.7	
		12.17 »	9.58	139.0	103.7	— 2.2	— 15.4	— 15.1	— 3.3	13.2	11.8	12.1
		12.35 »	9.70	138.7	104.9	— 3.7	— 13.9	— 14.4	— 1.3	10.2	13.1	
		12.44 »	9.69	139.0	104.3	— 1.6	— 13.3	— 14.2	— 2.4	11.7	11.8	11.8
		13. 3 »	9.80	135.8	105.8	— 2.9	— 14.2	— 14.3	— 2.1	11.3	12.2	
»	»	8.20 *p*	9.32	140.9	105.2	— 2.6	— 15.9	— 16.6	— 2.5	13.3	14.1	13.2
		8.40 »	9.61	141.2	104.1	— 3.4	— 16.1	— 15.1	— 2.2	12.7	12.9	
		8.48 »	9.54	140.9	106.5	— 2.3	— 15.3	— 15.7	— 2.9	13.0	12.8	13.0
		9. 9 »	9.72	138.2	103.4	— 1.7	— 16.6	— 15.0	— 3.6	14.9	11.4	
		9.18 »	9.63	138.3	104.9	— 3.2	— 14.1	— 15.9	— 2.6	10.9	13.3	12.4
		9.38 »	9.80	138.1	104.2	— 3.2	— 15.1	— 15.0	— 1.7	11.9	13.3	
24	»	9.20 »	9.08	144.2	104.4	— 3.9	— 18.5	— 16.5	— 5.3	14.6	11.2	12.7
		9.41 »	9.35	142.9	104.3	— 4.4	— 17.0	— 17.1	— 4.7	12.6	12.4	
		9.57 »	9.32	142.7	106.1	— 4.8	— 18.6	— 17.7	— 5.3	13.8	12.4	12.7
		10.17 »	9.54	142.5	104.9	— 4.9	— 16.5	— 18.2	— 5.0	11.6	13.2	
		10.25 »	9.40	140.6	105.0	— 4.1	— 18.6	— 17.0	— 6.1	14.5	10.9	12.4
		10.45 »	9.61	139.1	105.3	— 4.9	— 16.5	— 17.8	— 5.3	11.6	12.5	
23	IV.	8.20 *a*	9.24	142.9	104.3	39.5	28.7	28.3	41.7	10.8	13.4	11.6
		8.38 »	9.48	141.2	104.5	41.3	30.5	30.5	41.9	10.8	11.4	

Gennaio 1886	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione dei termometri a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità (immagine rovescia) — Ordine dei confronti diretto: inferiori	diretto: superiori	inverso: superiori	inverso: inferiori	Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
23	IV.	8.48 *a*	9.45	141.4	103.9	41.9	30.4	30.9	44.8	11.5	13.9	11.7
		9. 5 »	9.69	139.0	105.2	40.1	31.3	30.5	43.0	8.8	12.5	
		9.20 »	9.64	139.1	105.6	43.1	30.5	30.2	43.1	12.6	12.9	12.5
		9.38 »	9.87	139.4	104.2	44.6	31.8	31.6	43.2	12.8	11.6	
25	»	8.34 »	9.09	143.4	103.4	40.5	27.6	27.5	39.3	12.9	11.8	12.4
		8.56 »	9.35	143.7	105.8	39.6	27.6	27.1	40.1	12.0	13.0	
»	»	0.27 *p*	9.25	140.7	105.0	22.8	10.4	9.8	22.3	12.4	12.5	13.0
		0.45 »	9.61	141.5	105.0	24.2	10.0	11.3	24.1	14.2	12.8	
		0.53 »	9.56	140.9	105.6	6.7	— 2.3	— 5.6	7.5	9.0	13.1	11.6
		1.11 »	9.79	138.2	104.9	6.1	— 3.8	— 5.2	9.0	9.9	14.2	
		1.23 »	9.59	139.5	106.6	9.5	— 5.3	— 3.5	7.5	14.8	11.0	12.8
		1.43 »	9.83	138.5	104.7	9.4	— 2.6	— 2.8	10.6	12.0	13.4	
»	»	8.26 »	9.14	141.4	105.9	6.6	— 3.9	— 5.6	6.2	10.5	11.8	12.7
		8.46 »	9.51	141.6	105.1	8.5	— 5.2	— 8.3	6.6	13.7	14.9	
		8.55 »	9.40	141.7	105.0	8.7	— 5.6	— 3.5	8.1	14.3	11.6	12.6
		9.16 »	9.61	141.0	105.3	6.7	— 5.2	— 4.5	7.9	11.9	12.4	
		9.25 »	9.48	139.9	105.1	6.6	— 4.9	— 4.9	8.3	11.5	13.2	11.6
		9.45 »	9.69	140.0	105.3	6.7	— 3.7	— 3.7	7.7	10.4	11.4	

TABELLA 13.ª

Luglio 1886	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione dei termometri a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità (immagine rovescia) Ordine dei confronti				Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
						diretto		inverso				
						inferiori	superiori	superiori	inferiori			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
20	III.	9.55 *p*	21.27	009.1	025.2	23.9	17.0	12.8	25.1	6.9	12.3	9.9
		10.24 »	21.38	13.0	25.7	22.0	13.2	10.9	22.4	8.8	11.5	
21	»	8.19 *a*	21.34	12.2	36.1	45.2	36.0	34.7	45.7	9.2	11.0	9.6
		8.43 »	21.42	14.8	36.8	44.3	35.4	35.6	44.8	8.9	9.2	
22	»	3.45 *p*	21.59	16.7	36.6	49.4	39.7	38.9	48.1	9.7	9.2	10.3
		4.10 »	21.81	16.6	37.8	49.1	38.4	37.5	49.0	10.7	11.5	
23	»	1.40 »	22.08	21.2	42.5	32.9	20.6	23.4	32.5	12.3	9.1	8.7
		2. 2 »	22.14	22.0	39.9	30.5	24.6	24.8	32.1	5.9	7.3	
»	»	3.29 »	21.92	21.0	40.1	33.6	22.7	22.7	32.0	10.9	9.3	9.5
		3.48 »	22.03	22.1	41.6	31.6	23.5	23.1	32.8	8.1	9.7	
20	II.	10.28 *p*	21.49	12.9	27.2	20.7	10.0	7.5	18.8	10.7	11.3	10.9
		10.54 »	21.44	13.1	26.7	17.6	7.4	8.6	20.0	10.2	11.4	
21	»	7.47 *a*	21.21	11.1	35.6	9.4	— 2.6	— 0.4	8.9	12.0	9.3	11.0
		8.13 »	21.39	11.6	36.4	11.0	— 0.1	— 1.8	9.8	11.1	11.6	
22	»	4.13 *p*	21.85	18.3	36.9	7.5	— 2.6	— 3.0	5.4	10.1	8.4	9.3
		4.27 »	21.84	20.8	36.6	5.3	— 2.6	— 4.4	6.3	7.9	10.7	
24	»	1.10 »	21.88	20.0	40.9	24.5	12.6	12.0	22.7	11.9	10.7	10.3
		1.32 »	22.08	20.9	41.6	22.6	13.5	13.9	23.4	9.1	9.5	
»	»	3.53 »	21.95	23.5	42.7	10.7	— 1.3	— 1.5	7.3	12.0	8.8	9.7
		4.14 »	21.93	24.6	42.2	6.5	— 1.6	— 0.9	8.7	8.1	9.6	
20	I.	8.28 *a*	21.28	10.5	37.5	15.5	3.1	1.6	13.4	12.4	11.8	12.4
		8.54 »	21.31	11.8	47.6	13.8	2.0	1.3	14.9	11.8	13.6	

Luglio 1886.	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione dei termometri a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità				Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
						infe-riori	supe-riori	supe-riori	infe-riori			
						(immagine rovescia)						
						Ordine dei confronti						
						diretto		inverso				
1	2	3.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	°	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
21	I.	10.50 *p*	21.30	11.6	26.3	23.2	11.5	14.4	24.3	11.7	9.9	11.1
		11. 9 »	21.49	10.8	37.2	11.0	0.0	2.0	13.6	11.0	11.6	
22	»	10.23 »	21.61	18.6	41.4	5.8	— 4.6	— 3.4	8.0	10.4	11.4	10.8
		10.43 »	21.85	20.4	43.4	6.4	— 2.8	— 4.9	7.1	9.2	12.0	
23	»	8.18 *a*	21.72	16.0	43.1	11.6	— 0.9	— 0.6	12.2	12.5	12.8	12.1
		8.41 »	21.76	17.6	42.4	11.1	— 0.7	+ 0.7	11.8	11.8	11.1	
»	»	9.51 *p*	21.81	20.7	45.3	21.5	8.9	8.8	19.0	12.6	10.2	11.8
		10.14 »	22.09	21.0	45.9	19.4	8.9	7.4	21.3	10.5	13.9	
20	IV.	7.57 *a*	20.96	9.2	34.9	20.1	9.4	10.3	16.5	10.7	6.2	9.6
		8.21 »	21.26	9.3	37.0	21.2	11.1	10.2	21.5	10.1	11.3	
21	»	11.13 *p*	21.53	13.3	37.5	50.1	39.8	38.4	50.0	10.3	11.6	11.2
		11.32 »	21.60	15.5	36.6	49.7	39.5	38.5	51.2	10.2	12.7	
22	»	10.51 »	21.84	19.6	42.1	43.0	34.4	34.6	43.4	8.6	8.8	9.8
		11.13 »	21.91	20.1	40.5	44.6	33.2	35.1	45.6	11.4	10.5	
23	»	7.48 *a*	21.45	14.3	42.1	43.8	33.6	35.3	43.3	10.2	8.0	9.5
		8.12 »	21.70	15.8	40.7	43.2	33.6	34.9	45.1	9.6	10.2	
»	»	10.23 »	22.05	21.2	46.1	14.5	4.0	4.6	12.5	10.5	7.9	8.5
		10.45 »	22.16	24.2	45.5	12.7	6.2	4.4	13.4	6.5	9.0	

TABELLA 14.ª

Luglio 1887	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione del termometro a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità (immagine rovescia) Ordine dei confronti diretto: inferiori	diretto: superiori	inverso: superiori	inverso: inferiori	Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	°	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
13	I.	10. 7 *p*	21.40	014.0	034.9	18.0	3.8	4.4	18.3	14.2	13.9	13.8
		10.32 »	21.63	013.9	036.7	18.7	4.1	4.6	17.0	14.6	12.4	
17	»	9.40 »	21.57	018.1	035.6	19.4	5.2	6.3	19.4	14.2	13.1	14.1
		10. 3 »	21.88	019.0	035.9	19.1	5.6	4.9	20.6	13.5	15.7	
20	»	4.18 »	22.49	026.2	043.5	12.1	— 2.5	— 1.1	11.0	14.6	12.1	13.3
		4.38 »	22.40	026.8	045.2	10.2	— 1.6	— 1.6	13.3	11.8	14.9	
»	»	10.33 »	22.22	024.6	044.9	14.5	0.7	0.6	14.5	13.8	13.9	13.6
		10.52 »	22.37	025.3	045.3	14 7	0.8	2.5	15.3	13.9	12.8	
13	IV.	3.35 *p*	21.47	014.4	036.6	43.2	30.3	30.1	41.8	12.9	11.7	12.5
		3.58 »	21.57	015.1	035.4	43.3	30.1	28.7	40.9	13.2	12.2	
18	»	3.42 »	21.77	017.6	040 3	41.2	26.2	27.3	38.6	14.6	11.3	12.1
		4. 5 »	22.04	020.3	041.5	40.0	28.0	26.9	37.5	12.0	10.6	
19	»	10.10 »	22.00	021.0	046.0	28.9	15.3	15.1	27.5	13.6	12.4	12.3
		10.33 »	22.20	022.3	045.6	29.3	16.1	16.8	26.9	13.2	10.1	
20	»	3.53 »	22.38	024.0	046.0	39.5	30.0	25.9	39.2	9.5	13.3	11.0
		4.15 »	22.42	026.6	045.9	39.7	29.8	27.7	38.7	9.9	11.0	
12	III.	10. 8 *p*	21.45	012.0	033.6	35.9	21.1	22.4	33.0	14.8	10.6	12.8
		10.47 »	21.61	015.2	034.8	35.0	22.2	22.0	34.8	12.8	12.8	
18	»	7.27 *a*	21.52	014.6	038.1	31.7	20.6	19.1	32.5	11.1	13.4	11.0
		7.50 »	21.70	015.9	037.8	31.9	22.3	20.5	30.2	9.6	9.7	
20	»	7.34 »	21.91	021.8	043.9	33.8	20.3	21.0	31.4	13.8	10.4	11.4
		8. 0 »	22.02	021.7	044.3	32.2	21.4	21.4	31.9	10.8	10.5	

Luglio 1887	Disposizione della scala B	Ora del principio e della fine del confronto	Media indicazione dei termometri a mercurio	Termometro metallico della scala A	Termometro metallico della scala B	Differenza di livello nel senso Scala A — Scala B delle estremità				Scala A meno scala B ordine diretto	Scala A meno scala B ordine inverso	Media differenza delle scale
						infe-riori	supe-riori	supe-riori	infe-riori			
						(immagine rovescia) Ordine dei confronti diretto		inverso				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		h m	°	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ
20	III.	8. 4 a	22.12	022.2	040.7	40.5	29.0	27.8	38.6	11.5	10.8	10.7
		8.28 »	22.14	023.1	043.6	39.2	27.5	28.3	37.2	11.7	8.9	
13	II.	7.13 a	21.14	010.0	035.8	26.7	13.9	14.4	27.4	12.8	13.0	13.5
		7.43 »	21.30	012.9	034.6	28.4	12.7	14.6	27.0	15.7	12.4	
18	»	7.53 »	21.72	015.4	038.6	18.1	5.1	5.3	19.8	13.0	14.5	14.1
		8.17 »	21.77	019.1	039.6	18.9	4.1	5.1	19.1	14.8	14.0	
21	»	7.22 »	22.00	022.6	045.1	13.1	2.1	2.4	15.5	11.0	13.1	12.1
		7.45 »	22.15	022.6	042.8	14.7	1.9	3.3	14.7	12.8	11.4	
»	»	7.48 »	22.20	021.0	041.0	13.9	2.0	2.7	13.6	11.9	10.9	11.2
		8. 9 »	22.20	022.0	042.7	14.3	2.5	3.8	13.8	11.8	10.0	

Facendo i medî di tali risultati, aggruppati secondo la disposizione cui appartengono, e le epoche nelle quali furono ottenuti e indicando con δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 i valori delle differenze delle due scale nelle quattro disposizioni, si ha:

Tabella 15.ª

Epoca del confronto	Temperatura media	Scala A — Scala B				Peso
		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	
Gennaio 1886	8°.91	12.6μ ± 0.1μ	12.8μ ± 0.1μ	11.8μ ± 0.1μ	12.2μ ± 0.1μ	2
Luglio 1886	21.04	11.6 ± 0.2	10.2 ± 0.2	9.6 ± 0.2	9.7 ± 0.3	1
Luglio 1887	21.27	13.7 ± 0.1	12.7 ± 0.4	11.5 ± 0.3	12.0 ± 0.3	1

Conviene ora riflettere che le disposizioni I e II si differenziano fra loro soltanto per una diversa disposizione del termometro metallico, il quale nella prima ha la sua attaccatura internamente al tubo di ottone, presso alla estremità inferiore della scala, mentre nella seconda ha la sua attaccatura presso alla estremità superiore. Differenza analoga si presenta fra le disposizioni terza e quarta. Nella ipotesi che il termometro metallico non sia a contatto internamente col tubo di ottone della scala, ma che sia

congiunto ad esso per una sola estremità, parrebbe che nella prima disposizione l'azione ponderale di esso dovesse essere nulla, mentre nella seconda disposizione dovrebbe essere quella di accorciare la scala, come farebbe un certo peso di cui questa fosse caricata alla sua estremità superiore. Nella medesima ipotesi l'azione del termometro metallico dovrebbe essere nulla nella terza disposizione e dovrebbe tendere ad allungare la scala nella disposizione quarta, come se la scala stessa fosse caricata di un peso alla sua estremità inferiore. Avuto riguardo alle circostanze attuali, in cui le δ sono positive, dovrebbero verificarsi le condizioni:

$$\delta_2 - \delta_1 > 0 \quad ; \quad \delta_3 - \delta_4 > 0 .$$

Or bene: dai dati superiori otteniamo per tali differenze i numeri seguenti

Tabella 16.ª

Epoca	$\delta_2 - \delta_1$	$\delta_3 - \delta_4$	Peso
Gennaio 1886	$+ 0^{\mu}.2 \pm 0^{\mu}.14$	$- 0^{\mu}.4 \pm 0^{\mu}.14$	2
Luglio 1886	$- 1.4 \pm 0.28$	$- 0.1 \pm 0.36$	1
Luglio 1887	$- 1.0 \pm 0.41$	$- 0.5 \pm 0.42$	1
Medio	$- 0.5 \pm 0.22$	$- 0.3 \pm 0.28$	

Di qua si vede, che le due accennate condizioni non sono verificate o se sono verificate ciò accade con troppa incertezza, per cui non è possibile dedurre da quelle differenze, e partendo dalla ipotesi suddetta, qualche nozione positiva per valutare la influenza esercitata dal termometro metallico nell'accorciare o nell'allungare la scala. Probabilmente il contatto interno fra il termometro e il tubo della scala è esteso a varî punti e allora l'azione ponderale del termometro metallico sulla scala deve riuscire molto più complicata di quella supposta. In mancanza di meglio riguarderemo quelle differenze come accidentali e supporremo che i medî $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) = \Delta_1$ e $\frac{1}{2}(\delta_3 + \delta_4) = \Delta_2$ sieno liberi dall'influenza variabile del termometro metallico. Formisi ora coi dati della penultima tabella la seguente

Tabella 17.ª

Epoca	$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \Delta_1$	$\frac{\delta_3 + \delta_4}{2} = \Delta_2$	$\Delta_1 - \Delta_2$	$d = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$	Peso
Gennaio 1886	$12^{\mu}.7 \pm 0^{\mu}.14$	$12^{\mu}.0 \pm 0^{\mu}.14$	$+ 0^{\mu}.7 \pm 0^{\mu}.2$	$12^{\mu}.3 \pm 0^{\mu}.1$	2
Luglio 1886	10.9 ± 0.28	9.6 ± 0.36	$+ 1.3 \pm 0.5$	10.3 ± 0.3	1
Luglio 1887	13.2 ± 0.41	11.8 ± 0.42	$+ 1.4 \pm 0.6$	12.5 ± 0.3	1
Medio	12.4 ± 0.22	11.4 ± 0.28	$+ 1.0 \pm 0.4$	11.9 ± 0.2	

Le differenze $\Delta_1 - \Delta_2$ misurano la somma dell'accorciamento e dell'allungamento corrispondenti alle due disposizioni di *scala appoggiata* e di *scala sospesa*. Considereremo i valori di luglio 1886 e luglio 1887 come di eguale peso e differenti fra loro

per cause accidentali, e perciò che la loro media aritmetica rappresenti il più probabile valore del $\Delta_1 - \Delta_2$ alla temperatura media delle due epoche 21°.15. Avendosi per tale temperatura in medio

$$\Delta_1 - \Delta_2 = + 1^{\mu}, 3 \pm 0^{\mu}, 4,$$

si osservi che questo valore differisce dall'altro

$$\Delta_1 - \Delta_2 = + 0^{\mu},7 \pm 0^{\mu},2$$

di gennaio 1886, corrispondente alla temperatura 8°,91, di quantità (0^{μ},6) eguale alla somma degli errori probabili singoli, e perciò nulla si può asserire di certo intorno alla influenza che sopra $\Delta_1 - \Delta_2$ può avere la temperatura. Riterremo la differenza $+ 0,^{\mu}6$ delle due superiori differenze, come dovuta a cause accidentali, e, poichè ambedue quelle differenze hanno lo stesso peso, prenderemo come valore più plausibile

$$\Delta_1 - \Delta_2 = + 1^{\mu},0 \pm 0^{\mu},4 .$$

Essendo il valore così dedotto per la incognita due volte e mezza il suo errore probabile, convien ritenere ch' esso risponda approssimativamente alla verità, e perciò ammettere che il proprio peso della scala l'accorci di una piccola quantità quando la scala è appoggiata e l'allunghi di altra piccola quantità quando essa è sospesa. Sebbene allorquando la scala è sospesa, si aggiunga, per estenderla, all'azione del proprio peso anche quella del peso del puntale applicato all'estremità inferiore, poichè il peso del puntale è ben poca cosa in confronto del resto, ne supporremo trascurabile la influenza, e supporremo che il peso tendente ad accorciare la scala sia eguale a quello tendente ad allungarla, e che l'allungamento sia eguale all'accorciamento. Si può allora ritenere che il peso proprio della scala l'*accorcia* mentre è appoggiata sulla sua estremità inferiore e l'*allunga* mentre è sospesa alla sua estremità superiore di

$$0^{\mu},5 \pm 0^{\mu},2$$

e che il medio aritmetico delle due lunghezze, ottenute nelle due disposizioni della scala ora dette, rappresenta presumibilmente la lunghezza della scala sottratta all'azione del proprio peso, cioè quella lunghezza ch'essa presumibilmente assumerebbe in posizione orizzontale ove il peso, invece di agire parallelamente all'asse, vi agisce perpendicolarmente. Ricerche per determinare direttamente l'allungamento e l'accorciamento derivanti dal peso della scala, furono già istituite dal Bruhns e i risultati ne sono riferiti a p. 137 della Memoria già citata: egli trova questa quantità, da lui indicata con m, eguale a 0^{μ},3, per cui il nostro risultato può considerarsi con quello concordante entro i limiti degli errori probabili.

Considerando ora separatamente i tre valori di d della Tabella 17ª, è da notare che la differenza esistente fra il secondo (d_2) e il terzo (d_3), ottenuti in condizioni pressochè identiche di temperatura, oltrepassa alquanto i limiti degli errori probabili e non è imputabile a differente dilatabilità delle due scale, per cui dovrebbe ascriversi o ad errori sistematici di osservazione, non potendosi garantire l'assoluta identità di posizione ed illuminazione relative delle scale nelle due epoche, oppure ad una reale variazione di lunghezza della scala B relativamente alla A, proveniente dai prolungati scuotimenti del viaggio, o dal non avere dopo l'arrivo raggiunto ancora il suo stato di equilibrio molecolare ecc. Comunque sieno le cose, e in mancanza di dati sicuri, potremo ritenere che la scala B, per effetto del viaggio, non ha subito una variazione maggiore di due *microni* (forse anche meno) e che la media aritmetica

dei risultati ottenuti in luglio 1886 e luglio 1887 rappresenta il più probabile valore della differenza delle due scale alla temperatura di 21°,15. Tale media è

$$\frac{d_2 + d_3}{2} = 11^{\mu},4 \pm 0^{\mu},2\,.$$

Paragonata questa differenza con quella ottenuta in gennaio 1886 alla temperatura di 8°,91, cioè

$$d_1 = 12^{\mu},3 \pm 0^{\mu},1,$$

si troverebbe che la differenza di lunghezza delle due scale è diminuita di

$$0^{\mu},9 \pm 0^{\mu},23$$

per un aumento di temperatura di 12°,24 e pertanto che il coefficiente di dilatazione della scala B sarebbe maggiore di quello della scala A di

$$\frac{0^{\mu},9}{12,24} = 0,000\ 000\ 074.$$

Tale differenza è troppo piccola e troppo incerta affinchè si possa ritenere come espressione di una diversa dilatabilità delle due scale, e quindi ammetteremo eguale il loro coefficiente di dilatazione.

Ciò posto la differenza più probabile fra le due scale, avuto riguardo ai pesi delle tre determinazioni, sarà

$$\tfrac{1}{2}\left(d_1 + \frac{d_2 + d_3}{2}\right) = +\,11^{\mu},9 \pm 0^{\mu},2 = \text{scala A} - \text{scala B},$$

trovandosi la scala B sottratta all'azione del proprio peso, cioè come se fosse disposta orizzontalmente.

Per coefficiente comune delle due scale assumeremo il valore determinato a Breteuil per la scala B, cioè

$$\delta = 0,000\ 018\ 09.$$

L'equazione della scala A sarebbe dunque:

$$A = 999^{mm}\ 972^{\mu},4\,[1 + 0,000\ 018\ 09\,t], \qquad (D)$$

e, poichè l'error probabile della scala B è $\pm\,0^{\mu},3$ (v. il *Certificat* a pag. 152), l'error probabile di A sarà circa

$$\pm\,0^{\mu},4.$$

§ XXXII.

a) *Ricerche eseguite col pendolo filare ad oggetto di esplorare la stabilità del supporto del pendolo.*

La disposizione speciale da me adottata per ottenere nel supporto la massima solidità che mi fosse possibile, almeno quella solidità che era già stata ottenuta nei loro esperimenti da Kater, Biot, Bessel ed altri, mi dava molta speranza di avere realmente conseguito lo scopo.

Per poter però provare colla esperienza la grande solidità della montatura pensai di ricorrere al mezzo estremamente delicato, cui nel 1877 il signor Colonnello Orff ricorse, dietro consiglio del Lamont, per riconoscere la mobilità della montatura del pendolo a reversione austriaco da lui adoperato: pensai cioè di ricorrere al *pendolo filare.*

Per verificare direttamente il movimento del piano di agata sul quale appoggia il coltello del pendolo, al prisma di ottone A (IX,1), EF (I, 7) nel quale è incassato il parallelepipedo di agata, applicai mediante viti un rubustissimo braccio orizzontale di ferro BC (IX, 1,2) in direzione perpendicolare al piano di oscillazione del pendolo, e alla estremità libera di detto braccio attaccai e feci scendere, entro un tubo cilindrico di latta DE (IX, 1) terminato inferiormente in custodia parellelepipeda a pareti di vetro F, un pendolo filare CG costituito da una sferetta G, di ottone del peso di *dieci* grammi circa, attaccata all'estremità di un sottilissimo filo di seta non tôrta. Sopra un robusto travicello orizzontale (H, fig. 1, sezione meridiana; HH′, fig. 3, proiezione orizzontale) fissato saldamente nella muraglia in direzione est-ovest, stabilii orizzontalmente nel piano verticale del pendolo filare e dell'asse del pendolo a reversione un microscopio micrometrico I (IX, 1, 3), il quale, entrando per un foro praticato nella parete settentrionale della custodia F, poteva venire così aggiustato da lasciar vedere con tutta precisione il filo del pendolo in proiezione sopra un fondo fortemente illuminato da una lampada a gas situata nella direzione LM, i raggi della quale venivano rimandati dallo specchio L nella direzione LI dell'asse del microscopio [1]. Con tale disposizione il supporto del microscopio, essendo fortemente connesso alla muraglia, trovasi sottratto interamente all'azione del pendolo a reversione, mentre il pendolo filare è in condizione da tradire qualunque piccolo movimento orizzontale del piano di sospensione.

Posta davanti al microscopio una scaletta incisa sul cristallo e divisa in decimi di millimetro, si trovò che, per portare il doppio filo del micrometro I dalla immagine di una divisione alla immagine della divisione immediatamente vicina, occorrono *due giri interi* della vite micrometrica, per cui *un giro* della vite misura l'immagine di un oggetto avente il diametro di *un ventesimo di millimetro*, e poichè il tamburo della vite è diviso in sessanta eguali parti, ne viene che *una particella* della vite misura la immagine di un oggetto avente il diametro di $0^{\mu},83$.

Siccome la distanza dell'asse del microscopio I dal punto di sospensione del pendolo filare è di circa *un metro*, l'arco di un secondo a tale distanza è di microni 4,85 e l'arco corrispondente ad *una particella* del micrometro è di $0'',17$, mentre quello corrispondente ad *un giro* è circa $10''$. Il filo di seta del pendolo risulta avere un diametro alquanto minore di $\frac{1}{20}$ di millimetro.

La mia prima ricerca sul pendolo filare fu la seguente. Essendo il pendolo filare presso che immobile (raramente si presenta assolutamente immobile in causa dei movimenti microsismici) misi in moto il pendolo a reversione e tosto osservai che anche il pendolo filare si mise in oscillazione, la cui ampiezza andò successivamente e progressivamente aumentando così che dopo pochi minuti giunse a *sette* od *otto* rivoluzioni, cioè a circa *quattro decimi di millimetro* divenendo in tal modo facilmente visibile ad occhio nudo.

[1] Il microscopio adoperato ha ingrandimento = 45 circa ed appartiene ad un vecchio altazimut di Repsold del 1839 posseduto da quest'Osservatorio. Con osservazioni speciali ho potuto accertarmi che tale microscopio permette di avvertire spostamenti corrispondenti a $^3/_{60} = \frac{1}{20}$ di giro e forse meno.

Colpito da questo fatto volli, prima di procedere innanzi, chiarire se il movimento del punto di sospensione del pendolo filare, posto così in evidenza dal microscopio, era dovuto a un movimento comune a tutta la massa del supporto (il che sembravami *a priori* inverosimile) oppure se era dovuto ad una oscillazione parziale della mensoletta su cui appoggia il pendolo.

Perciò, senza rimuovere dal luogo suo il braccio BC (IX, 1, 2) cui è appeso il pendolo filare, collegai il braccio stesso al cilindro cavo MN di getto d'ottone, che forma la base di tutto il sostegno, nel modo indicato dalla fig. 2, Tav. IX. I due segmenti cilindrici di legno di noce, ivi contrassegnati con *abc*, *def*, grossi verticalmente parecchi centimetri, sono collegati fra loro da est a ovest e premono fortemente contro la parete cilindrica del foro ellittico *be*, mediante il pezzo prismatico robustissimo pure di legno di noce *gh*, e un sistema di vite e madrevite K*lm*. Evidentemente quanto più si avvolge la madrevite *m* intorno alla vite *l*, mentre si tien ferma oppure si gira in senso opposto la testa K, tanto più i due segmenti cilindrici vengono premuti contro il cilindro MN formando con questo un sistema assai rigido. Sul piano superiore del prisma *gh* è incassato, e fissato con viti robuste, un pezzo di ottone fuso *pq* in forma di doccia a fondo piano, le cui sponde si alzano a breve distanza da una parte e dall'altra del braccio BC e sono attraversate ciascuna da due forti viti *nn*, mediante le quali il braccio stesso viene stretto nel mezzo così da riuscire solidale, oltre che colla mensoletta di appoggio del pendolo, anche col pezzo prismatico *gh* e, in conseguenza, col cilindro supporto MN.

Posto allora nuovamente in moto il pendolo a reversione, osservai che il pendolo a filo, anche dopo parecchi minuti, non aveva assunto un movimento sensibile di oscillazione. Venni così nella convinzione che il supporto della mensoletta è quasi assolutamente immobile, mentre *la mensoletta, sotto l'azione del pendolo a reversione, oscilla in piano orizzontale sincronicamente col pendolo* a guisa di lamina elastica infissa per una estremità in modo che la linea di attaccatura sia verticale.

Questo risultato della esperienza pare indichi la opportunità di rendere, ancor più di quello che sia attualmente, robusta la mensoletta di appoggio, impedendo le sue vibrazioni orizzontali intorno alla sezione di attacco coll'assicurare fortemente al supporto anche la estremità di essa che ora rimane libera.

Prima di proseguire nella relazione intorno alle varie esperienze da me istituite col pendolo filare, stimo opportuno riferire sopra l'artifizio, praticamente molto importante, da me usato, sia per portare rapidamente il pendolo filare dallo stato di equilibrio ad uno stato di oscillazione di amplitudine determinata, sia per condurre rapidamente il pendolo stesso allo stato di equilibrio qualora si trovi in istato di oscillazione. Il mezzo semplicissimo da me usato per tale scopo consiste nel produrre, mediante leggere trazioni orizzontali, applicate col mezzo di una funicella al supporto, p. es. in *r* (IX, 2) od in K (III, 3), in direzione parallela al piano di oscillazione, piccoli spostamenti periodici in una direzione costante, i quali, per effetto della elasticità del supporto, vengono volta per volta distrutti nell' istante stesso in cui cessa la trazione.

Per fissare le idee supponiamo che il pendolo filare trovisi nella sua massima elongazione a sinistra. In quell'istante esso incomincierà il suo movimento verso dritta

e supponiamo che, in qnell'istante medesimo e mediante la trazione accennata di sopra, il punto di sospensione venga rapidamente allontanato verso dritta di una quantità estremamente piccola 2ω e sia tenuto in questa posizione fino a che il pendolo abbia raggiunto la sua massima elongazione a dritta. Supponiamo ancora che, nel momento in cui il pendolo incomincia a muoversi verso sinistra, cessi la trazione e allora, per l'elasticità del supposto, il punto di sospensione tornerà a prendere la sua posizione primitiva. Si lasci quindi in tale posizione fino al momento in cui il pendolo è ritornato nella sua massima elongazione a sinistra e allora, mentre il pendolo riprende il suo moto verso dritta, mediante una nuova trazione verso dritta, si riporti il punto di sospensione alla distanza 2ω dalla sua posizione normale e lo si tenga come prima in tale posizione fino a che il pendolo abbia raggiunto la massima elongazione a dritta e così via.

È facile riconoscere che, in tale maniera, ad ogni oscillazione del pendolo la sua amplitudine deve accrescersi di 2ω. Con siffatto procedimento è dunque facile comunicare all'amplitudine del pendolo successivi incrementi fino a farle raggiungere un valore prefisso, e ciò anche a partire dall'amplitudine *zero*.

Se invece le trazioni *verso dritta* durano ogni volta per tutto il tempo nel quale il pendolo si muove da diritta verso sinistra e cessano durante il movimento da sinistra verso dritta, è facile riconoscere che, così andando le cose, l'amplitudine del pendolo diminuisce ad ogni oscillazione di 2ω e può, in conseguenza, essere condotta rapidamente al valore zero.

Regolare il ritmo delle trazioni, mentre si ha l'occhio al microscopio, è cosa agevolissima e l'effetto ne è sicuro. È inutile però di ricercare una grande esattezza nel meccanismo dell'operazione giacchè, poco prima o poco dopo, l'effetto si raggiunge egualmente.

Dell'artifizio or ora esposto io mi sono servito per dare al pendolo filare un'amplitudine lineare iniziale di due a tre decimi di millimetro (circa cinque rivoluzioni del micrometro) nelle *esperienze fatte per riconoscere la legge di variazione dell'amplitudine* α_f *del pendolo filare dipendentemente soltanto dalle resistenze passive.* Tali esperienze furono così condotte. Data al pendolo filare una certa amplitudine iniziale, nel modo su esposto, io osservava, a intervalli di tempo piuttosto brevi, il valore e il tempo dell'amplitudine, notando, mediante il tasto elettrico sulla striscia cronografica, l'istante nel quale, muovendo opportunamente i fili del micrometro, si otteneva che uno di questi (e sempre lo stesso) venisse a contatto colla immagine del filo del pendolo mentre questo raggiungeva una sua massima elongazione. Veniva quindi letta e notata la indicazione del micrometro.

Nella tabella 18ª riferisco tre serie di osservazioni eseguite, allo scopo innanzi detto, nelle sere del 29 settembre, del 27 e del 28 ottobre 1885. Suppongo che, trattandosi di amplitudini microscopiche, la legge di loro diminuzione, fatta astrazione dalla influenza dei moti microsismici, sia abbastanza bene espressa dalla equazione:

$$\alpha_f = e^{-\mu_f(k_f+\tau)} .$$

Se ciò è, con due amplitudini α'_f ed α''_f e i tempi corrispondenti τ' e τ'' si ha quanto basta per determinare ambedue le costanti μ_f, k_f. Infatti dalle due equazioni

Tabella 18.ª
Diminuzione dell'amplitudine in causa delle resistenze.

1885. Settembre 29	
s	g p
0.0	3.33.6
92.1	3.11.6
162.8	2.57.7
229.1	2.34.4
257.7	2.22.0
299.5	1.58.0
390.1	1.46.3
432.4	1.45.4
476.8	1.35.3
514.7	1.35.0
619.3	1.32.1
671.6	1.25.8
727.8	1.19.0
766.0	1.10.0
826.6	1. 1.0
876.9	0.51.8
913.1	0.53.0
983.1	0.42.2
1005.5	0.35.8
1033.5	0.31.2
1065.3	0.27.9
1118.4	0.31.9

Ottobre 27. 10h-11h pom.	
s	g p
0.0	6.28.6
36.0	6.17.7
72.2	6. 3.9
94.4	5.52.8
128.6	5.44.9
161.0	5.32.0
199.0	5.13.8
239.3	4.59.7
271.5	4.53.3
305.8	4.46.5
348.0	4.33.7
388.3	4.16.6

Ottobre 27 (continuaz.)	
s	g p
432.6	4. 6.1
471.0	4. 1.9
513.1	3.51.0
545.7	3.43.3
593.4	3.31.1
621.9	3.26.9
658.3	3.21.6
698.2	3.13.7
732.7	3. 7.0
772.8	2.54.0
841.4	2.42.1
893.9	2.35.4
942.0	2.29.7
990.4	2.22.4
1066.9	2.18.8
1121.2	2.13.2
1207.9	2. 7.9
1278.3	2. 2.3
1357.0	2. 3.0
1389.0	2. 1.2
1427.5	1.59.2
1451.5	1.51.7
1525.1	1.46.9
1572.5	1.44.8
1636.5	1.44.1
1725.4	1.46.7
1783.5	1.40.1
1826.0	1.37.0
1896.4	1.32.0
1964.9	1.26.0
2027.3	1.23.3
2107.7	1.14.0
2192.0	1.12.9
2264.5	1.15.8
2309.0	1.16.0
2365.6	1.16.0
posiz. di equil.	0.55.8

Ottobre 28. 9h ant.	
s	g p
0.0	6.14.0
34.3	5.59.3
54.9	5.54.3
100.0	5.46.4
137.0	5.30.0
177.5	5.17.4
207.5	4.58.6
245.9	4.44.0
276.2	4.34.1
318.4	4.12.2
342.6	4. 4.2
376.7	3.59.0
401.0	3.51.8
437.1	3.43.2
471.4	3.33.8
505.5	3.29.1
533.9	3.23.7
564.0	3.17.2
614.9	3. 6.3
653 0	2.56.2
683.0	2.48.8
707.0	2.41.0
735.3	2.32.2
787.6	2.52.2
835.7	2.22.3
884.3	2.11.5
918.7	2. 8.1
958.9	2. 4.9
994.8	1.58.9
1029.1	1.53.1
1064.5	1.47.1
1087.5	1.41.7
1115.7	1.39.9
1144.0	1.37.6
1184.1	1.36.0
1222.5	1.33.4
1275.0	1.34.0
1329.1	1.36.0
posiz. di equil.	0.57.3

eliminando prima k_f si ha

$$\mu_f = -\frac{\log \text{hyp} \frac{\alpha'_f}{\alpha''_f}}{t' - t''},$$

e poi per doppia via:

$$k_f = \frac{\log \text{hyp}\, \alpha'_f}{\mu_f} - \tau' = \frac{\log \text{hyp}\, \alpha''_f}{\mu_f} - \tau''.$$

Quello che può interessare nelle presenti ricerche è la determinazione della costante μ_f. Invece però di determinare prima un valore approssimativo di questa incognita con due osservazioni qualunque e poi far concorrere alla sua più esatta determinazione tutte le osservazioni disponibili di una stessa sera, ho preferito di seguire quest'altro modo più spiccio, sebbene possa credersi meno esatto e un po' arbitrario. Ho cioè costruito graficamente una curva esponenziale facendola passare, nel modo da me stimato migliore, framezzo i punti forniti dalle singole osservazioni di una medesima sera, e poi ho determinato il parametro μ_f della stessa considerando due speciali ordinate e i tempi corrispondenti indicati sull'asse delle ascisse.

Nella fig. 4 della Tav. IX sono rappresentati i dati numerici contenuti nella tabella poco sopra riferita. Le ascisse sono prese sulla OA proporzionali ai numeri di secondi di tempo registrati nella prima colonna, le ordinate sono prese a partire dalla OA medesima proporzionali ai numeri di giri (g) e sessantesimi di giro (p) della seconda colonna. Le amplitudini *zero* corrispondono nelle tre sere a tre diverse letture micrometriche. La 1ª sera corrispondono alla lettura $0^g. 0^p$ e all'asse delle ascisse OA; la seconda sera corrispondono alla lettura $0^g. 55^p{,}8$ e alla retta BC; la terza sera alla lettura $0^g. 57^p{,}3$ e alla retta DE. Perciò volendo dalla figura dedurre l'amplitudine corrispondente ad un punto qualunque bisogna contare la sua ordinata dalla fondamentale della sera rispettiva.

Dalle curve tracciate ad occhio framezzo alle tre serie di punti della fig. 4, ho dedotto gli elementi seguenti:

1885 settembre 29	$\alpha'_f = 154^p{,}0$	$\tau' = 220^s$	$\alpha''_f = 52^p{,}0$	$\tau'' = 880^s$	$\mu_f = 0{,}99$
" ottobre 27	" 334, 2	" 0	" 94, 2	" 940	" 0,81
" " 28	" 319, 7	" 0	" 102, 7	" 710	" 0,96

e facendo la media aritmetica dei valori di μ_f contenuti nell'ultima colonna, e calcolati colla equazione data di sopra, si ottiene

$$\mu_f = 0{,}92$$

prendendo per unità di tempo l'intervallo di $10^m = 600^s$.

In proporzione, le resistenze passive diminuiscono molto più le amplitudini del pendolo filare, che quelle del pendolo a reversione, giacchè, come si vedrà a suo luogo, per quest'ultimo si ha $\mu = 0{,}24$ quando il cilindro pieno è in alto, e $\mu = 0{,}11$ allorchè il cilindro pieno è in basso.

Compiuta la ricerca per la determinazione di μ_f si istituirono alcune esperienze per determinare il valore del rapporto $\chi ms = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ oppure dell'altro $\chi m = \frac{\varepsilon}{s\alpha}$, dando all'amplitudine α del pendolo di Repsold varî valori ed alternando le due posizioni del cilindro pieno. Perciò, mentre il pendolo filare trovavasi in equilibrio e il pendolo a reversione trovavasi a posto, p. es. col cilindro pieno in basso, si dava a quest'ultimo pendolo l'amplitudine iniziale voluta notando al cronografo, e prendendo poi come origine del tempo, l'istante nel quale detto pendolo, abbandonato a sè stesso, ritornava verso la verticale incominciando così la serie delle sue oscillazioni.

Nel medesimo istante anche il pendolo filare si metteva in oscillazione e, mediante il micrometro, si misuravano le amplitudini ch'esso andava successivamente assumendo nei primi due o tre minuti durante i quali essa può considerarsi come crescente proporzionalmente al tempo. I risultati di alcune esperienze eseguite allo scopo sono raccolti nelle tre tabelle seguenti 19^a, 20^a, 21^a. Nella prima e nell'ultima di queste si può notare che le posizioni di equilibrio del pendolo filare non sono date dalla lettura 0^g. 0^p del micrometro, come nella seconda tabella, ma dalla lettura che si vede registrata di fianco al tempo 0^s, 0. Del resto sembra che le tabelle non abbiano bisogno di altra spiegazione.

Tabella 19.^{a}

Cilindro pieno in basso. 1885 Ottobre 28. 9 ore ant.

Tempo	Micrometro del pendolo filare	Amplitud. del pendolo revers.	Tempo	Micrometro del pendolo filare	Amplitud. del pendolo revers.
s	g p	° ′	s	g p	° ′
0.0	0.58.9	2.20	0.0	0.59.0	1.25
67.9	1.24.0		39.3	1.15.0	
89.8	1.35.4		53.5	1.20.0	1.22
104.1	1.39.2	2.10	69.6	1.25.0	
166.6	2. 9.7		117.7	1.35.0	
184.7	2.13.8		134.2	1.40.0	1.21
196.4	2.16.5	2. 5	156.3	1.45.0	
			196.9	1.55.0	
0.0	0.59.1	2. 4	250.7	2. 0.0	1.17
26.0	1.15.0		303.0	2. 5.0	
46.3	1.20.0	2. 0			
61.7	1.25.0		0.0	0.58.0	1. 2
92.6	1.35.0		51.7	1.15.0	
102.6	1.40.0	1.57	100.0	1.20.0	0.58
110.6	1.45.0		128.3	1.25.0	
142.9	1.55.0		174.5	1.35.0	
154.9	2. 0.0	1.53	232.8	1.40.0	0.55
173.1	2. 5.0		283.2	1.45.0	
0.0	0.58.8	1.45	0.0	(1) 0.55.7	0.42
48.7	1.15.0		66.0	1.10.0	
72.9	1.20.0	1.40	80.0	13.0	
89.0	1.25.0		86.0	16.0	
131.1	1.35.0		98.0	19.0	
145.3	1.40.0	1.37	116.4	22.0	0.39
161.7	1.45.0		132.4	25.0	
191.4	1.55.0		144.3	28.0	
223.7	2. 0.0	1.33	170.7	31.0	
251.9	2. 5.5		192.8	34.0	

(1) Durante questo esperimento si notarono costantemente oscillazioni verticali microsismiche manifestate dall'insolito movimento verticale di sali e scendi delle ineguaglianze nella struttura del filo.

Tabella 20.ª

Cilindro pieno in basso. 1885 Ottobre 30 da $10^h.30^m$ a $11^h.30^m$ pom.

α da 2°.0′ ad 1°.55′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
g p	s
0. 0.0	0.0
40.0	91.0
45.0	108.4
50.0	118.3

α da 1°.40′ ad 1°.37′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
20.0	51.4
25.0	67.7
30 0	87.6

α da 1°.22′ ad 1°.17′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
15.0	48.4
18.0	60.7
21.0	72.5
24.0	82.5
27.0	94.9
30.0	106.7
33.0	114.9
36.0	126.9
39.0	139.0

α da 1°.0′ a 0°.58′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
10.0	40.7
13.0	51.0
16.0	65.2
19.0	81.3
22.0	95.3
25.0	113.5
28.0	129.5
31.0	147.8
34.0	163.7
37.0	181.8
40.0	193.5

α = da 0°.40′ a 0°.37′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
g p	s
0. 0.0	0.0
10.0	59.0
13.0	80.8
16.0	109.2
19.0	131.5
22.0	147.5
25.0	165.6
28.0	187.9
31.0	208.0
34.0	240.2
37.0	264.5
40.0	308.6

α da 0°.20′ a 0°.20′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
5.0	63.1
7.0	83.2
9.0	99.2
11.0	115.4
13.0	145.2
15.0	169.4
17.0	191.8
19.0	231.9
21.0	296.4

α da 2°.18′ a 2°.12′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
20.0	35.6
25.0	53.8
30.0	66.0
35.0	78.0
40.0	88.0
45.0	100 1
50.0	110.2

α da 1°.57′ a 1°.51′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
13.0	30.6
18.0	40.9
23.0	48.9
28.0	56.9
33.0	71.2
38.0	85.2
43.0	147.3

α. da 1°.42′ a 1°.38′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
g p	s
0. 0.0	0.0
10.0	27.7
15.0	41.2
20.0	51.3
25.0	65.4
30.0	83.4
35.0	95.7
40.0	105.5

α da 1°.20′ a 1°.16′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
10.0	29.1
15.0	47.0
20.0	61.0
25.0	79.4
30.0	97.5
35.0	117.4
40.0	142.0

α da 0°.58′ a 0°.56′

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente
0. 0.0	0.0
10.0	52.5
15.0	64.6
20.0	76.1
25.0	89.0
30.0	102.7
35.0	125.0
40.0	147.0
45.0	159.2
50.0	181.3
55.0	197.5
60.0	215.7

TABELLA 21.ª

Cilindro pieno in alto. 1885 Ottobre 31.

Micrometro del pendolo filare	Tempo corrispondente	Amplitudine del pendolo revers.
ore 9 ant.		
g p	s	° ′
0.25.7	0.0	2.15
45.0	72.4	6
50.0	100.5	3
55.0	118.6	2
1. 0.0	141.0	1.58
5.0	175.4	57
10.0	205.5	54
0.26.5	0.0	1. 7
30.0	39.0	4
33.0	71.2	2
36.0	103.3	2
39.0	127.4	1
42.0	159.8	0.59
45.0	192.0	58
48.0	238.3	57
51.0	266.4	56
54.0	296.6	55
57.0	332.6	54
1. 0.0	369.3	53
ore 3 ½ pom.		
0.24.7	0.0	2.13
35 0	39.0	
40.0	59.0	8
45.0	83.0	
50.0	101.3	2
55.0	129.5	
1. 0.0	153.6	1.57
0.27.1	0.0	1.40
40.0	55.0	
45.0	85.3	32
50.0	127.5	
55.0	159 5	28
1. 0.0	199.9	26
segue ore 3 ½ pom.		
g p	s	° ′
0.27.7	0.0	1. 2
32.0	48.3	0
35.0	78.3	
38.0	96.5	
41.0	121.0	0.56
44.0	155.0	
47.0	181.3	
50.0	217.5	
0.27.6	0.0	2. 3
35.0	37.7	
40.0	56.0	
45.0	72.2	
50.0	100.3	1.53
0.26.6	0.0	1. 3
32.0	39.7	
35.0	56.0	
38.0	70.1	
41.0	98.1	
44.0	132.3	0.59
10h.15m pom.		
0.24.5	0.0	2.16
33.3	40.8	2.11
41.0	75.0	2. 7
46.8	105.4	2. 2
56.0	147.7	2. 0
1. 2.0	194.0	1.57
0.26.2	0.0	2.10
36.8	42.8	2. 8
45.0	79.0	2. 2
51.2	113.3	1.59
58.3	151.6	1.54
0.26.3	0.0	2.18
36.3	34.8	2.12
44.0	65.0	2.10
50.0	95.0	2. 7
57.7	123.4	2. 2
1. 6.6	169.7	1.59

Nella discussione dei dati contenuti in queste tabelle ho fatto uso di costruzioni grafiche in iscala piuttosto ampia, e dalle figure ho poi desunto gli elementi delle colonne seconda e terza di ciascuna delle tabelline 22ª e 23ª

TABELLA 22.ª

Cilindro pieno in basso. 28 Ottobre 1885.

Medio α	α_f	τ_f	α'_f	$\frac{\pi}{2l}\chi m s_1$
° ′	p	s	′	
2.12	70.9	180	0.20	0.000 0064
1.21	73.5	300	0.21	0.000 0084
1.58	75.0	210	0.21	0.000 0085
1.39	69.0	250	0.19	0.000 0078
0.58	46.0	290	0.13	0.000 0076
0.41	52.5	270	0.14	0.000 0131
			Medio	0.000 0086
30 Ottobre 1885.				
1.58	80.6	190	0.22	0.000 010
1.39	85.4	230	0.23	0.000 010
1.20	77.0	290	0.21	0.000 009
0.59	63.2	300	0.18	0.000 010
0.39	39.4	260	0.11	0.000 011
0.20	24.8	280	0.07	0.000 013
2.15	78.0	170	0.22	0.000 010
1.54	70.2	150	0.20	0.000 012
1.40	79.5	210	0.22	0.000 010
1.18	82.0	270	0.23	0.000 011
0.57	64.8	250	0.18	0.000 013
			Medio	0.000 0108

TABELLA 23.ª

Cilindro pieno in alto. 31 Ottobre 1885.

Medio α	α_f	τ_f	α'_f	$\frac{\pi}{2l}\chi m s_2$
° ′	p	s	′	
2. 7	31.6	130	0.088	0.000 0053
1. 2	23.7	250	0.065	0.000 0042
2. 7	36.2	150	0.100	0.000 0053
1.32	28.8	180	0.080	0.000 0048
0.58	21.2	210	0.058	0.000 0048
1.58	37.0	160	0.105	0.000 0055
[illegible]. 1	29.0	200	0.081	0.000 0066
2 7	36.4	170	0.101	0.000 0047
2. 2	32.6	140	0.090	0.000 0053
2.10	31.2	120	0.087	0.000 0056
			Medio	0.000 0052

Siccome ogni rivoluzione del micrometro sottende, come è stato già notato, al punto di sospensione l'angolo di 10″, le amplitudini della seconda colonna tradotte in minuti primi si mutano in quelle registrate nella quarta colonna. La quinta colonna contiene poi i valori del rapporto $\frac{\alpha_f}{\alpha\tau_f}$, il quale, poichè all'origine del tempo e per un certo tratto, la curva rappresentante l'andamento delle α_f si confonde colla sua tangente, equivale all'altro:

$$\frac{d\alpha_f}{d\tau}\frac{1}{\alpha}=\frac{\pi}{2l}\chi ms\,.$$

Essendo il pendolo a reversione fra i tagli dei coltelli lungo un metro, cioè essendo $l=1$ ed essendo $s_1=0{,}69$, $s_2=0{,}31$, i medî dell'ultima colonna in ciascuna delle due prime tabelle moltiplicati pel fattore $\frac{2}{0{,}69\pi}$, e il medio dell'ultima colonna della terza tabella moltiplicato pel fattore $\frac{2}{0{,}31\pi}$, danno rispettivamente per χm i valori

0,000 0079

0,000 0100

0,000 0106

con accordo soddisfacente. Attribuendo al primo di questi valori metà peso di quelli degli altri due, e facendo il medio combinato, abbiamo, trascurando la settima decimale,

$$\chi m=0{,}000\ 010.$$

Pertanto la correzione che si dovrebbe applicare alla distanza misurata l dei coltelli, per avere quella a supporto immobile, corrispondente agli osservati tempi di oscillazione, nella ipotesi che il punto o (IX, 2) di mezzo del coltello oscilli come il punto C, che si trova all'estremità del braccio BC ed è il punto di sospensione del pendolo filare, sarebbe *per cilindro pieno in basso*

$$\chi ms_1=0{,}69\,\chi m=7^{\mu}$$

e *per cilindro pieno in alto*

$$\chi ms_2=0{,}31\,\chi m=3^{\mu}$$

nel caso dell'apparato di Repsold della Commissione Italiana.

Però, in seguito alle esperienze esposte, il punto C di sospensione del pendolo filare oscilla con un'amplitudine, la quale probabilmente sta all'amplitudine di oscillazione del punto di mezzo o del coltello di appoggio, come le rispettive distanze di detti punti dalla sezione ss' di attacco della mensoletta di sostegno. Nel caso delle mie esperienze tale rapporto è circa di 7 ad 1, quindi *la riduzione* χms_1 *ridurrebbesi circa a* 1^{μ}, e *la riduzione* χms_2 *a qualche cosa meno di* $0^{\mu},5$. — Siffatte correzioni sono al di sotto dei limiti degli errori probabili e possono impunemente trascurarsi.

Pertanto *al risultato della mia determinazione della lunghezza del pendolo semplice a secondi non ho creduto opportuno di applicare veruna correzione dipendente dalla oscillazione del supporto.*

Un'altra ricerca fu da me istituita per vedere fino a qual punto l'esperienza concordi colle vedute esposte nella prima parte di questa Memoria intorno alla teoria del pendolo filare applicato ad un supporto oscillante sincronicamente.

La sera del 20 settembre 1885, essendo *appena sensibili i moti microsismici* ed essendo il pendolo filare in equilibrio sulla sua verticale, misi in movimento il pendolo a reversione col cilindro pieno in basso, dandogli l'amplitudine iniziale di 2°.13′ circa. Messosi tosto in oscillazione il pendolo filare, tenni dietro simultaneamente, per un'ora e dieci minuti circa, all'andamento delle amplitudini di ambidue i pendoli registrando sul cronografo i tempi di osservazione. Ottenni in tal modo gli elementi numerici della Tabella 24ª, i quali sono rappresentati graficamente nella fig. 5 della Tav. IX mediante le due serie di punti isolati AB, ODE. I punti così dell'una come dell'altra serie distanno dall'asse delle ordinate Oy di quantità proporzionali ai tempi delle rispettive osservazioni registrati nella prima colonna della tabella. Dall'asse delle ascisse Ox i punti delle serie AB distanno di quantità proporzionali alle amplitudini del pendolo a reversione registrate nella seconda colonna e diminuite tutte di 40′; la scala di queste amplitudini si legge sul margine a dritta della figura. Invece i punti della serie ODE distanno dallo stesso asse Ox di quantità proporzionali all'amplitudine del pendolo filare offerta dalla terza colonna in giri e parti di giro del micrometro: la scala di queste amplitudini leggesi sul margine a sinistra.

TABELLA 24.ª

Cilindro pieno in basso. 1885 Settembre 30 sera.

Tempo	Amplitudine del pendolo revers.	Amplitudine del pendolo filare	Tempo	Amplitudine del pendolo revers.	Amplitudine del pendolo filare
m s		g p	m s		g p
0. 9.7	132′	0. 0.0	20.30.1	87′	3.16.0
1.20.8	131	0.27.6	21.26.3	86	3.15.5
2. 5.2	128	0.44.3	23.11.2	83	3.11.3
2.39.5	127	0.58.1	24.47.6	81	3. 8.3
3.15.6	123	1.11.1	26.20.1	79	3. 3.8
4.18.2	120	1.35.0	27.58.9	76	2.58.0
5. 4.4	118	1.48.2	29.39.6	72	2.50.7
5.46.7	117	2. 2 0	31.34.1	72	2.42.3
6.43.2	114	2.14.0	33.20.6	69	2.33.9
			34.55.5	68	2.28.0
7.33.3	113	2.26.2	37.14.8	63	2.22.9
			38.54.6	63	2.19.8
			40.35.7	60.5	2.13.7
8.29.6	111	2.39.5	43.32.4	59	1.59.0
9.20.1	108	2.49.9	47.14.7	57	1.49.7
10.24.3	106	2.59.6	48.34.1	54	1.45.0
			50.27.0	52	1.42.9
11.38.9	104	3. 6.0	53. 4.0	50	1.37.9
13.12.9	102	3.10.6	54.56.5	49	1.32.8
14.13.6	99	3.13.9	57.13.5	48	1.31.8
15. 2.1	98	3.15.2	60.20.6	46	1.28.1
16. 7.1	94	3.18.8	62.13.4	43	1.24.2
17.36.9	92	3.18.9	65. 8.5	41	1.18.0
19. 1.6	89	3.17.0	69.11.8	39	1.15.7

Per vedere fino a qual punto la equazione (99), pag. 70, rappresenti la curva continua che si può immaginare tracciata fra i punti della serie ODE, ho calcolato innanzi tutto i parametri k, μ, ν della curva espressa dalla equazione terza delle (67), pag. 50, partendo da tre valori dell'amplitudine del pendolo a reversione desunti dalla curva fatta passare a mano libera fra i punti della serie AB. Gli elementi assunti a base del calcolo sono:

$$\alpha = 132' \qquad 10^m \tau = 0^m 9^s,7$$
$$\alpha_1 = 87 \qquad 10\ \tau_1 = 20\ 30,1$$
$$\alpha_2 = 46 \qquad 10\ \tau_3 = 60\ 20,6$$

Dai quali colle equazioni (72), (74), (76), (77), (78), (79), pag. 51, 52, si deducono i parametri

$$\log k = 0,74676 \qquad k = 5,5816$$
$$\log \mu = 8,97579 \qquad \mu = 0,09458$$
$$\log \nu = 8,03722 \qquad \nu = 0,01089$$

avendo preso per unità di misura del tempo l' intervallo di 10^m.

Per comodità di calcolo, invece di assumere $\mu_f = 0,92$, ho assunto approssimativamente $\mu_f = 0,9458$, cioè

$$\mu_f = 10\,\mu\,,$$

ed assunsi per $\frac{\pi\chi m s_1}{2l}$ il valore dato dalle osservazioni del 30 ottobre, cioè

$$\frac{\pi\chi m s_1}{2l} = 0,000\ 0108 = \text{antilog}\ 5,03475.$$

Naturalmente, siccome μ corrisponde all'unità 600^s e ν all'unità $60''$, per il calcolo di α_f in secondi di arco colla equazione (99) si è preventivamente moltiplicato il coefficiente or ora scritto per $600 \times 60 = 36000$ con che si ottenne:

$$36000\,\frac{\pi\chi m s_1}{2l} = 0,3888.$$

Ottenuti i valori di α_f in secondi, si tradussero in giri in ragione di un giro per $10''$, e si ottenne:

τ	α_f secondi	α_f in giri del microm.
1	29″,1	2g.54p,5
2	35, 1	3. 30, 8
3	33, 5	3. 21, 1
4	29, 8	2. 58, 8
5	26, 0	2. 35. 7
6	22, 4	2. 14, 6
7	19, 6	1. 57. 8

Coi dati dell'ultima colonna sono state costruite le ordinate della curva OGH (IX, 5), la quale, come si vede, per valori di τ superiori all'unità, si allontana alquanto sensibilmente della serie ODE.

Per ottenere un maggiore ravvicinamento ho supposto μ_f variabile col tempo, a ciò indotto principalmente dalla considerazione che, il filo del pendolo essendo igrometrico, può, col tempo e colla vicinanza dell'osservatore e delle fiamme che servono alla illuminazione e per altre cause, variare la resistenza al moto oscillatorio che il filo oppone nel suo punto di sospensione.

Ma se si assume

$$\mu_f = \mu_0 + \mu_1 \tau ,$$

cioè i due primi termini dello sviluppo della funzione incognita che lega μ_f al tempo, e s' introduce questa posizione nella equazione differenziale (97), pag. 107, si arriva colla integrazione a questa serie:

$$\alpha_f = \frac{\mu \chi m s}{2 l \mu v} \sum_{h=1}^{h=\infty} \left\{ \frac{e^{-h\mu\tau}}{\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu_1}{\mu}\tau - h} - \frac{e^{-\left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu_1}{2\mu}\tau\right)\mu\tau}}{\frac{\mu_0}{\mu} - h} \right\} e^{-h\mu k}, \qquad (99)_a$$

la quale per $\tau = \frac{h\mu - \mu_0}{\mu_1}$ dà per α_f un valore infinito e pertanto non può servire allo scopo, e la forma assunta per μ_f non vale.

Sarebbe tolto il difetto della eq.^{e} $(99)_a$ se, nell'esponente del secondo termine, la frazione $\frac{\mu_1}{2\mu}$ fosse surrogata con $\frac{\mu_1}{\mu}$ e i due termini avessero il denominatore comune $\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu_1}{\mu}\tau - h$, poichè in tal caso, sebbene il termine corrispondente al valore speciale di τ superiormente esposto si presenti sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, il suo valore è effettivamente determinato. In seguito ad una tale considerazione ho supposto α_f espresso dalla equazione

$$\alpha_f = \frac{\pi \chi m s}{2 l \mu v} \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1 - e^{-\left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu_e}{\mu}\tau - h\right)\mu\tau}}{\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu_e}{\mu}\tau - h} e^{-h\mu(k+\tau)} \qquad (99)_b$$

essendo μ_e una quantità da determinare per tentativi colla condizione che un certo valore di α_f calcolato eguagli il corrispondente valore osservato. Dopo varî tentativi ho trovato il valore di μ_e che fa coincidere il valore di α_f ultimo osservato col corrispondente valore calcolato ed è

$$\mu_e = \frac{5}{7}\mu .$$

Con tale valore e col valore $\mu_0 = 10\mu$ ottenni dalla equazione $(99)_b$ i seguenti valori:

τ	α_f in secondi	α_f in giri e parti
1	28″,3	2g.49p,5
2	31, 8	3. 10, 8
3	27, 9	2. 47, 2
4	22, 8	2. 16, 7
5	18, 4	1. 50, 4
6	14, 9	1. 29, 6
7	12, 2	1. 13, 4

Con questi dati è costruita la curva OLM, la quale si accosta moltissimo alla curva determinata dalla serie dei punti isolati ODE. Tale curva può dunque ritenersi abbia molto prossimamente per equazione la $(99)_b$.

Quanto alla funzione $\mu_f = \sigma(\tau)$, che, introdotta nella equazione differenziale (97), conduce alla $(99)_b$, essa potrebbe calcolarsi per valori speciali colla equazione

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{F(\tau)} \left\{ \frac{1}{e^{\mu.(k+\tau)} - 1} - F'(\tau) \right\},$$

avendo posto

$$\alpha_f = \frac{\pi \lambda m s}{2 l v} F(\tau),$$

$$F(\tau) = \sum_{h=1}^{h=\infty} e^{-h\mu.(k+\tau)} \frac{1 - e^{-(\mu_0 + \mu_e \tau - \mu.h)\tau}}{\mu_0 + \mu_e \tau - \mu h}$$

ed

$$F'(\tau) = \frac{dF}{d\tau}.$$

b) *Movimenti microsismici.*

Le deviazioni dei punti della serie ODE dalla curva OLM, e fors' anche quelle dei punti stessi dalla OGH, si spiegano, oltre che mediante gli errori accidentali di osservazione, anche e principalmente coi movimenti microsismici, dei quali è assai raro riscontrare l'assoluta assenza.

Per dare una idea di tali movimenti spontanei riferisco qui, nelle Tabelle 25ª e 26ª, due serie di osservazioni eseguite al pendolo filare ricondotto in equilibrio sulla verticale del punto di sospensione, mentre questo non è sollecitato a muoversi da veruna causa prossima e palese. Dei moti spontanei che immediatamente nascevano io misurava col micrometro l'amplitudine, registrando sul cronografo l' istante di ogni misura. I tempi rilevati dal cronografo sono registrati nelle colonne 1ª, 3ª, 5ª, mentre le colonne 2ª, 4ª, 6ª, contengono le amplitudini corrispondenti espresse in giri e sessantesimi di giro del micrometro. Le amplitudini non precedute da segno s'intendono positive.

TABELLA 25.ª

1885 Ottobre 26, ore 9 ant. Moti microsismici.

s	g p	s	g p	s	g p
0.0	— 0. 4.8	1577.4	0.30.8	3007.3	0.11.0
51.2	5.7	1609.7	27.7	3092.4	4.6
81.4	10.9	1648.0	28.8	3124.0	4.7
115.5	10.6	1676.2	29.1	3144.5	7.2
151.9	16.6	1718.2	21.8	3183.0	7.9
174.1	9.1	1754.7	17.8	3235.6	6.5
212.5	6.6	1783.0	22.3	3257.7	7.4
240.4	8.0	1807.0	18.2	3277.4	8.0
272.7	6.9	1834.4	15.7	3311.8	8.5
301.2	7.9	1867.6	18.2	3344.0	6.1
343.2	9.8	1887.7	19.2	3370.3	3.9
379.4	12.0	1918.0	13.1	3404.4	6.8
438.4	4.8	1948.2	9.6	3427.9	1.9
468.4	10.3	1978.4	7.7	3451.9	3.3
491.7	19.1	1994.5	12.6	3480.4	4.9
527.0	22.5	2032.7	12.8	3494.4	4.8
549.0	23.6	2059.0	6.1	3524.6	9.2
577.1	25.8	2093.6	2.2	3552.7	14.7
615.6	20.7	2141.3	7.3	3577.0	15.2
637.7	18.0	2163.5	10.5	3615.8	18.7
672.6	15.8	2205.8	8.0	3645.1	22.0
702.0	17.9	2246.1	15.1	3669.5	26.3
744.0	16.3	2290.5	19.0	3691.6	27.4
788.3	11.0	2322.5	13.0	3711.4	28.7
818.5	8.8	2354.8	6.7	3733.7	30.1
851.0	6.3	2384.9	5.2	3765.6	27.1
909.7	4.6	2411.0	6.0	3798.1	22.2
945.3	— 1.7	2442.8	0.3	3839.4	25.2
985.1	1.2	2479.6	6.7	3889.6	15.1
1005.1	— 2.2	2509.6	10.9	3925.7	13.6
1035.6	— 0.3	2535.9	10.2	3958.5	11.8
1052.2	2.1	2560.0	7.8	3982.1	15.1
1088.3	3.7	2586.3	8.1	4000.1	15.3
1116.4	0.3	2608.4	5 8	4020.4	16.0
1150.6	7.8	2636.4	4.8	4056.7	20.7
1176.5	9.7	2653.0	5.8	4129.1	16.0
1202.9	13.3	2690.7	11.0	4165.5	13.9
1237.0	10.6	2705.3	12.0	4189.7	18.2
1271.2	5.4	2737.1	12.5	4207.8	16.0
1305.9	4.7	2755.1	13.8	4242.0	13.8
1350.2	16.7	2787.4	9.2	4276.1	16.1
1380.1	14.1	2809.5	12.6	4308.6	11.3
1398.3	18.0	2829.7	15.2	4353.1	12.8
1420.4	18.0	2882.1	12.0	4397.4	16.2
1448.7	18.3	2918.3	13.8	5017.9	13.0
1477.0	14.1	2946.5	10.8	5041.6	11.6
1511.0	11.1	2962.5	8.8	5084.0	14.3
1541.1	18.1	2980.8	10.3		

Tabella 26.ª

1885 Ottobre 28, 10h.33m pom. Moti microsismici.

s	g p	s	g p	s	g p
0.0	— 0. 1.0	1394.9	0.50.3	2604.0	0.41.6
55.0	9.7	1429.0	42.7	2626.4	38.5
87.1	14.6	1449.3	34.2	2644.3	24.6
131.6	16.8	1491.7	16.6	2732.6	25.8
188.1	7.7	1513.7	21.0	2759.3	15.0
212.1	11.0	1529.8	9.2	2775.9	5.8
234.9	0.0	1549.6	0.8	2797.6	27.7
251.8	— 3.1	1578.0	32.0	2819.9	49.7
301.0	0.3	1594.4	36.7	2846.2	44.3
339.6	21.2	1620.9	38.9	2882.1	39.0
387.6	9.7	1648.7	23.0	2904.4	52.1
417.5	1.0	1670.9	13.9	2926.4	44.1
435.5	— 2.9	1685.1	— 0.3	2950.6	47.3
468.0	25.7	1701.1	2.2	2973.0	1.10.0
488.7	17.6	1715.4	— 7.7	2991.0	18.0
514.7	29.0	1744.6	9.1	3011.5	21.3
531.0	34 3	1769.0	3.9	3027.2	28.7
565.0	29.2	1791.3	— 1.0	3047.4	30.7
583.2	35.2	1819.0	22.0	3081.8	34.3
609.1	37.0	1839.4	14.0	3107.9	34.9
629.0	44.9	1859.4	6.2	3136.2	38.8
653.0	36.2	1883.2	19.2	3162.1	36.5
675.2	20.7	1903.4	— 6.0	3206.5	42.8
695.2	22.1	1926.0	7.8	3228.8	49.4
725.3	20.1	1950.1	4.2	3250.8	41.2
761.8	0.1	1972.2	8.2	3280.9	33.8
794.4	12.3	1996.4	7.2	3301.1	41.7
812.4	5.3	2022.8	22.5	3325.3	26.0
830.7	11.8	2066.8	11.2	3389.7	36.0
854.9	0.3	2097.5	0.9	3415.9	23.5
923.5	41.3	2117.3	12.2	3442.2	36.0
951.4	34.1	2141.3	20.9	3464.6	38.2
983.4	26.7	2163.4	32.0	3512.7	13.0
997.6	27.1	2205.6	31.0	3537.0	18.7
1033.6	17.7	2238.0	45.4	3577.3	11.1
1055.7	16.3	2262.0	42.7	3597.1	0.7
1097.9	33.8	2292.2	27.6	3613.3	3.1
1130.3	37.2	2330.2	20.3	3633.3	11.2
1154.4	30.0	2347.2	32.1	3651.8	0.9
1174 6	27.6	2385.0	34.5	3674.0	3.7
1215.0	31.8	2411.1	29.8	3696.0	4.0
1257.5	2.0	2441.1	35 4	3726.3	18.6
1290.2	26.7	2467.3	28.0	3776.6	25.1
1312.8	22.6	2493.4	28.1	3802.7	12.0
1342.6	0.26.1	2540.1	0.25.0	3820.9	1. 2.8

Si vede che, nelle variazioni di amplitudine osservate, nulla vi è di regolare, e ciò vuol dire che pur nulla di regolare vi può essere così nell'amplitudine come nella durata di quella componente della oscillazione microsismica del punto di sospensione che ha luogo perpendicolarmente al piano verticale determinato dall'asse del microscopio.

Soltanto nel caso in cui la curva costruita colle amplitudini osservate presentasse la forma di una sinusoide a parametri costanti, si potrebbe inferire che, durante quel tempo nel quale la curva presenta tale carattere, la *durata* $\frac{\pi}{n'}$ e l'*amplitudine* ε della suddetta componente è rimasta costante, e si potrebbe anche dalle osservazioni dedurre i valori dei due elementi.

Infatti se, per un certo intervallo di tempo, le quantità $\frac{\pi}{n'}$ ed ε si possono considerare costanti, a un tempo t, compreso in quell' intervallo e contato dall'istante τ di un passaggio del pendolo filare per la verticale, la distanza y' del punto di sospensione dal piano verticale dell'asse del microscopio sarà così espressa

$$y' = \varepsilon \cos [n'(t - \tau)]$$

e ciò conformemente alla seconda delle (89), pag. 67. Avendosi allora:

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = - n'^2 \varepsilon \cos [n'(t - \tau)]$$

sarà

$$\mathrm{F} = - \frac{1}{l} \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{n'^2}{l} \varepsilon \cos [n'(t - \tau)]$$

e applicando la prima delle (46), pag. 40, si avrà:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_f &= \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \varepsilon \frac{n}{l} \int_{t_0}^{t_1} \cos[n(t-\tau)] \cos[n'(t-\tau)]\, d(t-\tau) \\ &= \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{\varepsilon n}{2l} \left\{ \frac{\operatorname{sen}[(n-n')(t-\tau)]}{n-n'} + \frac{\operatorname{sen}[(n+n')(t-\tau)]}{n+n'} \right\}_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

e ponendo $t_0 = \tau$, cioè supponendo nulla l'amplitudine al tempo τ, e ponendo $t_1 = t$, avremo:

$$\Delta\alpha_f = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \varepsilon \frac{n}{l} \frac{n \operatorname{sen}[n(t-\tau)] \cos[n'(t-\tau)] - n' \cos[n(t-\tau)] \operatorname{sen}[n'(t-\tau)]}{(n+n')(n-n')}.$$

Indichiamo con m un numero di secondi contato a partire da τ cioè da un istante in cui $\Delta\alpha_f = 0$. La durata del *secondo* essendo espressa da $\frac{\pi}{n}$, sarà

$$t = \tau + m \frac{\pi}{n},$$

quindi

$$n(t - \tau) = m\pi, \quad \operatorname{sen}[n(t-\tau)] = 0, \quad \cos[n(t-\tau)] = -1$$

e sarà da prendere per $\cos[n(t-\tau)]$ questo valore che corrisponde ai secondi dispari, giacchè pei secondi pari è bensì vero che cambia segno tale coseno, ma con esso cambiano segno anche α_f e $\Delta\alpha_f$, per cui, ritenendo sempre $\Delta\alpha$ positivo, e osservando che

$$n'(t-\tau) = \frac{n'}{n} m\pi = -\frac{m}{n}(n - n')\pi + m\pi$$

avremo

$$\Delta\alpha_f = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \frac{\varepsilon n n'}{l(n+n')} \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{m}{n}(n-n')\pi\right]}{n-n'},$$

la quale equazione esprime la somma degli incrementi dell'amplitudine a partire da $\Delta\alpha_f = 0$ cioè dall'amplitudine zero, ovvero esprime l'amplitudine del pendolo filare al tempo $t = \tau + m\frac{\pi}{n}$.

Questa formola comprende come caso particolare quello già trattato di $n' = n$ cioè del punto di sospensione oscillante sincronicamente col pendolo filare. Infatti per $n - n' = 0$ abbiamo

$$\left\{\frac{1}{n-n'} \operatorname{sen}\left[\frac{m}{n}(n-n')\pi\right]\right\}_{n-n'=0} = \frac{m}{n}\pi,$$

e allora

$$\Delta\alpha_f = m\pi\frac{\varepsilon}{2l}$$

che per $m = 1$ ricade nel valore già trovato. V. le equazioni (92) a pag. 67.

L'equazione generale qui sopra scritta che dà il valore dell'amplitudine $\Delta\alpha_f$, dopo m secondi dal suo valor zero, può anche scriversi così:

$$\Delta\alpha_f = \left(\frac{n'}{n}\right)^3 \frac{\varepsilon}{l\left[1-\left(\frac{n'}{n}\right)^2\right]} \operatorname{sen}\left[\frac{m}{n}(n-n')\pi\right].$$

Supponiamo risulti dall'osservazione che l'amplitudine del pendolo filare, soggetto unicamente ai movimenti microsismici, essendo zero ad un certo istante, vada progressivamente crescendo fino a raggiungere un valor massimo dopo $m = \frac{\mu}{2}$ secondi; poi progressivamente diminuisca fino a tornar zero dopo altri $\frac{\mu}{2}$ secondi. Potremo dire che, in quei μ secondi, la durata e l'ampiezza dell'oscillazione del punto di sospensione, e quindi del moto microsismico, sono state costanti.

Per determinare la durata o, che è lo stesso, il divisore n' avremo la equazione

$$\frac{\mu}{n}(n-n') = \pm 1,$$

dove il segno superiore vale se $n > n'$, l' inferiore se $n < n'$. Da essa si ottiene

$$\frac{n'}{n} = \frac{\mu \mp 1}{\mu}$$

e la durata dell'oscillazione

$$\frac{\pi}{n'} = \frac{\mu}{\mu \mp 1}\frac{\pi}{n},$$

che vuol dire $\frac{\mu}{\mu \mp 1}$ secondi. Quanto all'amplitudine ε essa si potrà ottenere del valore massimo di $\Delta\alpha_f . l$, che indicheremo con A, al quale corrisponde $m = \frac{\mu}{2}$.

Avremo l'equazione

$$A = \frac{(\mu \mp 1)^3}{\mu\,(2\mu \mp 1)}\,\varepsilon,$$

d'onde

$$\varepsilon = \frac{\mu\,(2\mu \mp 1)}{(\mu \mp 1)^3}\,A\,.$$

Se μ sia molto grande in confronto dell'unità, sarà prossimamente $\varepsilon = \frac{2A}{\mu}$, e la durata dell'oscillazione sarà molto prossimamente di un secondo. Ond'è che quanto più frequentemente torna $\Delta\alpha_f = 0$ tanto più la durata si scosta da un secondo.

§ XXXIII. *Disposizione e ordine delle osservazioni che hanno servito per determinare la lunghezza del pendolo a secondi mediante l'apparato di Repsold.*

Nello stabilire il programma delle operazioni io mi proposi per iscopo di fare ogni sera tutte quelle osservazioni che sono sufficienti per ottenere un valore indipendente della quantità incognita (lunghezza del pendolo semplice equivalente) prescindendo dall'errore che nasce in conseguenza della diversa cilindrità dei due coltelli. Per ottenere un tale valore è necessario che si determini la durata dell'oscillazione in due posizioni reciproche del pendolo; e quanto più breve sarà l'intervallo fra le due determinazioni, tanto più approssimativamente sarà realizzata la condizione di eguaglianza delle circostanze atmosferiche dell'ambiente, in virtù della quale rimane eliminato l'effetto che sarebbe prodotto sulla durata di oscillazione dalla diversità loro. — Seguendo il metodo di osservazione da me adottato, il tempo abbracciato da una osservazione completa della distanza dei coltelli e della durata di una oscillazione è così lungo che non sarebbe possibile, in una sola notte e da una sola persona, fare più di due determinazioni, oltre alle osservazioni per determinare lo stato e l'andamento dell'orologio. Volendo pertanto osservare la durata dell'oscillazione e la distanza dei coltelli in tutte le sedici combinazioni già enunciate, formanti *otto* paia di disposizioni reciproche, occorrevano *otto* sere di osservazione.

Il programma non fu esattamente lo stesso nelle due serie di osservazioni. Riferisco qui separatamente i due programmi notando a fianco anche i tempi richiesti per le singole operazioni desumendoli da quelli che furono realmente da me impiegati.

a) *Programma delle osservazioni di agosto 1885 in ogni sera.*

1) Osservazioni allo strumento dei passaggi per determinare la correzione del pendolo di Frodsham n° 1604 (dalle 9^h alle 10^h).

2) Determinazione del centro di gravità del pendolo (10^m).

3) Confronto della distanza dei coltelli colla lunghezza della scala A (da $10^h.48^m$ a $11^h.5^m$: intervallo $= 17^m$).

4) Osservazioni per determinare l'amplitudine e la durata di una oscillazione (da $11^h.12^m$ a $11^h.54^m$: intervallo = 42^m).

5) Inversione del pendolo (11^m).

6) Osservazioni per determinare l'amplitudine e la durata di una oscillazione (da $12^h.5^m$ a $12^h.47^m$: intervallo = 42^m).

7) Confronto della distanza dei coltelli colla lunghezza della scala (da $12^h.57^m$ a $13^h.14^m$: intervallo = 17^m):

8) Determinazione del centro di gravità (10^m).

9) Talvolta osservazione allo strumento dei passaggi.

Durata totale delle operazioni in ogni sera: 5 ore circa.

b) *Programma serale delle operazioni di febbraio 1886.*

Esperimenti preparatorî pel confronto delle scale, eseguiti nel gennaio 1886, hanno fatto conoscere la opportunità d' introdurre nella esecuzione delle osservazioni alcune precauzioni. Poichè in seguito alle manipolazioni alle quali viene assoggettato il pendolo questo si riscalda più dell'aria ambiente, bisogna che dette manipolazioni, per quanto caute, siano eseguite un certo tempo prima delle misure, affinchè nell' intervallo possa ristabilirsi l'equilibrio di temperatura fra la massa della scala o del pendolo e l'aria ambiente. — Perciò si ritenne buona cosa di procedere nelle misure di febbraio con queste avvertenze: α) si dovea lasciare il pendolo appoggiato sulle forcelline del supporto dalla sera precedente e si dovea fin dalla sera precedente aggiustare la posizione dei riflettori così che non vi fosse bisogno di toccarli all'atto della prima misura di distanza dei coltelli: β) si doveva rimanere il meno possibile nelle vicinanze immediate dello strumento e toccarlo pure il meno possibile: γ) dopo eseguite le prime misure in una posizione del pendolo, e dopo avere con tutte le precauzioni possibili invertito il pendolo stesso, si doveva lasciar scorrere un qualche tempo prima di passare alle nuove misure: δ) si dovevano lasciare ultime le operazioni per determinare il centro di gravità: ε) ogni giorno dopo finite le operazioni si doveva predisporre l'apparato per le operazioni del giorno successivo. Si riconobbe inoltre opportuno di misurare la distanza dei coltelli prima e dopo ciascuna serie di oscillazioni affinchè la media aritmetica delle due misure potesse dare la distanza corrispondente al mezzo delle oscillazioni. Le precauzioni e norme qui esposte doveano aversi principalmente in vista nelle operazioni di febbraio, a motivo della maggiore differenza di temperatura esistente in tale mese fra la mano e la persona dell'operatore e l'aria ambiente, in confronto di quella che si verifica in agosto.

Il programma delle operazioni di febbraio fu dunque il seguente:

1) Osservazioni allo strumento dei passaggi per determinare la correzione del pendolo (dalle $7^h.0^m$ alle $8^h.30^m$).

2) Confronto della distanza dei coltelli colla lunghezza della scala (dalle $9^h.0^m$ alle $9^h.13^m$: intervallo = 13^m).

3) Osservazioni per determinare l'amplitudine e la durata di una oscillazione (da $9.^h19^m$ a $10^h.29^m$: intervallo = $1^h.10^m$).

4) Confronto della distanza dei coltelli colla lunghezza della scala (da $10^h.35^m$ a $10^h.48^m$: intervallo $= 13^m$).

5) Inversione del pendolo e pausa di mezz'ora circa (36^m).

6) Confronto della distanza dei coltelli colla scala (da $11^h.24^m$ a $11^h.37^m$: intervallo $= 13^m$).

7) Osservazioni per determinare l'amplitudine e la durata di una oscillazione (da $11^h.43^m$ a $12^h.53^m$: intervallo $= 1^h.10^m$).

8) Confronto della distanza dei coltelli (da $12^h.58^m$ a $13^h.9^m$: intervallo $= 11^m$).

9) Determinazione del centro di gravità.

Durata complessiva delle operazioni, comprese le pause, 6 ore e mezza.

§ XXXIV. *Osservazioni allo strumento dei passaggi per la determinazione del tempo.*

Lo strumento trasportabile dei passaggi adoperato in tali osservazioni è di Ertel ed è quello stesso che fu da me impiegato, prima in campagna di Lecce nel settembre 1874 per determinazioni di tempo e di latitudine, e poi nelle determinazioni di longitudine del 1875 fra Padova, Milano, Vienna e Napoli. A tale strumento si fanno da parecchi anni le osservazioni correnti di tempo in quest'Osservatorio.

Fu evitato il calcolo della correzione per l'errore di collimazione, prendendo come tempo del passaggio al cerchio massimo istrumentale la media aritmetica dei passaggi osservati per i medesimi fili situati prima all'est (passaggio superiore) e poi coll'inversione trasportati all'ovest del cerchio massimo istrumentale.

Si è cercato, per quanto fu possibile, di osservare ogni sera le medesime stelle e nelle medesime condizioni, importando principalmente di ottenere esatto l'andamento del pendolo e meno di conoscerne lo stato assoluto.

I risultati delle osservazioni sono registrati nella Tabella 29ª.

In essa le cifre della 2ª colonna esprimono ciascuna il numero dei fili osservati tanto in una posizione quanto nella posizione invertita dello strumento. Ogni inclinazione registrata nella colonna 3ª, è la media ottenuta con due livellazioni, una immediatamente precedente, l'altra immediatamente susseguente l'osservazione del passaggio pel cerchio massimo istrumentale della stella indicata sulla medesima riga. La livelletta con serbatoio di compensazione è stata costruita dal sig. W. Reinisch di Vienna, e sostituisce la livelletta adoperata nelle precedenti operazioni rottasi accidentalmente. Il valore angolare di una sua particella in tempo $= 0^s,09$. — Gli elementi delle colonne 4ª e 5ª sono desunti dal *Berliner Astronomisches Jahrbuch* dell'anno rispettivo. Nella 6ª colonna sono registrate le differenze fra l'ascensione retta e la media aritmetica dei passaggi osservati est ed ovest. — I numeri della colonna 7ª sono calcolati mediante l'andamento approssimativo del pendolo quale risulta dai passaggi osservati della medesima stella in due sere diverse. — L'aberrazione diurna registrata nella colonna 8ª fu calcolata colla formola $+ 0^s,021 \cos L \sec \delta$ consueta. — Le riduzioni al meridiano della colonna 11ª sono calcolate cogli azimut istrumentali della tavoletta seguente:

Tabella 27.ª

1885 Agosto	Azimut istrumentale	1886 Febbraio	Azimut istrumentale
5	s — 15.60	7	s — 1.22
6	— 15.50	8	— 1.21
19	— 0.76	9	— 1.07
20	— 0.62	16	— 1.05
21	— 0.62	17	— 0.95
23	— 0.60	18	— 0.99
24	— 0.54	19	— 1.00
25	— 0.44	23	— 0.99
26	— 0.42	24	— 1.00
27	— 0.39	25	— 0.98
28	— 0.35		

i quali furono dedotti nel modo solito combinando i passaggi al verticale istrumentale delle stelle circumpolari con quelli delle orarie. L'ultima colonna dà le correzioni dell'orologio corrispondenti alle sole stelle orarie.

Fatti i medî delle correzioni ottenute nelle singole sere si sono ottenute le correzioni medie registrate nella colonna 2ª di ciascuna delle due tavolette seguenti:

Tabella 28.ª*a*

1885 Agosto 1	Correzione del pendolo a 20^h dello stesso 2	Variazione diurna del pendolo 3	Variazione del pendolo nel tempo di una oscillazione 4
5	s + 448.17	s — 0.08	s — 0.000 0008
6	+ 448.25	— 0.08	8
19	— 30.81	— 0.87	101
20	— 29.84	— 1.08	125
21	— 28.65	— 1.13	131
23	— 26.65	— 1.14	132
24	— 25.44	— 1.11	129
25	— 24.42	— 0.97	112
26	— 23.51	— 0.93	108
27	— 22.56	— 0.76	— 0.000 0088
28	— 21.99	. . . .	. . . .

Tabella 28.ª*b*

1886 Febbraio 1	Correzione del pendolo a 7^h dello stesso 2	Variazione diurna del pendolo 3	Variazione del pendolo nel tempo di una oscillazione 4
7	s + 47.78	s — 0.59	s — 0.000 0068
8	+ 48.44	— 0.58	67
9	+ 48.90	— 0.54	62
16	+ 52.70	— 0.50	58
17	+ 53.29	— 0.50	58
18	+ 53.58	— 0.49	57
19	+ 54.21	— . . .	. .
23	+ 55.96	— 0.44	51
24	+ 56.38	— 0.43	— 0.000 0050
25	+ 56.89	. . . .	. . . .
	. . . . .	. . . .	. . . .

Mediante una interpolazione grafica delle correzioni ora dette furono dedotti gli andamenti diurni della colonna 3ª, e da questi, colla divisione per 86400, la variazione del pendolo nel tempo di una oscillazione registrato nell'ultima colonna.

Posto $= \pm 0^s,06$ l'error probabile dell'andamento diurno, l'error probabile della variazione registrata nella colonna 4ª sarà:

$$\pm 0^s.000\,000\,7$$

e nel medio di otto sere $\pm 0^s.000\,000\,3.$

Tabella 29.ª

Determinazioni di tempo. Agosto 1885.

Data	N. dei doppi passaggi osservati	Inclinazione	Stella osservata: Nome	Stella osservata: Ascensione retta	Ascensione retta meno tempo osservato del passaggio al cerchio massimo istrumentale	Riduzione ad una stessa ora	Aberrazione diurna	Riduzione al verticale istrumentale	Ascensione retta meno tempo del passaggio al verticale istrumentale corretta per l'aberraz. ec.	Riduzione al meridiano	Correzione del pendolo a data ora di esso per le stelle singole
1	2	3	4	5	6'	7	8	9	10	11	12
		s		h m s	s		s	s	s	s	s
5	7	+ 0.045	ϑ Herculis	17 52 20.95	+ 445.45	—	+ 0.02	— 0.06	+ 445.41	+ 2.78	+ 448.19
	7	+ 0.035	o Herculis	18 3 5.96	+ 443.16	—	+ 0.02	— 0.04	+ 443.14	+ 5.10	+ 448.24
	7	+ 0.021	χ Draconis	18 23 10.89	+ 472.70	—	+ 0.05	— 0.04	+ 472.71	. . . .	. . . . . .
	7	— 0.005	R Lyrae	18 51 52.98	+ 447.36	—	+ 0.02	+ 0.01	+ 447.29	+ 0.61	+ 448.00
	7	+ 0.039	ι Andromedae	23 32 33.55	+ 447.06	—	+ 0.02	— 0.05	+ 447.03	+ 1.03	+ 448.06
	5	+ 0.044	41 H Cephei	23 42 30.51	+ 462.53	—	+ 0.04	— 0.10	+ 462.47	. . . .	. . . . . .
	5	+ 0.035	α Andromedae	0 2 29.83	+ 443.22	—	+ 0.02	— 0.04	+ 443.20	+ 5.16	+ 448.36
6	7	— 0.080	ϑ Herculis	17 52 20.93	+ 445.28	—	+ 0.02	+ 0.10	+ 445.40	+ 2.76	+ 448.16
	7	— 0.096	o Herculis	18 3 5.95	+ 443.02	—	+ 0.02	+ 0.10	+ 443.14	+ 5.07	+ 448.21
	7	— 0.053	χ Draconis	18 23 10.83	+ 472.15	—	+ 0.05	+ 0.16	+ 472.36	. . . .	. . . . . .
	7	— 0.047	R Lyrae	18 51 52.97	+ 447.50	—	+ 0.02	+ 0.07	+ 447.59	+ 0.61	+ 448.20
	7	— 0.101	ι Andromedae	23 32 33.58	+ 447.10	—	+ 0.02	+ 0.14	+ 447.26	+ 1.02	+ 448.28
	7	— 0.097	41 H Cephei	23 42 30.57	+ 462.72	—	+ 0.04	+ 0.23	+ 462.99	. . . .	. . . . . .
	7	— 0.097	α Andromedae	0 2 29.86	+ 443.14	—	+ 0.02	+ 0.11	+ 443.27	+ 5.13	+ 448.40
						s					
19	7	— 0.047	τ Draconis	19 17 49.14	— 32.18	+ 0.03	+ 0.05	+ 0.14	— 31.96	. . . .	. . . . . .
	7	— 0.033	ϑ Cygni	19 33 24.48	— 31.08	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.05	— 30.99	+ 0.09	— 30.90
	7	— 0.026	δ Cygni	19 41 25.90	— 30.77	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.04	— 30.70	— 0.01	— 30.71
20	7	+ 0.105	ϑ Lyrae	19 12 25.32	— 29.77	+ 0.03	+ 0.02	— 0.13	— 29.85	— 0.10	— 29.95
	7	+ 0.091	β Cygni	19 26 7.88	— 29.44	+ 0.02	+ 0.02	— 0.10	— 29.50	— 0.21	— 29.71
	7	+ 0.084	ϑ Cygni	19 33 24.46	— 29.86	+ 0.02	+ 0.02	— 0.13	— 29.95	+ 0.08	— 29.87
	7	+ 0.075	δ Cygni	19 41 25.88	— 29.73	+ 0.01	+ 0.02	— 0.11	— 29.81	— 0.01	— 29.82
	8	+ 0.087	Br 1147 inf.	20 5 2.79	— 27.81	0.00	— 0.06	+ 0.19	— 27.68	. . . .	. . . . . .

Data	N. dei doppi passaggi osservati	Inclinazione	Stella osservata		Ascensione retta meno tempo osservato del passaggio al cerchio massimo istrumentale	Riduzione ad una stessa ora	Aberrazione diurna	Riduzione al verticale istrumentale	Ascensione retta meno tempo del passaggio al verticale istrumentale corretta per l'aberraz. ec.	Riduzione al meridiano	Correzione del pendolo a data ora di esso per le stelle singole
			Nome	Ascensione retta							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		s		h m s	s	s	s	s	s	s	s
21	6	— 0.013	ϑ Lyrae	19 12 25.30	— 28.77	+ 0.03	+ 0.02	+ 0.02	— 28.70	— 0.10	— 28.80
	5	+ 0.001	τ Draconis	19 17 49.02	— 29.76	+ 0.03	+ 0.05	0.00	— 29.68	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.018	β Cygni	19 26 7.87	— 28.38	+ 0.02	+ 0.02	— 0.02	— 28.36	— 0.21	— 28.57
	7	+ 0.005	ϑ Cygni	19 33 24.44	— 28.88	+ 0.02	+ 0.02	— 0.01	— 28.85	+ 0.08	— 28.77
	7	+ 0.007	δ Cygni	19 41 25.86	— 28.63	+ 0.01	+ 0.02	— 0.01	— 28.61	— 0.01	— 28.62
	7	+ 0.003	41 H Cygni	23 42 31.06	— 28.94	— 0.15	+ 0.04	— 0.01	— 29.06	. . . .	. . . . .
	7	— 0.004	α Andromedae	0 2 30.16	— 28.15	— 0.16	+ 0.02	0.00	— 28.29	— 0.21	— 28.50
23	7	— 0.114	R Lyrae	18 51 52.69	— 26.91	+ 0.04	+ 0.02	+ 0.16	— 26.69	— 0.02	— 26.71
	5	+ 0.040	ϑ Lyrae	19 12 25.27	— 26.63	+ 0.03	+ 0.02	— 0.05	— 26.63	— 0.10	— 26.73
	6	+ 0.081	ϑ Cygni	19 33 24.39	— 26.70	+ 0.02	+ 0.02	— 0.13	— 26.79	+ 0.07	— 26.72
	7	+ 0.072	δ Cygni	19 41 25.83	— 26.47	+ 0.01	+ 0.02	— 0.10	— 26.54	— 0.01	— 26.55
	7	+ 0.116	α Andromedae	0 2 30.20	— 26.26	— 0.16	+ 0.02	— 0.13	— 26.53	— 0.20	— 26.73
	7	+ 0.131	π Andromedae	0 30 48.02	— 26.02	— 0.18	+ 0.02	— 0.15	— 26.33	— 0.15	— 26.48
24	7	+ 0.097	ϑ Lyrae	19 12 25.25	— 25.41	+ 0.03	+ 0.02	— 0.13	— 25.49	— 0.09	— 25.58
	7	+ 0.095	β Cygni	19 26 7.83	— 25.09	+ 0.02	+ 0.02	— 0.10	— 25.15	— 0.19	— 25.34
	7	+ 0.098	ϑ Cygni	19 33 24.38	— 25.42	+ 0.02	+ 0.02	— 0.15	— 25.53	+ 0.07	— 25.46
	7	+ 0.095	δ Cygni	19 41 25.81	— 25.33	+ 0.01	+ 0.02	— 0.13	— 25.43	— 0.01	— 25.44
	7	+ 0.095	Br 1147 inf.	20 5 3.00	— 23.71	0.00	— 0.06	+ 0.21	— 23.56	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.079	π Andromedae	0 30 48.04	— 24.97	— 0.18	+ 0.02	— 0.09	— 25.22	— 0.14	— 25.36
25	7	+ 0.041	ϑ Lyrae	19 12 25.23	— 24.39	+ 0.03	+ 0.02	— 0.07	— 24.41	— 0.07	— 24.48
	6	+ 0.023	τ Draconis	19 17 48.80	— 25.25	+ 0.03	+ 0.05	— 0.07	— 25.24	. . . .	. . . . .
	7	— 0.003	β Cygni	19 26 7.82	— 24.21	+ 0.02	+ 0.02	0.00	— 24.17	— 0.15	— 24.32
	7	+ 0.032	ϑ Cygni	19 33 24.36	— 24.42	+ 0.02	+ 0.02	— 0.03	— 24.43	+ 0.06	— 24.37
	7	+ 0.062	ψ Cygni	19 52 42.51	— 24.65	0.00	+ 0.02	— 0.10	— 24.73	+ 0.07	— 24.66
	7	+ 0.046	o′ Cygni seq.	20 10 3.82	— 24.28	— 0.01	+ 0.02	— 0.07	— 24.34	+ 0.01	— 24.33
	7	+ 0.041	π Andromedae	0 30 48.06	— 24.18	— 0.18	+ 0.02	— 0.05	— 24.39	— 0.11	— 24.50
	7	+ 0.054	ζ Andromedae	0 41 18.00	— 23.89	— 0.19	+ 0.02	— 0.05	— 24.11	— 0.18	— 24.29
26	8	+ 0.106	χ Draconis	18 23 9.62	— 23.81	+ 0.07	+ 0.05	— 0.32	— 24.01	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.104	α Lyrae	18 33 5.06	— 23.55	+ 0.06	+ 0.02	— 0.13	— 23.60	— 0.06	— 23.66
	7	+ 0.099	β Lyrae	18 45 52.55	— 23.49	+ 0.05	+ 0.02	— 0.12	— 23.54	— 0.11	— 23.65

Data	N. dei doppi passaggi osservati	Inclinazione	Stella osservata Nome	Ascensione retta	Ascensione retta meno tempo osservato del passaggio al cerchio massimo istrumentale	Riduzione ad una stessa ora	Aberrazione diurna	Riduzione al verticale istrumentale	Ascensione retta meno tempo del passaggio al verticale istrumentale corretta per l'aberraz. ec.	Riduzione al meridiano	Correzione del pendolo a data ora di esso per le stelle singole
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		s		h m s	s	s	s	s	s	s	s
26	7	+ 0.095	R Lyrae	18 51 52.63	— 23.46	+ 0.04	+ 0.02	— 0.13	— 23.53	— 0.02	— 23.55
	7	+ 0.100	ϑ Lyrae	19 12 25.31	— 23.40	+ 0.03	+ 0.02	— 0.13	— 23.48	— 0.07	— 23.55
	8	+ 0.109	τ Draconis	19 17 48.74	— 24 07	+ 0.03	+ 0.05	— 0.33	— 24.32	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.100	β Cygni	19 26 7.81	— 23.18	+ 0.02	+ 0.02	— 0.11	— 23.25	— 0.15	— 23.40
	7	+ 0.106	α Andromedae	0 2 30.25	— 23.01	— 0.16	+ 0.02	— 0.12	— 23.27	— 0.14	— 23.41
	7	+ 0.124	π Andromedae	0 30 48.08	— 22.95	— 0.18	+ 0.02	— 0.14	— 23.25	— 0.11	— 23.36
27	7	+ 0.047	β Lyrae	18 45 52.54	— 22.46	+ 0.05	+ 0.02	— 0.05	— 22.44	— 0.10	— 22.54
	7	+ 0.035	R Lyrae	18 51 52.61	— 22.54	+ 0.04	+ 0.02	— 0.05	— 22.53	— 0.02	— 22.55
	7	+ 0.038	ϑ Lyrae	19 12 25.20	— 22.54	+ 0.03	+ 0.02	— 0.05	— 22 54	— 0.06	— 22.60
	7	+ 0.027	τ Draconis	19 17 48.68	— 23 19	+ 0.03	+ 0.05	— 0.08	— 23.19	. . . .	. . . . .
28	7	— 0.073	β Cygni	19 26 7.78	— 21.90	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.08	— 21.78	— 0.12	— 21.90
	7	— 0.082	ϑ Cygni	19 33 24.30	— 22.35	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.13	— 22.18	+ 0.04	— 22.14
	7	— 0.077	δ Cygni	19 41 25.75	— 21.97	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.11	— 21.83	0.00	— 21.83
	7	— 0.064	ψ Cygni	19 52 42.45	— 22.26	0.00	+ 0.02	+ 0.10	— 22.14	— 0.06	— 22.08
	3	— 0.078	Br 1147 inf.	20 5 3.33	— 20.56	0.00	— 0.06	— 0.17	— 20.79	. . . .	. . . . .

Febbraio 1886.

Data	N. dei doppi passaggi osservati	Inclinazione	Stella osservata Nome	Ascensione retta	Ascensione retta meno tempo osservato del passaggio al cerchio massimo istrumentale	Riduzione ad una stessa ora	Aberrazione diurna	Riduzione al verticale istrumentale	Ascensione retta meno tempo del passaggio al verticale istrumentale corretta per l'aberraz. ec.	Riduzione al meridiano	Correzione del pendolo a data ora di esso per le stelle singole
7	7	+ 0.008	Gr. 848	4 33 33.82	+ 45.40	+ 0.05	+ 0.06	— 0.03	+ 45.48	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.023	ι Aurigae	4 49 35.23	+ 48.11	+ 0.05	+ 0.02	— 0.03	+ 48.15	— 0 31	+ 47.84
	4	+ 0.034	ε Aurigae	4 53 48.55	+ 47.74	+ 0.05	+ 0.02	— 0.05	+ 47 76	— 0.03	+ 47.73
	7	+ 0.027	α Aurigae	5 8 17.44	+ 47 82	+ 0.04	+ 0.02	— 0.04	+ 47.84	+ 0.02	+ 47.86
	7	+ 0.017	Gr. 966	5 24 32.81	+ 45.34	+ 0.04	+ 0.06	— 0.04	+ 45.40	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.024	β Aurigae	5 51 11.49	+ 47.69	+ 0.03	+ 0.02	— 0.03	+ 47.71	— 0.02	+ 47.69
8	7	— 0.002	Gr. 848	4 33 33.74	+ 45.69	+ 0.05	+ 0.06	+ 0 01	+ 45.81	. . . .	. . . . .
	7	— 0.025	ι Aurigae	4 49 35.22	+ 48.64	+ 0.05	+ 0.02	+ 0.03	+ 48.74	— 0.31	+ 48.43
	7	— 0.036	ε Aurigae	4 53 48.53	+ 48.39	+ 0.05	+ 0.02	+ 0.05	+ 48.51	— 0.03	+ 48.48
	7	— 0.017	α Aurigae	5 8 17 42	+ 48.35	+ 0.04	+ 0 02	+ 0.02	+ 48.43	+ 0.01	+ 48.44
	7	— 0.014	Gr. 966	5 24 32.76	+ 45.92	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.04	+ 46.06	. . . .	. . . . .
	7	— 0.011	β Aurigae	5 51 11.48	+ 48.35	+ 0.03	+ 0.02	+ 0.02	+ 48.42	— 0.01	+ 48.41

Data	N. dei doppi passaggi osservati	Inclinazione	Stella osservata — Nome	Stella osservata — Ascensione retta	Ascensione retta meno tempo osservato del passaggio al cerchio massimo istrumentale	Riduzione ad una stessa ora	Aberrazione diurna	Riduzione al verticale istrumentale	Ascensione retta meno tempo del passaggio al verticale istrumentale corretta per l'aberraz. ec.	Riduzione al meridiano	Correzione del pendolo a data ora di esso per le stelle singole
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		s		h m s	s	s	s	s	s	s	s
9	4	+ 0.009	Gr. 848	4 33 33.67	+ 46.43	+ 0.05	+ 0.06	— 0.03	+ 46.51	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.009	ι Aurigae	4 49 35.20	+ 49.24	+ 0.05	+ 0.02	— 0.01	+ 49.30	— 0.27	+ 49.03
	7	+ 0.005	ε Aurigae	4 53 48.51	+ 48.84	+ 0.05	+ 0.02	— 0.01	+ 48.90	— 0.03	+ 48.87
	7	+ 0.004	α Aurigae	5 8 17.40	+ 48.74	+ 0.04	+ 0.02	— 0.01	+ 48.79	+ 0.01	+ 48.80
	7	+ 0.009	Gr. 966	5 24 32.70	+ 46.98	+ 0.04	+ 0.06	— 0.02	+ 47.06	. . . .	. . . . .
16	7	— 0.025	Gr. 848	4 33 33.13	+ 50.35	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.09	+ 50.54	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.125	ι Aurigae	4 49 35.07	+ 53.07	+ 0.04	+ 0.02	— 0.15	+ 52.98	— 0 27	+ 52.71
	7	+ 0.138	ε Aurigae	4 53 48.36	+ 52.78	+ 0.03	+ 0.02	— 0.19	+ 52.64	— 0.03	+ 52.61
	7	+ 0.050	α Aurigae	5 8 17.26	+ 52.78	+ 0.03	+ 0.02	— 0.07	+ 52.76	+ 0.01	+ 52.77
	7	— 0.011	β Aurigae	5 51 11.32	+ 52.63	+ 0.02	+ 0.06	+ 0.02	+ 52.73	— 0.01	+ 52.72
17	7	— 0.056	β Aurigae	5 51 11.30	+ 53.23	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.08	+ 53.35	— 0.01	+ 53.34
	8	— 0.050	22 H Camelop.	6 6 19.63	+ 51.89	+ 0.02	+ 0.04	+ 0.13	+ 52.08	. . . .	. . . . .
	7	— 0.037	ψ' Aurigae	6 16 8.60	+ 52.97	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.06	+ 53.06	+ 0.11	+ 53.17
	7	— 0.074	χ Ursae mai.	11 40 3.02	+ 53.23	— 0.08	+ 0.02	+ 0.11	+ 53.28	+ 0.08	+ 53.36
18	7	— 0.095	Gr. 848	4 33 32.97	+ 51.11	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.33	+ 51.54	. . . .	. . . . .
	7	— 0.005	α Aurigae	5 8 17.19	+ 53.53	+ 0.03	+ 0.02	+ 0.01	+ 53.59	+ 0.01	+ 53.60
	6	— 0.015	β Aurigae	5 51 11.28	+ 53.50	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.02	+ 53.56	— 0.01	+ 53.55
19	7	+ 0.023	ι Cancri	8 39 49.36	+ 54.58	— 0.03	+ 0.02	— 0.03	+ 54.54	— 0.33	+ 54.21
	7	+ 0.017	ι Ursae mai.	8 51 25.74	+ 54.21	— 0.04	+ 0.02	— 0.03	+ 54.16	+ 0.08	+ 54.24
	7	+ 0.013	χ Ursae mai.	11 40 3.06	+ 55.19	— 0.09	+ 0.02	— 0.02	+ 55.10	+ 0.08	+ 54.18
23	8	+ 0.036	Gr. 848	4 33 32.56	+ 53.91	+ 0.05	+ 0.06	— 0.13	+ 53.89	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.037	ι Aurigae	4 49 34.94	+ 56.29	+ 0.04	+ 0.02	— 0.04	+ 56.31	— 0.27	+ 56.04
	7	+ 0.027	ε Aurigae	4 53 48.20	+ 55.93	+ 0.04	+ 0.02	— 0.04	+ 55.95	— 0.03	+ 55.92
	7	+ 0.027	α Aurigae	5 8 17.07	+ 55.85	+ 0.04	+ 0.02	— 0.04	+ 55.87	+ 0.01	+ 55.88
	7	+ 0.025	β Aurigae	5 51 11.17	+ 55.93	+ 0.02	+ 0.02	— 0.04	+ 55.93	— 0.01	+ 55.92
	7	+ 0.023	22 H Camelop.	6 6 19.23	+ 54.86	+ 0.02	+ 0.04	— 0.06	+ 54.86	. . . .	. . . . .
	7	+ 0.011	ψ' Aurigae	6 16 8.48	+ 55.95	+ 0.01	+ 0.02	— 0.02	+ 55.96	+ 0.11	+ 56.07
	7	+ 0.028	χ Ursae mai.	11 40 3.14	+ 55.97	— 0.09	+ 0.02	— 0.04	+ 55.86	+ 0.08	+ 55.94
24	7	— 0.090	ϑ Geminor.	6 45 17.76	+ 56.49	0.00	+ 0.02	+ 0.11	+ 56.62	— 0.24	+ 56.38
	7	— 0.088	63 Aurigae	7 3 50.18	+ 56.44	0.00	+ 0.02	+ 0.11	+ 56.57	— 0.15	+ 56.42

Data	N. dei doppi passaggi osservati	Inclinazione	Stella osservata: Nome	Stella osservata: Ascensione retta	Ascensione retta meno tempo osservato del passaggio al cerchio massimo istrumentale	Riduzione ad una stessa ora	Aberrazione diurna	Riduzione al verticale istrumentale	Ascensione retta meno tempo del passaggio al verticale istrumentale corretta per l'aberraz. ec.	Riduzione al meridiano	Correzione del pendolo a data ora di esso per le stelle singole
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		s		h m s	s	s	s	s	s	s	s
24	7	— 0.090	19 Lyncis	7 13 35.52	+ 55.92	0.00	+ 0.03	+ 0.16	+ 56.11	+ 0.31	+ 56.42
	7	— 0.095	α Geminor.	7 27 20.55	+ 56.45	— 0.01	+ 0.02	+ 0.11	+ 56.57	— 0.27	+ 56.30
25	8	— 0.087	Gr. 848	4 33 32.40	+ 54.44	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.30	+ 54.84	. . . .	. . . . .
	3	— 0.083	ι Aurigae	4 49 34.89	+ 56.93	+ 0.04	+ 0.02	+ 0.10	+ 57.09	— 0.25	+ 56.84
	7	— 0.112	ε Aurigae	4 53 48.15	+ 56.81	+ 0.04	+ 0.02	+ 0.15	+ 57.01	— 0.02	+ 56.99
	7	— 0.118	α Aurigae	5 8 17.02	+ 56.70	+ 0.03	+ 0.02	+ 0.17	+ 56.92	+ 0.01	+ 56.93
	8	— 0.106	Gr. 966	5 24 31.59	+ 54.71	+ 0.03	+ 0.06	+ 0.27	+ 55.07	. . . .	. . . . .
	7	— 0.108	β Aurigae	5 51 11.12	+ 56.62	+ 0.02	+ 0.02	+ 0.15	+ 56.81	— 0.01	+ 56.80

§ XXXV. *Determinazione del centro di gravità del pendolo.*

Le osservazioni fatte per questo scopo mediante l'apparato ausiliario già descritto nel § XXI a pag. 166 e seg., hanno dato i risultati delle due Tabelle 30ª e 31ª. Da essi deducesi che la differenza delle distanze s_1 ed s_2 dei coltelli dal centro di gravità è stata molto prossimamente la stessa nelle due epoche, cioè in media:

$$s_1 - s_2 = 381^{mm},05$$

e questa deve ritenersi valere per la temperatura media delle epoche stesse cioè per 16°,2. La ragione per la quale i due risultati parziali non differiscono fra loro di quanto importerebbe la dilatazione della lunghezza di ottone $s_1 - s_2$ per 14°,5, che è la differenza fra le temperature medie delle due epoche, sta in questo, che la scala dell'apparato, essendo pure di ottone, varia anch'essa di lunghezza presso a poco nella stessa misura in cui varia la differenza $s_1 - s_2$. Benchè io non abbia fatto ricerche apposite, credo che il vero valore di questa differenza alla temperatura 16°,2 si scosti da quello qui sopra riferito meno certamente di $\frac{1}{2000}$ del suo ammontare cioè meno di $0^{mm},2$.

Si vedrà più tardi (v. Tabella 59ª) che la distanza dei coltelli $s_1 + s_2$ è minore della lunghezza della scala A per circa $0^{mm},02$. Ma la lunghezza di questa scala a 16°,2 è (v. l'equazione (D) della scala A a pag. 180)

$$A_{16,2} = 1000^{mm},42\,,$$

quindi

$$s_1 + s_2 = 1000^{mm},40\,.$$

Pertanto alla stessa temperatura media sarà

$$s_1 = 690^{mm},73$$

$$s_2 = 309^{mm},67\,.$$

Coi valori di $s_1 - s_2$ e di $s_1 + s_2$ qui sopra trovati ottiensi

$$\frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)} = 1{,}313,$$

e si potrà ritenere che l'errore di questo coefficiente sia certamente inferiore a $\frac{1}{2000}$ del suo valore. Tale esattezza, come vedremo, basta esuberantemente allo scopo (v. § XLV).

TABELLA 30.ª

1885 Agosto	Combinazione dei coltelli	Indice B b_2	Indice A a_2	$b_2 - a_2 = s_2 - x$	Indice B b_1	Indice A a_1	$b_1 - a_1 = s_1 - x$	$s_1 - s_2 = D$
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
5	A	170.00	7.59	162.41	549.98	6.58	543.40	380.99
»	»	170.00	7.60	162.40	549.99	6.59	543.40	1.00
6	»	170.00	7.55	162.45	550.00	6.34	543.66	1.21
»	»	170.05	7.40	162.65	550.00	6.20	543.80	1.15
19	A	170.04	7.59	162.45	550.48	7.00	543.48	1.03
»	»	170.25	7.80	162.45	550.48	6.90	543.58	1.13
20	»	170.25	7.80	162.45	550.85	7.46	543.39	0.94
»	»	170.52	8.18	162.34	550.86	7.40	543.46	1.12
21	B	170.52	8.10	162.42	550.25	6.70	543.55	1.13
»	»	170.38	7.90	162.48	550.25	6.80	543.45	0.97
23	»	170.35	7.90	162.45	550.20	6.75	543.45	1.00
»	»	170.55	8.08	162.37	550.20	6.78	543.42	1.05
24	C	170.58	8.02	162.56	550.40	6.97	543.43	0.87
»	»	170.78	8.32	162.46	550.40	6.95	543.45	0.99
25	»	170.78	8.30	162.48	550.20	6.72	543.48	1.00
»	»	170.38	7.90	162.48	550.20	6.78	543.42	0.94
26	D	170.38	7.95	162.43	550.69	7.25	543.44	1.01
»	»	170.65	8.25	162.40	550.69	7.29	543.40	1.00
27	»	170.67	8.23	162.44	550.48	7.03	543.45	1.01
»	»	170.46	8.00	162.46	550.46	6.85	543.61	1.15
			Media	162.452		Media	543.486	381.03

TABELLA 31.ª

1886 Febbraio	Combinazione dei coltelli	Indice B b_2	Indice A a_2	$b_2 - a_2 = s_2 - x$	Indice B b_1	Indice A a_1	$b_1 - a_1 = s_1 - x$	$s_1 - s_2 = D$
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
7	A	170.13	7.51	162.62	550.65	6.79	543.86	381.24
8	A	170.30	7.72	162.58	550.65	7.05	543.60	381.02
9	D	170.31	7.72	162.59	550.30	6.64	543.66	381.07
16	B	170.70	8.09	162.61	550.32	6.68	543.64	381.03
17	B	170.70	8.09	162.61	550.48	6.82	543.66	381.05
18	C	170.34	7.76	162.58	550.48	6.82	543.66	381.08
23	C	170.35	7.78	162.57	550.35	6.70	543.65	381.08
24	D	170.52	7.88	162.64	550.35	6.74	543.61	380.97
			Media	162.60		Media	543.67	381.07

§ XXXVI. *Osservazione dell'amplitudine di oscillazione e determinazione dei parametri della funzione esprimente la legge di sua variazione.*

Nelle osservazioni di agosto 1885 la illuminazione dell'arco graduato è stata ottenuta (come già fu detto) da una lampada elettrica ad incandescenza collocata a breve distanza davanti e un po' più in basso rispetto all'arco medesimo. Mediante uno specchio disposto in modo opportuno, una parte della luce proveniente dalla lampada veniva riflessa verticalmente da sotto in su sulla punta conica che costituisce l'estremità inferiore del pendolo e dalla punta veniva riflessa all' ingiro pressochè orizzontalmente. Attraverso il cannocchiale astronomico *b* (II, 1, 2), situato orizzontalmente all'altezza dell'arco graduato a quattro metri e mezzo di distanza verso nord, passava soltanto la luce riflessa sopra una porzione della superficie conica racchiusa fra due generatrici vicinissime, e perciò la punta conica, dell'apertura di novanta gradi, invece di terminare apparentemente nel vertice di un angolo retto, terminava in quello di un angolo acutissimo luminoso.

Benchè col mezzo di un diaframma disposto opportunamente, avessi cercato d'impedire che il pendolo si riscaldasse per via di raggiamento, mi venne il dubbio tuttavia che la grande vicinanza della lampada potesse occasionare movimenti irregolari nell'aria ambiente, dai quali potesse derivare qualche perturbazione nel moto del pendolo. Onde allontanare il più possibile un pericolo di tal genere, nelle operazioni di *febbraio* collocai la lampada verticalmente sotto l'obbiettivo del cannocchiale, e davanti ad essa collocai una lente di corta distanza focale in luogo siffatto che la

immagine reale, rovescia ed ingrandita del filamento incandescente andasse a formarsi sull'arco graduato, e regolai le cose in modo che si avesse la massima quantità di luce riflessa dall'arco graduato nella direzione del cannocchiale.

Una delle condizioni necessarie per la esatta osservazione dell'amplitudine e del passaggio del pendolo, è che il cannocchiale accoppii un sufficiente ingrandimento a molta chiarezza. Perciò mi sono servito nelle osservazioni di un eccellente cercatore di comete del Merz, di circa 8 centimetri di obbiettivo, applicandovi, in luogo del suo oculare, un oculare positivo capace di dare l'ingrandimento 30.

Nelle osservazioni di agosto, subito dopo di aver posto in movimento il pendolo e subito dopo di averlo arrestato, io notava le indicazioni dei termometri vicini al pendolo stesso. Nelle operazioni di febbraio invece, tali osservazioni termometriche vennero soppresse, con che venne diminuito d'alquanto il lavoro e, quel che più importa, il tempo di mia permanenza in prossimità dello strumento. Ciò m'indussi a fare in seguito all'avere osservato come la temperatura del pendolo nel tempo delle oscillazioni, sia molto prossimamente coincidente colla media aritmetica delle temperature osservate nelle misure di distanza dei coltelli precedente e susseguente le oscillazioni stesse.

Ecco come vennero disposte le osservazioni dell'amplitudine.

In agosto 1885, data al pendolo una deviazione iniziale di circa due gradi, ed osservati i termometri, si osservarono successivamente quattro amplitudini, due positive e due negative alternativamente, notando i quattro tempi corrispondenti. La media delle quattro amplitudini considerate tutte come positive, dà l'amplitudine media registrata nella colonna 3ª delle Tabelle 38ª e 39ª dopo il medio dei quattro tempi osservati registrato nella colonna 2ª. Tale amplitudine è indipendente dall'errore di posizione dello zero dell'arco graduato rispetto alla punta del pendolo quando questo è in equilibrio. L'osservazione dell'amplitudine è stata poi ripetuta altre quattro volte ad intervalli di circa otto minuti, così che per ogni sera e per ogni posizione del pendolo si ebbero cinque valori osservati dell'amplitudine. Dalla Tabella 38ª si deduce che *per cilindro pieno in alto* il medio valore della prima amplitudine osservata in agosto fu di 1°,39′ e il medio valore della quinta ed ultima fu di 34′. Invece a *cilindro pieno in basso*, secondo la Tabella 39ª, i medî dei valori primo e quinto furono rispettivamente 1°,44′ e 58′. Intervallo medio fra la prima e l'ultima amplitudine osservata in ogni serie = 31 minuti.

In febbraio 1886, dopo di aver dato al pendolo una deviazione iniziale di circa *due* gradi e *un terzo*, furono osservate *otto* amplitudini (in luogo di cinque) nel modo stesso seguito in agosto, ma ad intervalli di 10 minuti, così che l'intervallo medio fra l'osservazione della prima e quella della ottava amplitudine fu di 70 minuti. A *cilindro pieno in alto* i valori medî delle amplitudini prima ed ottava sono stati rispettivamente 2°,12′ e 13′ (v. Tabella 41ª, pag. 219), mentre a *cilindro pieno in basso* furono rispettivamente 2°,0′ e 36′ (v. Tabella 40ª, pag. 218).

È già stato detto in altro luogo che, nelle operazioni di febbraio, si dava al pendolo l'amplitudine iniziale voluta mediante l'apparato ausiliario descritto nel § XVII, pag. 80, e raffigurato nella Tav. III, fig. 2.

Le amplitudini osservate in agosto furono trattate in due modi.

1° Ad imitazione di quanto fecero altri sperimentatori (Plantamour, Bruhns, Orff) assunsi come espressione dell'amplitudine α in funzione del tempo t, contato dall' istante della prima amplitudine α_0, la equazione

$$\alpha = \alpha_0 + A\,t + B\,t^2 + C\,t^3 + \ldots,$$

ritenendo per cilindro pieno in alto i quattro primi termini e per cilindro pieno in basso i primi tre (meno in due giorni, nei quali fu pur necessario ritenere quattro termini), così che nel primo caso per determinare i coefficienti occorsero quattro amplitudini e nel secondo ne occorsero tre soltanto. Feci poi concorrere alla determinazione dei coefficienti anche la quarta amplitudine non considerata nel primo caso e le amplitudini seconda e quarta non considerate nel secondo, mediante il metodo dei minimi quadrati. In seguito portai l'origine del tempo all' istante t_0 in cui l'amplitudine era 60′ nel primo caso e 75′ nel secondo e, ponendo $t - t_0 = \tau$, l'unità di misura del tempo essendo eguale a 10^m, dedussi i valori dei coefficienti A′, B′, C′ della equazione

$$\alpha = \alpha' + A'\tau + B'\tau^2 + C'\tau^3$$

esposti nelle Tabelle 32ª e 33ª (1).

Tabella 32.ª

Cilindro pieno in alto. $\alpha' = 60'$.

1885 Agosto	A′	B′	C′
5	— 21′.040	+ 5′.411	— 1′.308
6	21.314	5.432	1.179
19	22.931	6.251	0.637
20	21.921	5.704	1.053
21	19.788	6.347	2.311
23	20.472	6.739	1.782
24	21.967	5.854	1.171
25	21.161	5.660	1.004
26	21.071	5.271	0.818
27	— 21.778	+ 5.210	— 0.698

Tabella 33.ª

Cilindro pieno in basso. $\alpha' = 75'$.

1885 Agosto	A′	B′	C′
5	(— 13′.914)	(+ 6′.789)	(— 3′.065)
6	12.482	2.325	—
19	13.483	1.531	—
20	(27.527)	(10.987)	(— 2.383)
21	13.680	2.158	—
23	13.069	2.316	—
24	13.181	1.948	—
25	13.157	1.981	—
26	13.274	1.527	—
27	— 13.555	+ 1.716	—

Per ogni sera di osservazione, col mezzo degli elementi rispettivi forniti da queste due tabelle, furono calcolate le cinque amplitudini registrate nella colonna 4ª così della Tabella 38ª come della 39ª, corrispondentemente ai tempi della colonna 2ª. Dalle differenze 0 — C, registrate nella colonna 5ª e considerate come accidentali, fra le amplitudini osservate (3ª col.) e le amplitudini calcolate (4ª col.) si ricava la differenza

(1) Veggasi in appendice, al § LIII, il formulario ed un esempio numerico del calcolo applicato ad osservazioni del 27 agosto 1885.

media probabile fra osservazione e calcolo nella ipotesi che α sia espressa per una o per l'altra delle due surriferite equazioni:

$$r = \pm 0.67 \sqrt{\frac{\Sigma (O - C)^2}{50 - 40}} = \pm 0',44 \text{ per cilindro pieno in alto}$$

$$r = \pm 0.67 \sqrt{\frac{\Sigma (O - C)^2}{50 - 32}} = \pm 0',50 \quad \text{„ „ „ in basso.}$$

Attribuendo a ciascuna osservazione lo stesso peso avremo *in media:*

per cilindro pieno in alto

$$\alpha = 60' - (21',344 \pm 0',18)\,\tau + (5',788 \pm 0',11)\,\tau^2 - (1',196 \pm 0',11)\,\tau^3,$$

per cilindro pieno in basso

$$\alpha = 75' - (13',235 \pm 0',09)\,\tau + (1',938 \pm 0',08)\,\tau^2$$

non computando, per quest'ultima posizione del cilindro, le determinazioni del 5 e del 20, che, discostandosi troppo dalle altre, fanno credere all'intervento in quelle sere di qualche causa perturbatrice inavvertita. Fu nel dubbio che la perturbazione potesse provenire in parte dal modo usato nel mettere in movimento il pendolo, che mi decisi nel secondo periodo delle osservazioni ad adottare per tale scopo l'apparato ausiliario già descritto nel § XVII (Tav. III, 2).

Per poter paragonare i risultati qui ottenuti con quelli che il signor colonnello Orff dedusse dal pendolo austriaco, bisogna introdurre nella misura del tempo τ l'unità medesima 3 min. da quell'autore impiegata. Allora, indicando con t il tempo $= \tau$ espresso nella nuova unità, avremo: $\tau = \frac{3t}{10}$ e quindi *per il pendolo italiano*

$$\alpha = 60' - 6',403\,t + 0',5212\,t^2 - 0',03235\,t^3 \text{ per cilindro pieno in alto;}$$

$$\alpha = 75' - 3',970\,t + 0',1744\,t^2 \quad \text{„ „ „ „ basso,}$$

mentre l'Orff, a pag. 68 della sua Memoria citata nel § LI, dà *per il pendolo austriaco:*

$$\alpha = 60' - 5',844\,t + 0',4637\,t^2 - 0',03611\,t^3 \text{ per cilindro pieno in alto;}$$

$$\alpha = 75' - 3',512\,t + 0',1162\,t^2 \quad \text{„ „ „ „ basso.}$$

Per $t = 5$ (15 minuti) si ha:

	pend. ital. a coltelli di agata	pend. austr. a coltelli di acciaio
cilindro pieno in alto	$\alpha - 60' = -28'$	$\alpha - 60' = -22'$
„ „ „ basso	$\alpha - 75' = -14,5$	$\alpha - 75' = -14,7$.

Si vede da qui che, a cilindro pieno in alto, l'amplitudine del pendolo italiano diminuisce più rapidamente che l'amplitudine del pendolo austriaco. A cilindro pieno in basso si ha invece quasi la stessa diminuzione nel medesimo intervallo di un quarto d'ora. Probabilmente la differenza è dovuta alla diversa natura dei coltelli e alla differente massa dei pendoli.

2° Il secondo modo usato nella discussione delle amplitudini è quello stesso da me esposto nella *parte teorica* al § X. Assunsi cioè come espressione analitica dell'amplitudine la terza delle equazioni (67) pag. 88, cioè

$$\alpha = \frac{1}{\nu} \frac{1}{e^{\mu t} - 1},$$

essendo

$$t = \tau + k$$

e τ il tempo contato dall'istante della prima osservazione di amplitudine. Colle tre amplitudini osservate 1ª, 2ª e 5ª di ogni serie, Tabelle 38ª e 39ª, e i tempi corrispondenti (preso per unità di tempo l'intervallo di 10^m) furono calcolate, per ogni sera e per ambidue le posizioni del cilindro pieno, le tre costanti μ, ν, k. Furono poi anche in qualche caso corrette le ora dette costanti in modo che ne venisse meglio rappresentato il complesso delle osservazioni, e si ottennero i risultati delle Tabelle 34ª e 35ª nella seconda delle quali, come nella 33ª, sono chiusi fra parentesi i numeri troppo discordi da quelli degli altri giorni.

Tabella 34.ª

Cilindro pieno in alto.

1885 Agosto	μ	ν	k
5	+ 0.25931	+ 0.00608	+ 4.0702
6	0.22958	0.00902	3.9641
19	0.22555	0.00982	3.9619
20	0.24213	0.00793	4.0410
21	0.25257	0.00690	4.0533
23	0.24902	0.00683	4.0678
24	0.23906	0.00825	4.0521
25	0.22316	0.00947	3.8988
26	0.24838	0.00647	4.0724
27	+ 0.23895	+ 0.00781	+ 4.0084

Tabella 35.ª

Cilindro pieno in basso.

1885 Agosto	μ	ν	k
5	(— 0.18428)	(+ 0.02816)	+ 4.0065
6	(+ 0.03389)	(0.05017)	2.8253
19	+ 0.10000	0.00997	3.9017
20	(+ 0.13437)	(0.01889)	3.5096
21	+ 0.11485	0.00749	4.0780
23	0.08283	0.01435	3.7609
24	0.08780	0.01233	3.8553
25	0.07897	0.01485	3.7467
26	0.10698	0.00805	3.9846
27	+ 0.08279	+ 0.01456	+ 3.6962

Ponendo successivamente $\tau = 0$, $\tau = \tau_1 - \tau_0$, $\tau = \tau_2 - \tau_0$, $\tau = \tau_3 - \tau_0$, $\tau = \tau_4 - \tau_0$ e introducendo nelle equazioni prima e terza delle (67) i valori delle costanti determinati per ogni sera e per ogni posizione del pendolo quali sono dati da queste tabelle, ottenni i valori delle amplitudini registrati nella colonna 6ª delle Tabelle 38ª e 39ª, i quali, sottratti dai corrispondenti numeri della 3ª, danno le differenze O — C della colonna 7ª. Da queste differenze, considerate come accidentali, si deduce, nella maniera indicata per l'altra ipotesi, la differenza probabile fra il valore di α osservato e il valor suo calcolato colle (67), cioè:

$\pm 0',38$ per cilindro pieno in alto
$\pm 0',44$ " " " " basso.

Confrontando queste differenze probabili rispettivamente con quelle ottenute nella pagina 212 dalla prima ipotesi, se ne trae questa conseguenza che le due ipotesi hanno probabilità poco diversa, ma che tuttavia la differenza è tutta a vantaggio della seconda ipotesi.

Facendo la media aritmetica dei valori delle costanti ottenute separatamente per le due posizioni del pendolo, abbiamo dalle *osservazioni di agosto 1885*:

per cilindro pieno in alto

$$\mu = + 0{,}24077 \pm 0{,}00260 \quad , \quad \nu = + 0{,}00786 \pm 0{,}00028 \, ,$$

per cilindro pieno in basso

$$\mu = + 0{,}09346 \pm 0{,}00280 \quad , \quad \nu = + 0{,}01167 \pm 0{,}00080 \, .$$

Nella discussione delle osservazioni di febbraio 1886, abbandonai il primo modo di rappresentazione dell'amplitudine e mi ridussi al solo secondo metodo impiegando per la determinazione delle costanti le osservazioni *prima*, *terza* e *settima* di ogni serie di otto amplitudini. Veggansi le Tabelle 40ª e 41ª, colonne 2ª e 3ª. Ottenni [1]:

Tabella 36.ª

Cilindro pieno in alto.

1886 Febbraio	μ	ν	k
7	0.23989	0.00928	2.4956
8	0.23412	0.00966	2.4682
9	0.23520	0.00954	2.4903
16	0.23960	0.00910	2.6903
17	0.24616	0.00855	2.5947
18	0.24563	0.00806	2.6533
23	0.24487	0.00875	2.5136
24	0.22657	0.01026	2.3476

Tabella 37.ª

Cilindro pieno in basso.

1886 Febbraio	μ	ν	k
7	0.10992	0.00887	6.4393
8	0.10772	0.00916	6.1375
9	0.10716	0.00905	6.3088
16	0.11568	0.00732	6.3740
17	0.11585	0.00746	6.0883
18	0.11997	0.00651	6.5785
23	0.10970	0.00850	5.9134
24	0.10870	0.00880	5.7875

Senza fermarmi a correggere i valori di μ, ν, k ottenuti con tre osservazioni, mediante le altre cinque osservazioni della medesima serie (il che avrei potuto fare risolvendo col metodo dei minimi quadrati le otto equazioni di condizione della

[1] Veggasi in appendice, al § LII, il formulario e un esempio numerico del processo di calcolo applicato alle osservazioni del 23 febbraio, *cilindro pieno in alto*.

forma (85) v. pag. 92) calcolai colle formole (67) per ogni sera e per ogni posizione del pendolo le amplitudini della 4ª colonna nelle Tabelle 40ª e 41ª corrispondentemente ai tempi registrati nella colonna 2ª. Rimangono le differenze O — C dedotte dal sottrarre i numeri della 4ª colonna dalle amplitudini osservate e registrate nella 3ª. Si ottiene così il valor probabile della differenza O — C,

$\pm$ 0′,34 per cilindro pieno in alto,
$\pm$ 0′,38 " " " " basso.

Questi due valori, pur essendo alquanto minori, sono dell'ordine stesso di quelli ottenuti per le determinazioni di agosto nella medesima ipotesi. Ed è da notare che qui i valori di μ, ν, k dipendono esclusivamente da tre sole delle otto osservazioni.

Facendo le medie aritmetiche dei valori di μ e ν, otteniamo dalle *osservazioni di febbraio 1886*

per cilindro pieno in alto

$$\mu = +\,0{,}23900 \pm 0{,}00160 \quad ; \quad \nu = +\,0{,}00915 \pm 0{,}00017\,,$$

per cilindro pieno in basso

$$\mu = +\,0{,}11184 \pm 0{,}00110 \quad ; \quad \nu = +\,0{,}00821 \pm 0{,}00025\,.$$

Confrontando questi valori con quelli ottenuti dalle amplitudini di agosto, si trova una discreta concordanza. Piuttosto però di combinare questi ultimi coi precedenti in base ai pesi che risultano dagli errori probabili, reputo preferibile attribuire addirittura a questi ultimi risultati peso doppio di quello dei primi, a motivo delle migliori condizioni di osservazione e della maggiore distanza in tempo delle equazioni che servono a determinare le costanti. Combinandoli dunque in tale modo si avrebbe *dal complesso di tutte le osservazioni:*

per cilindro pieno in alto;

$$\mu_a = +\,0{,}23959 \quad ; \quad \nu_a = +\,0{,}00872$$

per cilindro pieno in basso;

$$\mu_b = +\,0{,}10571 \quad ; \quad \nu_b = +\,0{,}00936$$

d'onde si vede che, mentre i valori di μ sono fra loro nel rapporto 2,37, che è presso a poco eguale a quello (2,23) che passa fra le distanze s_1 ed s_2 dei coltelli di appoggio dal centro di gravità del pendolo (v. § XXXV), i valori di ν sono approssimativamente fra loro eguali, conforme all'asserzione dell'Oppolzer a pag. 8 (720) della sua nota [1] (si deve però ricordare che la costante ν è indicata da quest'autore con β). Devesi in fine avvertire che i valori di μ e k dati di sopra corrispondono ad una unità di tempo eguale a *dieci* minuti, mentre il valore di ν corrisponde ad una unità angolare eguale ad *un* minuto d'arco.

[1] *Beitrag zur Ermittlung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen*, von Prof. Th. v. Oppolzer etc. (Aus den LXXXVI Bande der Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften. II Abtheilung. Octobers-Heft. Jahrgang 1882).

Tabella 38.ª

Cilindro pieno in alto.

Agosto 1885	Tempo dell'osservazione	Massima elongazione osservata	Massima elongazione calcolata nella 1ª ipotesi	O — C	Massima elongazione calcolata nella 2ª ipotesi	O — C
1	2	3	4	5	6	7
	h m s	′	′	′	′	′
5	21 40 19.2	91.2	91.2	0.0	90.9	+ 0.3
	21 44 23.2	77.2	77.4	— 0.2	77.6	— 0 4
	21 52 51.5	57.1	56.8	+ 0.3	57.0	+ 0.1
	22 0 23.2	44.0	44.3	— 0.3	44.1	— 0.1
	22 5 5.2	38.0	37.8	+ 0.2	37.9	+ 0.1
6	20 41 45.8	100.3	100.3	0.0	100.3	0.0
	20 47 2.5	80.7	80.9	— 0.2	80.6	+ 0 1
	20 53 47.3	62.3	62.6	— 0.3	62.5	— 0.2
	21 1 44.0	47.9	47.6	+ 0.3	47.6	+ 0.3
	21 7 24.0	39.5	39.6	— 0 1	39.7	— 0.2
19	22 26 59.8	108.6	108.6	0.0	108.6	0.0
	22 34 25.5	79.2	79.8	— 0.6	78.9	+ 0.3
	22 41 7.2	61.4	61.0	+ 0.4	61.2	+ 0.2
	22 46 52.5	49.4	49.5	— 0.1	50.1	— 0.7
	22 54 18.2	39.6	39.6	0.0	39.4	+ 0.2
20	21 18 42.2	103.6	103.6	0.0	103.6	0.0
	21 25 13.5	79.2	79.3	— 0.1	79.0	+ 0.2
	21 31 45.8	61.8	61.6	+ 0.2	61.8	0.0
	21 40 7.5	46.1	46.2	— 0.1	46.3	— 0.2
	21 46 56.0	37.2	37.2	0.0	37.2	0.0
21	21 59 31.5	95.8	95.8	0.0	95.5	+ 0.3
	22 6 34.2	71.5	71.0	+ 0.5	72.2	— 0.7
	22 11 52.0	59.6	58.9	+ 0.7	59.5	+ 0.1
	22 19 53.5	45.2	46.2	— 1.1	45.2	+ 0.1
	22 26 58.5	36.0	35.6	+ 0.4	35.9	+ 0.1
23	21 19 33.4	97.6	97.6	0.0	97.2	+ 0.4
	21 27 31.0	69.4	69.6	— 0.2	71.2	— 1.8
	21 36 59.7	51.2	50.6	+ 0.6	51.0	+ 0.2
	21 44 5.2	41.0	41.5	— 0.5	40.5	+ 0.5
	21 51 3.2	32.7	32.6	+ 0.1	32.6	+ 0.1
24	22 27 20.8	109.5	109.5	0.0	109.5	0.0
	22 34 36.5	80.5	80.8	— 0.3	80.7	— 0.2
	22 42 6.8	60.9	60.7	+ 0.2	60.9	0.0
	22 50 55.2	45.3	45.4	— 0.1	45.1	+ 0.2
	23 1 20.8	32.6	32.6	0.0	32.6	0.0
25	21 34 51.8	92.6	92.6	0.0	92 6	0.0
	21 42 52.8	67.6	67.6	0.0	67.7	— 0.1
	21 50 59.3	51.0	51.0	0.0	51.1	— 0.1
	22 1 10.2	37.5	37.6	— 0.1	37.1	+ 0.4
	22 8 29.8	29.8	29.8	0.0	29.9	— 0.1
26	22 3 17.3	94.6	94.6	0.0	94.6	0.0
	22 11 20.5	69.1	69.4	— 0.3	69.7	— 0.6
	22 22 4.8	48.3	48.0	+ 0.3	48.3	0.0
	22 31 58.3	35.6	35.8	— 0.2	35.4	+ 0.2
	22 40 16.8	27.6	27.6	0.0	27.6	0.0
27	22 6 0.2	96.9	96.9	0.0	96.6	+ 0.3
	22 14 9.0	70.4	70.6	— 0.2	70.8	— 0.4
	22 23 29.2	50.7	50.4	+ 0.3	50.6	+ 0.1
	22 35 25.5	34.6	34.7	— 0.1	34 6	0.0
	22 43 16.0	27.5	27.5	0.0	27.5	0.0

TABELLA 39.ª

Cilindro pieno in basso.

Agosto 1885	Tempo dell'osservazione	Massima elongazione osservata	Massima elongazione calcolata nella 1ª ipotesi	O — C	Massima elongazione calcolata nella 2ª ipotesi	O — C
1	2	3	4	5	6	7
	h m s	′	′	′	′	′
5	20 53 22.0	112.2	112.2	0.0	112.5	— 0.3
	20 57 49 5	92.8	93.2	— 0.4	91.3	+ 1.5
	21 5 20.2	78.2	77.5	+ 0.7	78.3	— 0.1
	21 13 51.0	68.5	69.2	— 0.7	68.9	— 0.4
	21 18 21.0	60.3	60.0	+ 0.3	60.4	— 0.1
6	21 28 41.5	113.0	113.0	0.0	113.2	— 0.2
	21 34 30.0	96.6	96.1	+ 0.5	95.7	+ 0.9
	21 41 47.8	79.1	79.4	— 0.3	79.2	— 0.1
	21 48 53.8	69.7	69.7	0.0	70.0	— 0.3
	21 54 40.0	61.4	61.3	+ 0.1	61.5	— 0.1
19	21 31 38.8	114.1	114.1	0.0	114.3	— 0.2
	21 40 44.8	96.1	96.1	0.0	95.8	+ 0.3
	21 48 9.8	81.6	81.7	— 0.1	81.7	— 0.1
	21 55 12.5	67.2	67.0	+ 0.2	67.2	0.0
	22 2 31.5	59 5	59.5	0.0	59.6	— 0.1
20	22 10 46.0	94.8	94.8	0.0	94.8	0.0
	22 18 7.0	82.1	81.5	+ 0.6	83.8	— 1.7
	22 25 5.8	71.9	70.9	+ 1.0	71.9	0.0
	22 32 38.3	60.2	61.8	— 1.6	60.7	— 0.5
	22 39 28.8	52.4	51.9	+ 0.5	52.4	0.0
21	21 11 38.5	97.6	97.6	0.0	97.3	+ 0.3
	21 19 2.5	83.4	84.1	— 0.7	84.0	— 0.6
	21 26 44.0	72.1	71.7	+ 0.4	71.9	+ 0.2
	21 32 51.0	62.1	61.9	+ 0.2	62.2	— 0.1
	21 40 0.0	54.3	54.5	— 0.2	54.2	+ 0.1
23	22 7 20.2	100.1	100.1	0.0	100.1	0.0
	22 16 25.2	85.8	86.5	— 0.7	86.2	— 0.4
	22 25 56.2	76.6	76.4	+ 0.2	76.6	0.0
	22 33 55.5	64.0	63.7	+ 0.3	63.8	+ 0.2
	22 41 44.5	59.9	59.7	+ 0.2	59.9	0.0
24	21 31 43.5	109.4	109.4	0.0	109.6	— 0.2
	21 39 44.8	98.0	98.3	— 0.3	97.7	+ 0.3
	21 50 29.0	84.5	84.4	+ 0.1	84.6	— 0.1
	21 58 11.0	74.8	75.2	— 0.4	74.7	+ 0.1
	22 5 59.8	68.5	68.7	— 0.2	68.6	— 0.1
25	22 32 2.5	97.5	97.5	0.0	97.7	— 0.2
	22 40 46.5	82.5	82.8	— 0.3	82.3	+ 0.2
	22 49 30.0	72.0	72.2	— 0.2	72.1	— 0.1
	23 1 27.5	64.1	63.5	+ 0.6	63.9	+ 0.2
	23 9 9.5	56.9	57.2	— 0.3	57.0	— 0.1
26	21 6 26.5	90.6	90.6	0.0	90.6	0.0
	21 14 18.0	69.0	69.1	— 0.1	69.0	0.0
	21 21 57.8	57.5	57.3	+ 0.2	57.5	0.0
	21 33 32.3	46.5	45.6	+ 0.9	45.8	+ 0.7
	21 41 44.8	39.8	40.4	— 0.6	39.8	0.0
27	21 8 56 8	105.8	105.8	0.0	105.8	+ 0.1
	21 16 48.2	90.5	91.3	— 0.8	91.1	— 0.6
	21 25 25.0	79.0	78.8	+ 0.2	78.9	+ 0.1
	21 34 41.8	70.6	70.1	+ 0.5	70.4	+ 0.2
	21 43 20.2	62.6	62.9	— 0.3	62.5	+ 0.1

TABELLA 40.ª

Cilindro pieno in basso.

1886 Febbraio	Tempo osservato della massima elongazione	Massima elongazione osservata	Massima elongazione calcolata	O — C	1886 Febbraio	Tempo osservato della massima elongazione	Massima elongazione osservata	Massima elongazione calcolata	O — C
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	h m s	′	′			h m s	′	′	
7	9 7 55.0	109′.5	109′.5	—	17	9 35 25.5	130′.8	130′.8	—
	9 19 32.8	86.7	86.3	+ 0.4		9 45 33.4	104.4	105.0	— 0.6
	9 28 15.3	73.3	73.3	—		9 55 8.1	86.8	86.8	—
	9 38 1.7	62.1	61.8	+ 0.3		10 4 48.0	72.7	72.6	+ 0.1
	9 50 45.4	50.3	50.1	+ 0.2		10 15 23.0	60.8	60.5	+ 0.3
	9 59 47.0	43.4	43.5	— 0.1		10 25 18.8	51.7	51.4	+ 0.3
	10 10 9.0	37.3	37.3	—		10 35 11.1	44.0	44.0	—
	10 20 55.6	32.3	32.0	+ 0.3		10 45 4.7	38.3	37.9	+ 0.4
8	6 34 51.2	116.5	116.5	—	18	7 0 0.3	127.8	127.8	—
	6 45 22.1	93.4	93.4	0.0		7 10 40.4	101.8	102.2	— 0.4
	6 53 58.6	79.1	79.1	—		7 19 44.6	85.8	85.8	—
	7 4 8.4	66.1	65.9	+ 0.2		7 29 42.5	71.5	71.6	— 0.1
	7 16 11.2	54.0	54.0	0.0		7 39 58.2	60.0	60.1	— 0.1
	7 24 50.5	47.3	47.1	+ 0.2		7 49 57.3	51.1	51.1	0.0
	7 34 29.3	40.7	40.7	—		8 0 0.3	43.6	43.6	—
	7 46 31.4	34.4	34.2	0.0		8 9 51.7	38.0	37.6	+ 0.4
9	6 33 31.6	114.4	114.4	—	23	9 19 17.8	128.9	128.9	—
	6 43 44.9	91.8	92.6	— 0.8		9 29 6.3	103.3	104.2	— 0.9
	6 53 4.4	77.6	77.6	—		9 39 19.1	85.1	85.1	—
	7 3 48.0	64.2	64.3	— 0.1		9 48 59.3	70.8	71.3	— 0.5
	7 13 48.8	53.8	54.5	— 0.7		9 59 10.4	60.0	60 0	0.0
	7 24 12.6	46.4	46.4	0.0		10 8 57.2	50.9	51.2	— 0.3
	7 33 56.1	40.1	40.1	—		10 18 57.2	43.9	43.9	—
	7 45 8.7	34.5	34.2	+ 0.3		10 29 6.4	37.5	37.8	— 0.3
16	9 18 15.3	125.3	125.3	—	24	10 22 39.5	129.7	129.7	—
	9 30 1.6	97.2	97.5	— 0.3		10 32 40.9	104.0	104.1	— 0.1
	9 39 36.9	81.2	81.2	—		10 42 51.6	85.0	85.0	—
	9 50 0.5	67.9	67.6	+ 0.3		10 52 52.0	70.9	70.8	+ 0.1
	10 0 11.7	57.5	57.1	+ 0.4		11 2 37.5	59.7	59.9	— 0.2
	10 9 48.1	49.2	49.2	0.0		11 13 3.6	50.7	50.6	+ 0.1
	10 19 19.8	42.1	42.1	—		11 22 55.3	43.5	43.5	—
	10 31 16.7	35.8	36.1	— 0.3		11 33 58.9	37.4	37.0	+ 0.4

TABELLA 41.ª

Cilindro pieno in alto.

1886 Febbraio	Tempo osservato della massima elongazione	Massima elongazione osservata	Massima elongazione calcolata	O — C	1886 Febbraio	Tempo osservato della massima elongazione	Massima elongazione osservata	Massima elongazione calcolata	O — C
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
7	h m s 6 49 25.1	131′.5	131′.5	—	17	h m s 7 20 29.6	130′.8	130′.8	—
	6 59 27.4	82.3	81.9	+ 0.4		7 30 7.7	83.1	83.5	— 0.4
	7 7 6.5	60.5	60.5	—		7 40 9.5	56.4	56.4	—
	7 12 51.7	49.1	49.1	0.0		7 49 54.0	40.2	40.2	0.0
	7 19 40.3	39.0	39.0	0.0		8 0 38.6	28.9	28.6	+ 0.3
	7 30 44.4	27.6	27.6	0.0		8 10 15.1	21.8	21.5	+ 0.3
	7 40 44.3	20.6	20.6	—		8 20 7.0	16.2	16.2	—
	7 53 37.3	14.3	14.4	— 0.1		8 30 22.5	12.9	12.2	+ 0.7
8	9 7 12.8	132.4	132.4	—	18	9 24 3.0	135.1	135.1	—
	9 16 52.4	83.9	83.9	0.0		9 34 4.1	84.6	85.4	— 0.8
	9 26 57.7	56.6	56.6	—		9 43 51.9	58.5	58.5	—
	9 36 45.5	40.3	40.5	— 0.2		9 53 56.7	40.9	41.4	— 0.5
	9 47 32.6	29.0	28.3	+ 0.7		10 3 50.5	30.0	30.3	— 0.3
	9 56 22.1	22.3	22.4	— 0.1		10 13 49.5	22.2	22.5	— 0.3
	10 6 38.4	16.8	16.8	—		10 24 2.9	16.9	16.9	—
	10 14 57.4	13.0	13.4	— 0.4		10 33 58.9	13.2	12.8	+ 0.4
9	8 53 27.5	131.7	131.7	—	23	6 58 40.4	134.3	134.3	—
	9 2 59.4	83.8	84.0	— 0.2		7 9 52.5	79.8	79.6	+ 0.2
	9 13 13.5	56.4	56.4	—		7 19 26.3	55.0	55.0	—
	9 23 13.7	39.6	40.1	— 0.5		7 29 23.3	38.9	39.0	— 0.1
	9 33 15.1	29.1	29.3	— 0.2		7 39 27.2	28.4	28.4	0.0
	9 43 51.1	21.3	21.5	— 0.2		7 48 57.7	21.6	21.4	+ 0.2
	9 53 10.7	16.6	16.6	—		7 59 10.0	16.0	16.0	—
	10 3 26.2	12.5	12.6	— 0.1		8 8 41.3	13.0	12.3	+ 0.7
16	6 46 37.8	121.4	121.4	—	24	8 4 44.1	138.4	138.4	—
	6 57 30.4	75.1	74.4	+ 0.7		8 13 43.9	89.9	89.5	+ 0.4
	7 7 4.3	52.1	52.1	—		8 23 50.0	59.9	59.9	—
	7 16 57.8	37.3	37.4	— 0.1		8 33 54.3	42.5	42.4	+ 0.1
	7 28 4.9	26.2	26.5	— 0.3		8 43 56.1	30.4	31.0	— 0.6
	7 37 31.9	20.0	20.2	— 0.2		8 53 46.9	22.9	23.3	— 0.4
	7 47 13.0	15.4	15.4	—		9 3 41.7	17.2	17.8	— 0.6
	7 57 37.7	11.8	11.6	+ 0.2		9 13 53.2	13.6	13.6	—

§. XXXVII. *Osservazione dei passaggi del pendolo per lo zero dell'arco graduato e determinazione della durata media di una oscillazione.*

In agosto 1885, fra le osservazioni dell'amplitudine 1ª e 2ª di ogni serie, e fra la 4ª e la 5ª, si osservavano e registravano sul cronografo i tempi di alcuni passaggi successivi, e pertanto alternativamente diretti ed inversi, del pendolo davanti allo *zero* dell'arco graduato. Nelle notti del *5* e del *6* si osservò una sola serie iniziale di passaggi ed una sola serie finale. Nelle altre sere invece si osservarono tre serie in principio, cioè fra la prima e la seconda osservazione di amplitudine, e tre serie in fine fra la 4ª e la 5ª osservazione, staccando una serie dall'altra con un breve intervallo di riposo e di nuovo accomodamento dell'occhio, e ciò si fece allo scopo di ottenere per ogni posizione del pendolo tre valori indipendenti della durata di una oscillazione e potere, dall'accordo loro maggiore o minore, ottenere un criterio circa la loro precisione. Si osserva tanto il passaggio diretto quanto l'inverso poichè, quand'anche lo *zero* dell'arco graduato non si trovi nel luogo preciso dove si ferma la punta del pendolo, allorchè questo è nella sua posizione di equilibrio, il medio aritmetico dei tempi di due successivi passaggi in senso inverso della punta per lo zero dell'arco graduato è quello stesso che si otterrebbe qualora lo zero fosse esattamente nel luogo di equilibrio della punta, vale a dire coincide col medio dei tempi dei corrispondenti passaggi del centro di gravità del pendolo pel piano verticale dello spigolo del coltello di appoggio.

Fra il medio di due passaggi successivi e il medio di altri due passaggi analoghi osservati a distanza dai primi, mentre il pendolo si conserva in movimento, intercede un numero intero di oscillazioni, la durata complessiva delle quali sarà determinata con precisione dipendente da quella con cui sono determinati i tempi iniziale e finale fra i quali sono comprese quelle oscillazioni. Per ottenere di questi due tempi una determinazione abbastanza esatta, si è fatto risultare ognuno di essi dal medio aritmetico dei tempi di sessanta passaggi successivi (e si prese il numero sessanta per comprendervi tutte le ineguaglianze dell'interruttore elettrico che hanno per periodo la durata di un minuto) considerando tale medio aritmetico siccome coincidente coll'istante di mezzo dei passaggi *trentesimo* e *trentunesimo* della serie. Perciò ogni serie osservata era sempre composta di circa settanta passaggi successivi, ma all'atto dello spoglio cronografico alcuni passaggi in principio ed altri in fine della serie furono scartati per ridurre il numero a sessanta.

Prima di proseguire è necessario dimostrare che l'errore, il quale si commette considerando il medio aritmetico di sessanta passaggi successivi come coincidente col medio dei passaggi *trentesimo* e *trentunesimo*, è troppo al dissotto dei limiti degli errori accidentali di osservazione, perchè possa tornare utile il tenerne conto.

Sieno

$$t_{-29.5}\ ,\ t_{-28.5}\ ,\ \ldots\ ,\ t_{-1.5}\ ,\ t_{-0.5}$$

i tempi cronografici ai quali furono notati i primi trenta passaggi

$$t_{0.5}\ ,\ t_{1.5}\ ,\ \ldots\ ,\ t_{28.5}\ ,\ t_{29.5}$$

i tempi cronografici dei secondi trenta passaggi;

$$X_{-29}\ ,\ X_{-28}\ ,\ \ldots\ ,\ X_{-2}\ ,\ X_{-1}\ ,\ X\ ,\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ \ldots\ ,\ X_{28}\ ,\ X_{29}\ ,$$

le riduzioni all'arco cicloidale degli intervalli di tempo compresi fra due passaggi successivi; T la durata dell'oscillazione ridotta all'arco cicloidale; τ il medio aritmetico dei passaggi *trentesimo* e *trentunesimo* cioè l'istante di mezzo fra essi. Avremo le sessanta equazioni

$$\left.\begin{array}{l} t_{-28.5}-t_{-29.5}=T+X_{-29} \\ t_{-27.5}-t_{-28.5}=T+X_{-28} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{-0.5}-t_{-1.5}=T+X_{-1} \\ \tau-t_{-0.5}=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}X \\ t_{0.5}-\tau=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}X \\ t_{1.5}-t_{0.5}=T+X_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{28.5}-t_{27.5}=T+X_{28} \\ t_{29.5}-t_{28.5}=T+X_{29}\,. \end{array}\right\}\ (*)$$

Essendo la riduzione all'arco cicloidale una quantità che varia col tempo in modo continuo, possiamo scrivere:

$$X_{-29}=X-(29T)\frac{dX}{dt}+\frac{1}{2}(29T)^2\frac{d^2X}{dt^2}$$
$$X_{29}=X+(29T)\frac{dX}{dt}+\frac{1}{2}(29T)^2\frac{d^2X}{dt^2}\,.$$

Il prodotto 29T esprime molto prossimamente in secondi l'intervallo fra il tempo nel quale la riduzione all'arco cicloidale è X e il tempo nel quale essa è X_{-29} o X_{29}, poichè 29 è il numero delle oscillazioni intere comprese in detto intervallo e T è la durata approssimativa di una qualunque di tali oscillazioni. S'intende che $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{d^2X}{dt^2}$ sono quozienti differenziali relativi all'unità secondo. Dalle due equazioni qui in ultimo scritte, abbiamo:

$$X_{-29}-X_{29}=-2T\frac{dX}{dt}29$$

e analogamente per le combinazioni analoghe. Pertanto dalle equazioni (*) risultano immediatamente colla sottrazione le seguenti:

$$t_{-28.5}+t_{28.5}-(t_{-29.5}+t_{29.5})=-2T\frac{dX}{dt}29$$
$$t_{-27.5}+t_{27.5}-(t_{-28.5}+t_{28.5})=-2T\frac{dX}{dt}28$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{-0.5}+t_{0.5}-(t_{-1.5}+t_{1.5})=-2T\frac{dX}{dt}$$
$$2\tau-(t_{-0.5}+t_{0.5})=0\,.$$

Queste equazioni sono in numero di *trenta*, e sommandole prima tutte, poi tutte ad eccezione della prima, poi facendone la somma senza le due prime e così via, abbiamo le altre trenta equazioni:

$$2\tau = t_{-29.5} + t_{29.5} - \mathrm{T}\frac{d\mathrm{X}}{dt}\,30.29$$

$$2\tau = t_{-28.5} + t_{28.5} - \mathrm{T}\frac{d\mathrm{X}}{dt}\,29.28$$

. . . .

$$2\tau = t_{-1.5} + t_{1.5} - \mathrm{T}\frac{d\mathrm{X}}{dt}\,2.1$$

$$2\tau = t_{-0.5} + t_{0.5}$$

e queste a lor volta sommate insieme danno

$$60\tau = \sum_{-29.5}^{29.5} t_r - 2\mathrm{T}\frac{d\mathrm{X}}{dt}(1^2 + 3^2 + 5^2 \ldots + 27^2 + 29^2),$$

d'onde

$$\tau = \frac{1}{60}\sum_{-29.5}^{29.5} t_r - \frac{899}{6}\mathrm{T}\frac{d\mathrm{X}}{dt}.$$

Essendo poi (v. eq.^{e} (13)$'$ a pag. 60, posto T invece di T_0)

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{T}}{16\,\mathrm{R}_1^2}\alpha^2,$$

per cui

$$\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 2\frac{d\alpha}{\alpha}$$

ed essendo, per quanto si è supposto (v. equazione (65) della parte teorica),

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\mu(1 + \nu\,\alpha)\,dt,$$

avremo

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = -2\mu\,(1 + \nu\,\alpha)\,\mathrm{X}.$$

Secondo i risultati già riferiti, supposto α espresso in minuti primi, è $\nu = \frac{1}{100}$ tanto per cilindro pieno in alto, quanto per cilindro pieno in basso, e prendendo per unità di misura del tempo $10^{\mathrm{m}} = 600^{\mathrm{s}}$, si ha circa $\mu = \frac{1}{4}$ per cilindro pieno in alto. Per l'unità di tempo eguale ad un secondo sarà

$$\mu = \frac{1}{2400}$$

e pertanto:

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = -\frac{1}{1200}\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)\mathrm{X}.$$

Per esagerare, poniamo $\alpha = 2^\circ.20' = 140'$ ed allora, dalla tavola ausiliaria posta in fine, otterremo $X = \frac{1042}{10^7}$, per cui (posto pure $T = 1^s$ circa) sarà

$$\frac{899}{6} T \frac{dX}{dt} = -0^s,000\ 0312,$$

così che la correzione positiva da apportare al medio dei tempi dei sessanta passaggi, per avere il tempo di mezzo fra i passaggi *trentesimo* e *trentunesimo*, è perfettamente trascurabile.

I medî delle singole serie di passaggi osservati nell'agosto 1885 sono registrati nella Tabella 44ª colonne 3ª e 4ª. Il tempo della colonna 3ª sottratto dal tempo corrispondente della 4ª dà il numero dei secondi e frazioni registrato nella colonna 5ª, il quale rappresenta la durata in secondi cronografici del numero di oscillazioni registrato nella colonna 6ª. Le colonne 7ª e 8ª non hanno bisogno di altra spiegazione oltre quella che si legge in capo alle stesse. Il medio dei numeri della 6ª colonna è 1448 e rappresenta il medio numero di oscillazioni osservate in ogni posizione del pendolo. Esso corrisponde ad un intervallo di tempo di circa 24 minuti.

Nel febbraio del 1886, invece di osservare in ogni posizione del pendolo due gruppi di tre serie di 60 passaggi utili ciascuna (come fu fatto in agosto a partire dalla sera del 19) si osservarono *tre* gruppi pure di tre serie ciascuno. Il primo di tali gruppi fu osservato fra la prima e la seconda amplitudine, il secondo fra le amplitudini 4ª e 5ª e il terzo fra la 7ª e la 8ª amplitudine. I medî dei tempi delle singole serie sono registrati rispettivamente, gruppo per gruppo, nelle colonne 3ª, 4ª e 5ª della Tabella 45ª, mentre nella colonna 3ª della Tabella 46ª sono registrate le differenze fra i medî del secondo gruppo e quelli del primo e nella colonna 7ª della Tabella medesima, sono date le differenze fra i medî del terzo e quelli del secondo gruppo. Nelle colonne 4ª e 8ª della Tabella stessa sono poi dati i numeri di oscillazioni del pendolo a reversione compiute nei rispettivi tempi indicati dalle colonne 3ª e 7ª. Le colonne 5ª e 6ª, 9ª e 10ª non hanno bisogno di spiegazione. Il medio dei numeri delle colonne 4ª e 8ª è 1785 e corrisponde ad un intervallo di circa mezz'ora.

§ XXXVIII. *Riduzione della durata media di una oscillazione alla temperatura media delle osservazioni, e all'unità di tempo secondo siderale.*

L'influenza della temperatura si esercita indirettamente sulla durata di oscillazione alterando la distanza dei coltelli. Essendo l la distanza dei coltelli, T la durata di oscillazione così intorno all'uno come intorno all'altro coltello, ed avendosi

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

si ha anche

$$\Delta T = \tfrac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} T.$$

TABELLA 42.ª

1885 Agosto	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Media indicazione dei termometri n. 2, n. 3 al principio delle oscillazioni	alla fine delle oscillazioni	media	Differenza colla lettura media termom. 24°.10	Riduzione della durata di una oscillazione alla temperat. media
1	2	3	4	5	6	7
5	A *a i*	23°.91	23°.91	23°.91	+ 0°.19	+ 17
»	A *a s*	24.10	23.95	24.03	+ 0.07	+ 6
6	A *p s*	24.10	24.13	24.12	— 0.02	— 2
»	A *p i*	24.08	24.05	24.06	+ 0.04	+ 4
19	A *p i*	24.18	24.08	24.13	— 0.03	— 3
»	A *p s*	24.15	24.08	24.12	— 0.02	— 2
20	A *a s*	24.00	24.03	24.01	+ 0.09	+ 8
»	A *a i*	24.05	24.01	24.03	+ 0.07	+ 6
21	B *a i*	24.07	24.11	24.09	+ 0.01	+ 1
»	B *a s*	24.15	24.17	24.16	— 0.06	— 5
23	B *p s*	24.00	24.02	24.01	+ 0.09	+ 8
»	B *p i*	24.04	24.07	24.05	+ 0.05	+ 4
24	C *a i*	24.17	24.13	24.15	— 0.05	— 4
»	C *a s*	24.21	24.18	24.20	— 0.10	— 9
25	C *p s*	24.14	24.14	24.14	— 0.04	— 4
»	C *p i*	24.20	24.18	24.19	— 0.09	— 8
26	D *a i*	24.12	24.10	24.11	— 0.01	— 1
»	D *a s*	24.15	24.10	24.13	— 0.03	— 3
27	D *p i*	24.10	24.18	24.14	— 0.04	— 3
»	D *p s*	24.22	24.20	24.21	— 0.11	— 10
	Medî	24.107	24.086	24.097		

Media diminuzione di temperatura durante le oscillazioni . . . . 0°.021.

dove ΔT indica la variazione della durata T per una piccola variazione Δl nella lunghezza. Posto $l = 1^m$, $T = 1^s$ circa, e supposto il coefficiente di dilatazione del pendolo $= 0{,}000\ 018$, abbiamo

$$\Delta T = 0^s{,}000\ 0090\ (t_m - t),$$

dove con $t_m - t$ s'indica la variazione di temperatura cui è dovuta la variazione Δl nella lunghezza del pendolo.

Nelle osservazioni di agosto 1885 i termometri n. 2 e n. 3, esplorati poco prima della osservazione delle amplitudini e immediatamente dopo le stesse, hanno dato le indicazioni medie registrate nelle colonne 3 e 4 della Tabella 42ª. La media di tutte tali indicazioni è 24°,10, la quale differisce di un solo centesimo dalla media indicazione dei termometri medesimi data ai tempi dei confronti fra la lunghezza della scala e la distanza dei coltelli (v. Tabella 8ª, linea 1ª, colonna 3).

TABELLA 43.ª

1886 Febbraio	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Media indicazione dei termometri n. 2, n. 3			Differenza colla media lettura termom. 9°.51	Riduzione della durata di oscillazione alla temperat. media
		prima delle oscillazioni	dopo le oscillazioni	media		
1	2	3	4	5	6	7
7	A *a s*	9.38	9.72	9.55	— 0.04	— 4
»	A *a i*	9.63	9.75	9.69	— 0.18	— 16
8	A *p i*	9.31	9.64	9.48	+ 0.03	+ 3
»	A *p s*	9.56	9.65	9.60	— 0.09	— 8
9	D *a i*	9.32	9.61	9.47	+ 0.04	+ 4
»	D *a s*	9.56	9.65	9.60	— 0.09	— 8
16	B *a s*	9.22	9.46	9.34	+ 0.17	+ 16
»	B *a i*	9.37	9.45	9.41	+ 0.10	+ 9
17	B *p s*	9.20	9.49	9.35	+ 0.16	+ 14
»	B *p i*	9.42	9.58	9.50	+ 0.01	+ 1
18	C *p i*	9.54	9.83	9.69	— 0.18	— 16
»	C *p s*	9.78	9.85	9.82	— 0.31	— 28
23	C *a s*	9.20	9.47	9.34	+ 0.17	+ 16
»	C *a i*	9.39	9.53	9.46	+ 0.05	+ 5
24	D *p s*	9.19	9.48	9.29	+ 0.22	+ 20
»	D *p i*	9.50	9.55	9.53	— 0.02	— 2
	Medî	9.410	9.607	9.508		

Medio aumento di temperatura da una misura all'altra dei coltelli, fra le due misure essendo compresa una sola serie di oscillazioni . . . . 0°.197.

Questo fatto ha indotto a sopprimere nelle osservazioni di febbraio 1886 la lettura dei termometri al principio e alla fine delle oscillazioni e ad assumere, come si è detto, la indicazione media dei termometri durante le oscillazioni coincidente colla loro indicazione media durante le misure di distanza dei coltelli. Nella colonna 6ª della Tabella 42ª sono registrate le differenze fra la lettura media 24°,10 e le letture medie corrispondenti ad ogni posizione del pendolo, cioè i valori di $t_m - t$. Introducendo tali valori nella espressione data di sopra per ΔT si ottengono le riduzioni alla temperatura media 23°,47 (corrispondente alla lettura 24°,10) registrate nella colonna 7ª, le quali esprimono unità della settima decimale.

In febbraio 1886 le indicazioni medie dei due termometri n. 2 e n. 3, nei confronti precedente e seguente l'osservazione dei passaggi, sono date nelle colonne 3ª e 4ª della Tabella 43ª, mentre nella colonna 5ª della stessa è data la presumibile media lettura dei termometri stessi nel mezzo delle oscillazioni. La media generale essendo 9°,51, la colonna 6ª contiene i valori di $t_m - t$ coi quali furono calcolate le riduzioni della 7ª colonna espresse in unità della 7ª decimale.

Riunendo le correzioni dell'ultima colonna della Tabella 42ª colle riduzioni cambiate di segno registrate nell'ultima colonna della Tabella $28^a{}_a$, abbiamo le riduzioni alla temperatura media 23°,47 delle oscillazioni di agosto 1885 e all'unità di misura secondo siderale registrate nell'ultima colonna a dritta delle Tabelle 48ª e 49ª. Analogamente, riunendo le correzioni dell'ultima colonna della Tabella 43ª colle riduzioni a secondi siderali cambiate di segno date nella ultima colonna della Tabella $28^a{}_b$, abbiamo le riduzioni alla temperatura media 8°,90 delle oscillazioni di febbraio 1886 e all'unità secondo siderale registrate nella colonna 3ª delle Tabelle 50ª e 51ª.

§ XXXIX. *Riduzione all'arco cicloidale.*

Il calcolo di questa riduzione per le osservazioni dell'agosto 1885 fu fatto con due metodi.

Il *1° metodo* è quello stesso impiegato dall'Orff e da lui esposto nelle pagine 77 e 78 del suo lavoro. Consiste nel calcolare, mediante la formola trovata per esprimere la legge di diminuzione dell'amplitudine nella serie stessa delle oscillazioni della quale si tratta, le due amplitudini α_i ed α_f iniziale e finale corrispondenti agli istanti τ_i e τ_f del principio e della fine della serie delle oscillazioni e poi altre tre amplitudini α_1, α_2, α_3 corrispondenti ai tempi intermedii τ_1, τ_2, τ_3 equidistanti fra loro e dagli estremi così che $\tau_1 - \tau_i = \tau_2 - \tau_1 = \tau_3 - \tau_2 = \tau_f - \tau_3$. Nel caso presente, per calcolare siffatte amplitudini, si è adoperata la formola X del § LIII dopo di avervi introdotti i valori di A', B', C' dati dalle Tabelle 32ª e 33ª. Ma è evidente che si sarebbe potuto anche adoperare le formole (67) e le costanti μ, ν, k date nelle Tabelle 34ª e 35ª. Calcolate le amplitudini α_i, α_1 .... α_f, col mezzo della Tabella ausiliaria del § LIV si sono calcolate le riduzioni all'arco cicloidale X_i, X_1, X_2, X_3, X_f corrispondenti, e si è calcolata allora la riduzione all'arco cicloidale per la durata media delle oscillazioni compiute dal pendolo fra τ_i e τ_f mediante la formola di Cotes di cinque termini, riferita sotto il n. XI nel § LIII. In quel §, insieme colle formole necessarie allo scopo, è dato anche un esempio numerico relativo alla loro applicazione.

Servendomi di tale metodo ho calcolato le riduzioni della colonna 5ª nelle

Tabelle 48ª e 49ª accanto alle quali nelle colonne 3ª e 4ª ho riferito anche le amplitudini iniziale e finale calcolate colla formola X su citata corrispondentemente ai tempi iniziale e finale delle colonne 3ª e 4ª della Tabella 44ª.

Il *2º metodo* è quello suggerito ed esemplificato dall'Oppolzer nella sua Memoria citata qui indietro alle pagine 87 e 215.

Io ne ho seguito fedelmente la traccia, servendomi anche della Tavola numerica del Ginzel posta in fine alla Memoria. Secondo tale metodo s' incomincia dal calcolare le amplitudini *iniziale* α_i e *finale* α_f corrispondenti ai tempi τ_i e τ_f mediante le equazioni (67) dopo di avere calcolato i valori delle costanti μ, ν, k relativi alla serie delle oscillazioni che si considera. Il parametro ν delle mie formole corrispondendo al parametro β dell'Oppolzer, si formano gli argomenti $\alpha_i \nu$, $\alpha_f \nu$ e allora la Tavola di Ginzel dà le funzioni $S(\alpha_i \nu)$, $S(\alpha_f \nu)$ mediante i loro logaritmi. Indicando con p il numero delle oscillazioni compiute dal pendolo fra τ_i e τ_f sarà $T' = \frac{\tau_f - \tau_i}{p}$ la media durata di una oscillazione. La riduzione cercata è così espressa dalla equazione (34) della Memoria di Oppolzer:

$$\tau_0 - T' = -\frac{T'}{\mu p}\left\{\alpha_i^2 S(\alpha_i \nu) - \alpha_f^2 S(\alpha_f \nu)\right\}$$

dove μ tiene il luogo di ε. Il significato della funzione $S(\alpha \nu)$ è poi il seguente:

$$S(\alpha \nu) = \frac{(\text{arc } 1')^2}{16\,\alpha^2 \nu^2}\left[\alpha \nu - \log \text{hyp}\,(1 + \nu \alpha)\right].$$

Nel caso pratico bisogna ridurre il parametro μ all'unità secondo, e ciò, nel caso nostro, dividendone il valore per 600, che è il numero dei secondi contenuti nell'unità di tempo (10^m), cui il valore di μ da noi ottenuto si riferisce.

Nelle colonne 6ª e 7ª delle Tabelle 48ª e 49ª sono registrate le amplitudini iniziale e finale calcolate colle formole (67) e nella colonna 8ª sono le riduzioni all'arco cicloidale calcolate col metodo di Oppolzer. Fra i numeri delle colonne 5ª e 8ª le differenze sono in generale di due o tre unità della 7ª decimale soltanto e, benchè ai numeri della 8ª colonna spetti una probabilità alquanto diversa da quella spettante ai numeri della 5ª, non si commetterà errore sensibile assumendo come più plausibile riduzione la media aritmetica delle riduzioni ottenute coi due metodi. La colonna 9ª contiene appunto i medî aritmetici dei numeri delle colonne 5ª e 8ª. Le riduzioni date nella colonna 9ª congiuntamente a quelle della colonna 11ª, Tabelle 48ª e 49ª, applicate alle durate della colonna 8ª, Tabella 44ª, porgono le durate dell'oscillazione che sono registrate nella colonna 10ª delle Tabelle suddette 48ª e 49ª.

3º metodo. Per la riduzione all'arco cicloidale delle oscillazioni osservate *in febbraio 1886* mi servii del metodo esposto nel § X di questa relazione, il quale differisce da quello dell'Oppolzer per ciò solo che in esso non è necessario di calcolare le amplitudini iniziale e finale, ma, determinate le costanti μ, ν, k, si può avere direttamente la riduzione cercata in funzione dei tempi iniziale e finale. Agevola il cômpito la Tavola numerica del § XI. Le riduzioni calcolate con tale metodo sono quelle registrate nelle colonne 4ª e 6ª delle Tabelle 50ª e 51ª e, applicate rispettivamente alle durate delle colonne 6ª e 10ª delle Tabelle 46ª e 47ª congiuntamente alle correzioni della colonna 3ª delle Tabelle 50ª e 51ª, danno le durate ridotte delle colonne 5ª e 7ª di queste due ultime Tabelle.

Tabella 44.ª

1885 Agosto	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Tempo del pendolo di Frodsham registrato dal cronografo all'istante medio: di una serie di oscillazioni del 1° gruppo	della serie corrispondente di oscillazioni del 2° gruppo	Differenza col.ª 4ª - col.ª 3ª	Numero delle oscillazioni compiute contemporaneamente dal pendolo revert.le a	Eccesso del numero dei secondi sul corrispondente numero di oscillazioni b	Durata di una oscillazione del pendolo revertibile in secondi cronografici $1^s + \frac{b}{a}$
1	2	3	4	5	6	7	8
		h m s	h m s	s		s	s
5	A *a i*	20 55 31.669	21 16 0.272	1228.603	1221	7.603	1.0062269
	» » *s*	21 42 25.149	22 2 37.621	1212.472	1205	7.472	2008
6	» *p s*	20 44 13.668	21 4 10.012	1196.344	1189	7.344	1766
	» » *i*	21 31 32.999	21 51 42.441	1209.442	1202	7.442	1914
19	A *p i*	21 35 2.033	21 57 40.342	1358.309	1350	8.309	1.0061548
	» » »	21 36 32.577	21 59 9.887	1357.310	1349	8.310	1600
	» » »	21 38 8.164	22 0 34.403	1346.239	1338	8.239	1577
	» » *s*	22 29 34.908	22 49 37.312	1202.404	1195	7.404	1958
	» » »	22 30 33.461	22 50 32.815	1199.354	1192	7.354	1695
	» » »	22 32 32.021	22 52 32.383	1200.362	1193	7.362	1710
20	» *a s*	21 20 31.335	21 41 57.308	1285.973	1278	7.973	2387
	» » »	21 22 9.941	21 43 33.813	1283.872	1276	7.872	1693
	» » »	21 23 38.504	21 45 4.378	1285.874	1278	7.874	1612
	» » *i*	22 13 19.364	22 34 37.208	1277.844	1270	7.844	1764
	» » »	22 14 47.889	22 36 1.731	1273.842	1266	7.842	1943
	» » »	22 16 16.443	22 37 28.257	1271.814	1264	7.814	1820
21	B *a i*	21 13 32.349	21 34 52.218	1279.869	1272	7.869	1.0061863
	» » »	21 15 10.949	21 36 18.717	1267.768	1260	7.768	1651
	» » »	21 16 49.571	21 37 49.305	1259.734	1252	7.734	1773
	» » *s*	22 1 26.618	22 21 58.158	1231.540	1224	7.540	1601
	» » »	22 2 58.157	22 23 28.713	1230.556	1223	7.556	1783
	» » »	22 4 30.728	22 24 58.271	1227.543	1220	7.544	1828
23	» *p s*	21 23 35.646	21 46 15.990	1360.344	1352	8.344	1716
	» » »	21 25 2.162	21 47 45.522	1363.360	1355	8.360	1698
	» » »	21 26 30.706	21 49 9.045	1358.339	1350	8.339	1770
	» » *i*	22 9 52.679	22 36 16.453	1583.774	1574	9.774	2097
	» » »	22 11 27.272	22 37 46.993	1579.721	1570	9.721	1917
	» » »	22 12 59.838	22 39 21.571	1581.733	1572	9.733	1915

1885 Agosto	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Tempo del pendolo di Frodsham registrato dal cronografo all'istante medio — di una serie di oscillazioni del 1° gruppo	Tempo del pendolo di Frodsham registrato dal cronografo all'istante medio — della serie corrispondente di oscillazioni del 2° gruppo	Differenza col.ª 4ª - col.ª 3ª	Numero delle oscillazioni compiute contemporaneamente dal pendolo revert.le a	Eccesso del numero dei secondi sul corrispondente numero di oscillazioni b	Durata di una oscillazione del pendolo revertibile in secondi cronografici $1^s + \frac{b}{a}$
1	2	3	4	5	6	7	8
		h m s	h m s	s		s	s
24	C *a* *i*	21 34 14.668	22 0 57.538	1602.870	1593	9.870	1.0061959
	» » »	21 35 43.308	22 2 18.113	1594.805	1585	9.805	1861
	» » »	21 37 12.878	22 3 48.650	1595.772	1586	9.772	1614
	» » *s*	22 29 33.396	22 55 8.880	1535.484	1526	9.484	2149
	» » »	22 31 3.936	22 56 45.427	1541.491	1532	9.491	1952
	» » »	22 32 28.416	22 58 13.939	1545.523	1536	9.523	1999
25	» *p* *s*	21 37 51.332	22 3 19.708	1528.376	1519	9.376	1725
	» » »	21 39 22.897	22 4 51.249	1528.352	1519	9.352	1567
	» » »	21 41 3.511	22 6 26.843	1523.332	1514	9.332	1638
	» » *i*	22 34 59.229	23 3 45.853	1726.624	1716	10.624	1911
	» » »	22 36 35.815	23 5 20.437	1724.622	1714	10.622	1972
	» » »	22 38 18.461	23 7 1.021	1722.560	1712	10.560	1681
26	D *a* *i*	21 8 49.240	21 36 19.383	1650.143	1640	10.143	1.0061847
	» » »	21 10 23.820	21 37 59.976	1656.156	1646	10.156	1701
	» » »	21 12 6.461	21 39 34.577	1648.116	1638	10.116	1758
	» » *s*	22 5 41.062	22 34 49.820	1748.758	1738	10.758	1899
	» » »	22 7 24.672	22 36 26.402	1741.730	1731	10.730	1987
	» » »	22 9 4.293	22 38 2.964	1738.671	1728	10.671	1753
27	» *p* *i*	21 11 23.009	21 37 2.463	1539.454	1530	9.454	1791
	» » »	21 12 57.589	21 38 37.030	1539.441	1530	9.441	1706
	» » »	21 14 32.180	21 40 17.635	1545.455	1536	9.455	1556
	» » *s*	22 8 32.453	22 37 59.312	1766.859	1756	10.859	1839
	» » »	22 10 15.070	22 39 27.830	1752.760	1742	10.760	1768
	» » »	22 11 55.690	22 41 0.410	1744.720	1734	10.720	1822

TABELLA 45.ª

Febbraio 1886	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Medio dei tempi di sessanta passaggi del pendolo per la verticale registrati sul cronografo in ciascuna delle tre serie		
		del 1° gruppo	del 2° gruppo	del 3° gruppo
1	2	3	4	5
		h m s	h m s	h m s
7	A *a s*	6 52 59.493	7 23 59.804	7 47 42.401
	» » »	6 54 43.117	7 25 40.439	7 49 13.958
	» » »	6 56 29.785	7 27 15.999	7 50 50.536
	» » *i*	9 12 14.931	9 42 29.895	10 14 34.506
	» » »	9 14 4.585	9 44 25.588	10 16 20.140
	» » »	9 15 44.220	9 46 10.236	10 17 49.664
8	» *p i*	6 38 45.257	7 8 30.033	7 38 44.966
	» » »	6 40 24.840	7 10 10.659	7 40 20.551
	» » »	6 42 0.474	7 11 50.251	7 42 0.156
	» » *s*	9 10 50.561	9 40 50.509	10 9 24.885
	» » »	9 12 25.148	9 42 30.132	10 10 50.420
	» » »	9 14 9.766	9 44 9.737	10 12 19.959
9	D *a i*	6 37 29.945	7 7 49.934	7 37 49.777
	» » »	6 39 0.499	7 9 20.478	7 39 30.383
	» » »	6 40 45.125	7 10 50.012	7 40 59.914
	» » *s*	8 56 59.734	9 26 59.669	9 56 30.412
	» » »	8 58 30.305	9 28 30.246	9 58 9.997
	» » »	8 59 59.826	9 30 9.827	9 59 40.536
16	B *a s*	6 51 10.483	7 20 50.261	7 51 20.334
	» » »	6 52 50.069	7 22 29.848	7 53 9.940
	» » »	6 54 29.652	7 24 30.573	7 54 50.550
	» » *i*	9 23 30.113	9 53 40.075	10 24 40.320
	» » »	9 24 59.644	9 55 19.659	10 26 19.857
	» » »	9 26 40.281	9 57 0.285	10 28 0.493

Febbraio 1886	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Medio dei tempi di sessanta passaggi del pendolo per la verticale registrati sul cronografo in ciascuna delle tre serie		
		del 1° gruppo	del 2° gruppo	del 3° gruppo
1	2	3	4	5
		h m s	h m s	h m s
17	B *p s*	7 24 19.731	7 53 50.483	8 24 29.606
	» » »	7 25 50.316	7 55 30.085	8 26 0.146
	» » »	7 27 29.900	7 57 9.709	8 27 39.730
	» » *i*	9 39 10.155	10 8 59.970	10 38 39.695
	» » »	9 40 59.793	10 10 40.569	10 40 20.317
	» » »	9 42 40.407	10 12 20.180	10 41 59.897
18	C *p i*	7 4 49.573	7 33 50.039	8 3 49.897
	» » »	7 6 20.119	7 35 29.659	8 5 30.511
	» » »	7 7 59.620	7 37 10.277	8 7 10.090
	» » *s*	9 27 19.560	9 57 49.676	10 27 50.559
	» » »	9 28 50.098	9 59 10.150	10 29 20.097
	» » »	9 30 19.642	10 0 49.756	10 30 59.686
23	C *a s*	7 2 29.663	7 33 9.798	8 2 30.475
	» » »	7 4 0.216	7 34 40.370	8 4 10.065
	» » »	7 5 39.832	7 36 19.947	8 5 39.599
	» » *i*	9 22 30.076	9 53 0.137	10 22 39.828
	» » »	9 24 19.710	9 54 29.639	10 24 20.458
	» » »	9 26 0.352	9 56 10.305	10 26 0.050
24	D *p s*	8 8 9.683	8 37 30.385	9 7 30.261
	» » »	8 9 40.277	8 39 9.975	9 8 59.791
	» » »	8 11 9.782	8 40 50.602	9 10 40.423
	» » *i*	10 26 9.963	10 56 19.923	11 28 10.430
	» » »	10 27 40.553	10 57 50.472	11 30 0.054
	» » »	10 29 20.117	10 59 30.071	11 31 29.613

Tabella 46.ª

Cilindro pieno in basso.

1886 Febbraio	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Differenze fra i numeri delle colonne 4ª e 3ª Tabella 45ª	N. corrispondente delle oscillazioni del pend. revert.le a	Eccesso del num. dei secondi sul numero delle oscillazioni b	Durata di una oscillazione del pendolo revertibile in secondi cronografici $1^s + \frac{b}{a}$	Differenze fra i numeri delle colonne 5ª e 4ª Tabella 45ª	N. corrispondente delle oscillazioni del pend. revert.le a	Eccesso del num. dei secondi sul numero delle oscillazioni b	Durata di una oscillazione del pendolo revertibile in secondi cronografici $1^s + \frac{b}{a}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		s		s	s	s		s	s
7	A a	1814.964	1804	10.964	1.0060776	1924.611	1913	11.611	1.0060695
	» »	1821.003	1810	11.003	790	1914.552	1903	11.552	704
	» »	1826.016	1815	11.016	694	1899.428	1888	11.428	530
8	» p	1784.776	1774	10.776	744	1814.933	1804	10.933	604
	» »	1785.819	1775	10.819	952	1809.892	1799	10.892	545
	» »	1789.777	1779	10.777	579	1809.905	1799	10.905	617
9	D a	18'9.989	1809	10.989	746	1799.843	1789	10.843	609
	» »	1819.979	1809	10.979	691	1809.905	1799	10.905	617
	» »	1804.887	1794	10.887	686	1809.902	1799	10.902	600
16	B a	1809.962	1799	10.962	920	1860.245	1849	11.245	817
	» »	1820.015	1809	11.015	890	1860.198	1849	11.198	562
	» »	1820.004	1809	11.004	829	1860.208	1849	11.208	617
17	B p	1789.815	1779	10.815	793	1779.725	1769	10.725	627
	» »	1780.776	1770	10.776	881	1779.748	1769	10.748	758
	» »	1779.773	1769	10.773	899	1779.717	1769	10.717	582
18	C p	1740.466	1730	10.466	497	1799.858	1789	10.858	693
	» »	1749.540	1739	10.540	610	1800.852	1790	10.852	626
	» »	1750.607	1740	10.607	960	1799.813	1789	10.813	442
23	C a	1830.061	1819	11.061	808	1779.691	1769	10.691	435
	» »	1809.929	1799	10.929	750	1790.819	1780	10.819	781
	» »	1809.953	1799	10.953	884	1789.745	1779	10.745	399
24	D p	1809.960	1799	10.960	923	1910.507	1899	11.507	595
	» »	1809.919	1799	10.919	695	1929.582	1918	11.582	386
	» »	1809.954	1799	10.954	889	1919.542	1908	11.542	493

TABELLA 47.ª

Cilindro pieno in alto.

1886 Febbraio	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Differenze fra i numeri delle colonne 4ª e 3ª Tabella 45ª	N. corrispondente delle oscillazioni del pend. revert.le a	Eccesso del num. dei secondi sul numero delle oscillazioni b	Durata di una oscillazione del pendolo revertibile in secondi cronografici $1^s + \frac{b}{a}$	Differenze fra i numeri delle colonne 5ª e 4ª Tabella 45ª	N. corrispondente delle oscillazioni del pend. revert.le a	Eccesso del num. dei secondi sul numero delle oscillazioni b	Durata di una oscillazione del pendolo revertibile in secondi cronografici $1^s + \frac{b}{a}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	A *a*	s 1860.311	1849	s 11.311	s 1.0061174	s 1422.597	1414	s 8.597	s 1.0060799
	» »	1857.322	1846	11.322	1333	1413.519	1405	8.519	634
	» »	1846.214	1835	11.214	1112	1414.537	1406	8.537	718
8	A *p*	1799.948	1789	10.948	1196	1714.376	1704	10.376	892
	» »	1804.984	1794	10.984	1226	1700.288	1690	10 288	876
	» »	1799.971	1789	10.971	1325	1690.222	1680	10.222	845
9	D *a*	1799.935	1789	10.935	1124	1770.743	1760	10.743	1040
	» »	1799.941	1789	10 941	1157	1779.751	1769	10.751	774
	» »	1810.001	1799	11.001	1151	1770.709	1760	10 709	847
16	B *a*	1779.778	1769	10.778	0927	1830.073	1819	11.073	874
	» »	1779.779	1769	10.779	0933	1840.092	1829	11.092	645
	» »	1800.921	1790	10.921	1011	1819.977	1808	10.977	714
17	B *p*	1770.752	1760	10.752	1091	1839.123	1828	11.123	848
	» »	1779.769	1769	10.769	0876	1830.061	1819	11.061	808
	» »	1779.809	1769	10.809	1102	1830.021	1819	11.021	588
18	C *p*	1830.116	1819	11.116	1111	1800.883	1790	10.883	799
	» »	1819.052	1808	11.052	1128	1809.947	1799	10.947	850
	» »	1830.114	1819	11.114	1099	1809.930	1799	10.930	756
23	C *a*	1840.135	1829	11.135	0880	1760.677	1750	10.677	1011
	» »	1840.154	1829	11.154	0984	1769.695	1759	10.695	802
	» »	1840.115	1829	11.115	0771	1759.652	1749	10.652	903
24	D *p*	1760.702	1750	10.702	1154	1799.876	1789	10.876	794
	» »	1769.698	1759	10.698	0819	1789.816	1779	10.816	798
	» »	1780.820	1770	10.820	1130	1790.821	1780	10.821	792

Tabella 48.[a]

Cilindro pieno in basso.

1885 Agosto	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Primo metodo di calcolo: amplitudine iniziale	Primo metodo di calcolo: amplitudine finale	Primo metodo di calcolo: riduzione all'arco cicloidale	Secondo metodo di calcolo: amplitudine iniziale	Secondo metodo di calcolo: amplitudine finale	Secondo metodo di calcolo: riduzione all'arco cicloidale	Media riduzione all'arco cicloidale	Durata dell'oscillazione in secondi siderali ridotta a **23°.47 C** e all'arco cicloidale		Riduzione a **23°.47 C** e a secondi siderali
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11
5	A *a*	92.7′	62.5′	296	93.5′	61.8′	302	299		1.0061995 s	+25
6	A *p*	103.3	71.5	397	102.9	71.7	397	397		529	12
19	A *p*	91.6	61.4	305	91.5	61.6	306	306	1.0061340 s		
	» »	89.1	59.9	288	88.9	60.1	290	289	409	1.0061383	98
	» »	86.5	58.6	274	86.3	58.8	275	275	400		
20	A *a*	81.4	45.8	196	82.9	44.8	205	201	1.0061694		
	» »	76.9	44.1	181	78.8	43.3	188	185	889	1.0061788	131
	» »	72.8	42.2	167	75.1	41.8	173	170	781		
21	B *a*	101.8	68.0	374	101.8	68.2	370	372	1.0061623		
	» »	98.5	66.4	355	98.6	66.7	349	351	432	1.0061543	132
	» »	95.3	64.9	331	95.3	65.0	329	330	575		
23	B *p*	106.6	65.9	379	106.3	65.7	381	380	1.0061853		
	» »	103.2	64.5	358	102.9	64.3	359	359	694	1 0061753	136
	» »	100.1	63.3	338	99.7	62.6	339	339	712		
24	C *a*	107.7	66.3	389	107.4	66.5	390	390	1.0061694		
	» »	104.6	64.9	369	104.2	65.1	370	370	516	1.0061533	125
	» »	101.7	63.5	350	101.2	63.6	351	351	388		
25	C *p*	107.8	64.3	378	107.5	64.7	379	379	1.0061636		
	» »	104.5	62.9	356	104.1	63.1	358	357	719	1.0061601	104
	» »	101.1	61.5	335	100.6	61.5	337	336	449		
26	D *a*	90.8	56.9	281	90.7	57.0	283	282	1.0061672		
	» »	88.2	55.6	265	88.1	55.5	268	267	541	1.0061609	107
	» »	85.5	54.4	251	85.4	54.2	253	252	613		
27	D *p*	93.2	59.4	300	92.9	59.7	301	301	1.0061575		
	» »	90.5	58.1	284	90.1	58.2	285	285	506	1.0061484	85
	» »	87.9	56.8	268	87.5	56.8	270	269	372		

TABELLA 49.ª

Cilindro pieno in alto.

1885 Agosto	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Primo metodo di calcolo			Secondo metodo di calcolo			Media riduzione all'arco cicloidale	Durata dell'oscillazione in secondi siderali ridotta a **23°.47 C** e all'arco cicloidale		Riduzione a **23°.47 C** e a secondi siderali
		amplitudine iniziale	amplitudine finale	riduzione all'arco cicloidale	amplitudine iniziale	amplitudine finale	riduzione all'arco cicloidale				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11
5	A *a*	83.7′	41.1′	193	83.7′	41.0′	196	195		s 1.0061827	+14
6	A *p*	90.6	44.1	225	90.3	44.0	225	225		1545	4
19	A *p*	97.5	45.2	250	96 6	45.7	250	250	s 1.0061807		
	» »	93.6	44.0	233	92.6	44.4	232	232	1562	1.0061659	99
	» »	86.3	41.5	200	85.2	41.8	200	200	1609		
20	A *a*	95.8	43.3	236	95 8	43.6	239	238	1.0062282		
	» »	89.5	41.2	209	89.5	41.4	212	211	1615	1.0061818	133
	» »	84.3	39.2	187	84.2	39.5	190	189	1556		
21	B *a*	87.8	43.3	208	88.3	42.2	212	210	1.0061517		
	» »	82.2	41.1	187	83.0	40.2	190	189	1720	1.0061674	126
	» »	77.0	38.9	168	78.2	38.3	170	169	1785		
23	B *p*	81.7	38.9	174	82.7	38.6	178	176	1.0061680		
	» »	76 9	37.0	158	78.2	36.1	162	160	1678	1.0061707	140
	» »	73.3	35 2	145	74.0	34.6	147	146	1764		
24	C *a*	100.4	39.1	230	99.2	39.1	228	229	1.0062040		
	» »	94 2	37.1	204	93.0	37.2	203	203	1869	1.0061948	120
	» »	88.8	35.3	183	87.7	35.6	183	183	1936		
25	C *p*	82.1	35 3	164	82.0	34.7	165	165	1.0061668		
	» »	77.3	33.7	148	77.2	33.2	149	149	1526	1.0061602	108
	» »	72.4	32 0	132	72.5	31.7	133	133	1613		
26	D *a*	86.1	32.9	166	86.1	32.3	168	167	1.0061837		
	» »	80.5	31.3	147	80.6	30.9	149	148	1944	1.0061835	105
	» »	75.6	29.8	132	75.8	29.5	134	133	1725		
27	D *p*	87.7	32.3	168	87.0	32.1	167	167	1.0061750		
	» »	82.0	30.8	149	81.3	30.7	149	149	1697	1.0061738	78
	» »	76.9	29.5	134	76.3	29.2	133	133	1767		

Tabella 50.a

Cilindro pieno in basso.

1886 Febbraio 1	Disposizione dei coltelli e posizione della firma 2	Riduzione a 8°.90 C e a secondi siderali 3	Riduzione all'arco cicloidale 4	Prima serie di oscillazioni — Durata della oscillazione in secondi siderali ridotta a **8°.90 C** e all'arco cicloidale 5		Riduzione all'arco cicloidale 6	Seconda serie di oscillazioni — Durata della oscillazione in secondi siderali ridotta a **8°.90 C** e all'arco cicloidale 7	
7	A *a*	+ 52	313	s 1.0060515		110	s 1.0060637	
	" "	"	293	549	s 1.0060511	104	652	s 1.0060591
	" "	"	276	470		98	484	
8	A *p*	+ 70	360	1.0060454		128	1.0060546	
	" "	"	338	684	1.0060490	122	493	1.0060537
	" "	"	318	331		116	571	
9	D *a*	+ 66	345	1.0060467		124	1.0060551	
	" "	"	326	431	1.0060447	118	565	1.0060556
	" "	"	308	444		113	553	
16	B *a*	+ 67	389	1.0060598		137	1.0060747	
	" "	"	366	591	1.0060580	130	499	1.0060602
	" "	"	344	552		124	560	
17	B *p*	+ 59	446	1.0060406		154	1.0060532	
	" "	"	416	524	1.0060499	146	671	1.0060569
	" "	"	390	566		138	503	
18	C *p*	+ 41	422	1.0060116		150	1.0060584	
	" "	"	397	254	1.0060331	142	525	1.0060486
	" "	"	377	624		135	348	
23	C *a*	+ 56	438	1.0060426		151	1.0060340	
	" "	"	410	396	1.0060459	143	694	1.0060451
	" "	"	385	555		136	319	
24	D *p*	+ 48	438	1.0060533		147	1.0060496	
	" "	"	413	330	1.0060471	139	295	1.0060400
	" "	"	387	550		132	409	

TABELLA 51.ª

Cilindro pieno in alto.

1886 Febbraio	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Riduzione a 8°.90 C e a secondi siderali	Riduzione all'arco cicloidale	Prima serie di oscillazioni — Durata della oscillazione in secondi siderali ridotta a 8°.90 C e all'arco cicloidale		Riduzione all'arco cicloidale	Seconda serie di oscillazioni — Durata della oscillazione in secondi siderali ridotta a 8°.90 C e all'arco cicloidale	
1	2	3	4	5		6	7	
7	A a	+ 64	216	1.0061022		33	1.0060830	
	» »	»	188	1209	1.0061082	29	0669	1.0060752
	» »	»	162	1014		26	0756	
8	A p	+ 59	229	1 0061026		32	1.0060919	
	» »	»	204	1081	1.0061103	29	0906	1.0060901
	» »	»	181	1203		26	0878	
9	D a	+ 54	228	1.0060950		31	1.0061063	
	» »	»	205	1006	1.0060992	29	0799	1.0060912
	» »	»	184	1021		26	0875	
16	B a	+ 74	195	1.0060806		27	1.0060921	
	» »	»	171	0836	1.0060859	24	0695	1.0060794
	» »	»	150	0935		22	0766	
17	B p	+ 72	232	1.0060931		30	1.0060890	
	» »	»	205	0743	1.0060889	27	0853	1.0060793
	» »	»	180	0994		25	0635	
18	C p	+ 29	256	1.0060884		33	1.0060795	
	» »	»	228	0929	1.0060913	30	0849	1.0060801
	» »	»	202	0926		27	0758	
23	C a	+ 67	234	1.0060713		30	1.0061048	
	» »	»	207	0844	1.0060738	27	0842	1.0060945
	» »	»	182	0656		24	0946	
24	D p	+ 70	264	1.0060960		36	1.0060828	
	» »	»	232	0657	1.0060870	33	0835	1.0060832
	» »	»	206	0994		30	0832	

§ XL. *Ricerche sulle probabili variazioni del cronografo e della equazione personale durante le osservazioni delle oscillazioni.*

Le osservazioni fatte allo strumento dei passaggi situato nella sala meridiana di quest'Osservatorio venivano registrate col tasto elettrico sopra un cronografo collocato in una stanza vicina alla sala ora detta. Le osservazioni dei passaggi della punta del pendolo a reversione per il piano verticale dello spigolo di sospensione venivano invece registrate sopra il cronografo situato nella stanza stessa delle esperienze come è stato detto altrove. Sì l'uno che l'altro cronografo potevano venire facilmente inseriti, a seconda del bisogno e successivamente, nel circuito di una medesima pila, il quale ad ogni secondo veniva interrotto dal pendolo normale dell'Osservatorio, così che di tale pendolo aveansi registrati i *secondi* sopra uno o sopra l'altro dei due cronografi secondo il caso.

L'uso dei due cronografi non dà evidentemente luogo a veruna obbiezione, giacchè quanto si vuole dedurre da ciascuno di essi non sono che differenze di tempi del pendolo normale piuttosto che tempi assoluti.

Quanto alle irregolarità alle quali può andare soggetto il primo dei sopra mentovati cronografi durante le determinazioni di tempo, e quanto alle variazioni della equazione personale, non si vede che possano indurre, nel risultato complessivo di molte osservazioni estese a parecchi giorni, qualche errore sistematico che alteri sensibilmente quell'elemento che solo ci occorre, ed è l'andamento del pendolo.

Altrimenti potrebbe andare la cosa nelle altre osservazioni.

Fra il principio e la fine della osservazione delle oscillazioni dovendo passare un certo intervallo di tempo, durante il quale il cronografo rimane in movimento e inserito nel circuito elettrico, può, per l'azione prolungata della corrente e per altre cause, avvenire una qualche variazione nel tempo che passa fra la immissione della corrente e l'istante in cui la punta colpisce la striscia cronografica, d'onde una variazione sistematica nell'andamento del tempo cronografico rispetto al tempo dato dal pendolo interruttore.

Inoltre, fra il principio e la fine delle osservazioni dei passaggi, può avvenire una piccola variazione sistematica dell'equazione personale dipendente da ciò che colla prolungata osservazione l'occhio si stanca.

Per poter valutare in una certa misura la entità complessiva della variazione sistematica di andamento del cronografo rispetto al pendolo normale e della variazione nell'equazione personale, ho istituito regolarmente, durante il periodo delle osservazioni di febbraio, fra il cronografo e il pendolo siderale situato nella stanza stessa delle esperienze, un primo confronto subito dopo di avere messo in moto il cronografo e un secondo confronto poco prima del suo arresto, così da comprendere fra i due confronti un intero gruppo di tre serie di oscillazioni osservate e un tempo che, in media, risultò di *sette* minuti circa.

Il confronto veniva eseguito inscrivendo mediante il tasto elettrico sulla striscia cronografica *sei* o *dieci* segnali corrispondentemente a sei o dieci battute del pendolo siderale ausiliario osservate ad occhio e orecchio. Dal complesso di tutte le segnalazioni fatte risultò per e r r o r e p r o b a b i l e d e l l a i s c r i z i o n e d i u n s e m p l i c e

segnale sul cronografo in corrispondenza con una battuta del pendolo ausiliario

$$\pm 0^s,026$$

e pertanto le incertezze probabili rispettive dei medî di sei e di dieci segnali sono

$$\pm 0^s,011 \quad \text{e} \quad \pm 0^s,008 .$$

Se la incertezza dell' intervallo fra due medî, uno di *dieci* l'altro di *sei* segnalazioni, dipendesse soltanto dalla variazione probabile dell'equazione personale e del cronografo durante le segnalazioni stesse, il suo valore dovrebbe essere:

$$\pm \sqrt{\overline{0^s.011}^2 + \overline{0^s.008}^2} = \pm 0^s,014 .$$

Invece essa dipende anche dalle variazioni che subiscono la equazione personale e l'andamento del cronografo nel tempo compreso fra i due confronti.

Deduciamo prima, per quanto è possibile, la *parte sistematica* di coteste due variazioni. Perciò ci conviene, innanzi tutto, stabilire l'andamento medio del pendolo normale, e quindi anche del cronografo ad esso congiunto, relativamente al pendolo ausiliario. Dai confronti eseguiti giorno per giorno nel mese di febbraio risultò, che il cronografo *accelerava* rispetto al pendolo ausiliario mediamente di mezzo secondo in ventiquattro ore, per cui in *sette* minuti avrebbe dovuto accelerare di $0^s,002$.

Dal medio di quarantasei confronti fatti ogni volta subito dopo aver posto in moto il cronografo, paragonati coi quarantasei confronti fatti poco prima di arrestarne il movimento, risulta invece che, nei sette minuti d' intervallo fra i due confronti, il cronografo ha mediamente *ritardato* rispetto al pendolo ausiliario di $0^s,007$, quindi il *ritardo effettivo* rispetto a sè stesso, supposto procedere col suo andamento medio, sarebbe risultato di $0^s,009$. L'error probabile di questo risultato puossi ritenere eguale all'error probabile di $0^s,007$ cioè $\pm 0^s,005$.

Supposto che il ritardo sistematico $0^s,009$ ora determinato si riproduca con legge costante in ognuno degli intervalli di tempo nei quali fu osservato un gruppo di tre serie di oscillazioni, è evidente che esso sarà senza influenza sulle combinazioni della prima serie di un gruppo colla prima serie di un altro, oppure della seconda serie di quello colla seconda di questo ecc., cioè su combinazioni tali quali furono da me eseguite colle osservazioni di febbraio.

Trovata così la variazione sistematica è facile anche determinare la variazione accidentale. Infatti, formando gli scostamenti delle quarantasei differenze osservate rispetto al loro medio $+ 0^s,007$, si trova l'error probabile di una differenza

$$\pm 0^s,028,$$

il quale esprime la variazione cercata congiuntamente alla variazione accidentale che interviene durante i confronti stessi e che abbiamo trovato espressa da

$$\pm 0^s,014 .$$

La radice quadrata della differenza fra il quadrato di $0^s,028$ e il quadrato di $0^s,014$ ci darà la variazione probabile dell'andamento del cronografo e della equazione personale nel tempo di sette minuti compreso fra due confronti precedente e susseguente l'osservazione di un gruppo di tre eguali serie di oscillazioni. Essa sarà

$$\pm 0^s,024 .$$

§ XLI. *Error probabile della durata media di una oscillazione.*

Affine di poter determinare l'errore probabile della osservazione di un passaggio, ogni serie di *sessanta* passaggi fu spartita in tre gruppi di 20 passaggi ciascuno: il primo composto dei passaggi dal 1° al 10° e dal 51° al 60°; il secondo dei passaggi dall'11° al 20° e dal 41° al 50° ed il terzo dei residui passaggi compresi fra il 21° ed il 40°. Se non vi fossero errori di osservazione, i medî dei tre gruppi dovrebbero coincidere fra loro e col medio dei sessanta passaggi. Ma poichè ciò non avviene, i loro scostamenti da quest'ultimo medio potranno servire a determinare l'error probabile di uno dei medî parziali.

Le serie osservate al principio del movimento del pendolo furono trattate separatamente da quelle osservate nel mezzo del movimento (v. osservazioni di febbraio) e da quelle osservate alla fine, e così pure furono considerate separatamente le serie corrispondenti alle due diverse posizioni del cilindro pieno. Detto δ, in generale, lo scostamento del medio di ogni gruppo di 20 passaggi dal medio dei tre gruppi, in ognuna delle n serie di sessanta passaggi combinate insieme, si è calcolato l'error probabile r_{20} del medio di 20 passaggi colla formola:

$$r_{20} = 0{,}67 \sqrt{\frac{\Sigma\,\delta^2}{2n}}$$

e si ebbero i risultati seguenti.

Nell'Agosto 1885:

per *cilindro pieno in alto* $\left\{ \begin{array}{l} r_{20} = \pm\, 0^s{,}012 \text{ in principio} \\ r_{20} = \pm\, 0{,}012 \text{ in fine} \end{array} \right\}$ del movimento

per *cilindro pieno in basso* $\left\{ \begin{array}{l} r_{20} = \pm\, 0{,}011 \text{ in principio} \\ r_{20} = \pm\, 0{,}011 \text{ in fine} \end{array} \right\}$ del movimento.

Nel Febbraio 1886, in condizioni alquanto diverse d'ingrandimento e d'illuminazione,

per *cilindro pieno in alto* $\left\{ \begin{array}{l} r_{20} = \pm\, 0^s{,}014 \text{ in principio} \\ r_{20} = \pm\, 0{,}012 \text{ in mezzo} \\ r_{20} = \pm\, 0{,}012 \text{ in fine} \end{array} \right\}$ del movimento

per *cilindro pieno in basso* $\left\{ \begin{array}{l} r_{20} = \pm\, 0{,}012 \text{ in principio} \\ r_{20} = \pm\, 0{,}011 \text{ in mezzo} \\ r_{20} = \pm\, 0{,}010 \text{ in fine} \end{array} \right\}$ del movimento.

Ognuno degli errori qui sopra scritti riposa su 24 serie di 60 passaggi ciascuna, cioè per ognuno è $n = 24$.

Dai risultati esposti sembra potersi dedurre che l'error probabile del medio di 20 passaggi sia un po' più grande quando il cilindro pieno è in basso di allora quando esso è in alto.

L'influenza dell'amplitudine sembra meno palese, poichè, mentre in agosto si ottennero risultati eguali sia pel principio che per la fine del movimento, in febbraio si ottennero risultati così poco differenti da non poter fare sulle differenze veruna induzione.

Si può, in conseguenza, con una approssimazione abbastanza forte ammettere che, qualunque sia l'amplitudine dell'oscillazione, purchè compresa fra 2°,10′ e 10′, e qualunque sia la posizione del cilindro pieno, l'error probabile del medio di 20 passaggi non è superiore a

$$r_{20} = \pm 0^s,012 ,$$

d'onde risulterebbe l'errore probabile di un solo passaggio

$$r_1 = \pm 0^s,054 .$$

Notevole è la quasi coincidenza di questo errore coll'errore probabile del passaggio semplice di una stella equatoriale [1].

Il medio di 60 passaggi sarebbe affetto dall'errore probabile:

$$r_{60} = \frac{r_1}{\sqrt{60}} = \pm 0^s,007 ,$$

e l'intervallo di tempo compreso fra il medio dei *sessanta* passaggi della serie iniziale e il medio dei sessanta passaggi componenti la serie finale dovrebbe pertanto risultare determinato coll'errore probabile

$$\pm 0^s,007 \sqrt{2} = \pm 0^s,010 ,$$

mentre l'error probabile r_i, del medio di tre intervalli simili sarebbe:

$$r_i = \pm 0^s,006 .$$

Questo errore probabile però deve essere alquanto minore del vero, poichè esso compendia in sè *solamente* le irregolarità accidentali che, nel tempo dei *trecentosessanta* passaggi, dai quali è dedotto l'intervallo, avvengono così nel fenomeno osservato, come nel modo di osservarlo, nella emissione della corrente e nell'andamento del cronografo e del pendolo astronomico ad esso congiunto; ma non dipende affatto dalle variazioni accidentali cui le circostanze ora nominate possono andare incontro nell'intervallo di tempo compreso fra l'ultima delle tre prime serie e la prima delle tre ultime serie de' passaggi. Fu appunto per attenuare l'influenza di così fatte variazioni accidentali anche sul valore dell'intervallo, (non che per ottenere una più giusta valutazione dell'errore probabile) che, in luogo di una sola serie di sessanta passaggi, si osservavano, così al principio, come in mezzo (febbraio) e alla fine del movimento, tre serie simili di sessanta passaggi ciascuna, separate fra loro da pause di circa mezzo minuto, nelle quali l'occhio, tolto dal cannocchiale, veniva adoperato per leggere sul cronometro il secondo corrispondente ad un segnale, che frattanto veniva inscritto mediante il tasto sulla striscia cronografica. Avendosi così tre serie iniziali e tre serie finali (e in febbraio anche tre serie intermedie) di passaggi, si combinò la prima delle prime colla prima delle seconde, la seconda colla seconda e la terza colla terza, e si ottennero così tre intervalli di tempo abbraccianti presso a poco un eguale numero di oscillazioni. Riducendoli con una semplice proporzione a comprendere lo stesso numero di oscillazioni (per es. il numero medio aritmetico dei tre) essi avrebbero

[1] Veggasi: Albrecht doct. Theodor, *Ueber die Bestimmung von Längen-differenzen mit Hülfe des electrischen Telegraphen* (Leipzig, Engelmann, 1869) pag. 10. Dalla tabella dell'Albrecht si vede che ± 0s,054 sarebbe l'error probabile del passaggio di una stella equatoriale osservata con un cannocchiale d'ingrandimento 150.

dovuto riuscire fra loro coincidenti, entro i limiti delle piccole differenze dovute alla diminuzione dell'amplitudine di oscillazione da una serie all'altra, se non vi fossero gli errori di osservazione. Prendendo il medio aritmetico dei tre intervalli, uno dopo l'altro determinati nelle medesime condizioni, gli scostamenti dei singoli intervalli dal loro medio hanno permesso di determinare il nuovo valore dell'errore probabile di un intervallo solo. Lasciando da parte le osservazioni del 5 e del 6 agosto, che non si prestano a questo scopo, le altre conducono ai risultati seguenti:

error probabile di un solo intervallo per cilindro pieno in basso:

Agosto 1885		$\pm 0^s,0066$
Febbraio 1886	amplitudini maggiori	$\pm 0,0149$
	amplitudini minori	$\pm 0,0140$

ed *in media per cilindro pieno in basso* . . . . . $\pm 0,0128$

Per *cilindro pieno in alto*

Agosto 1885		$\pm 0,0192$
Febbraio 1886	amplitudini maggiori	$\pm 0,0122$
	amplitudini minori	$\pm 0,0117$

ed *in media* . . . . $\pm 0,0153$.

Non si palesa una sicura influenza della posizione del cilindro, per cui, riunendo in un solo medio i risultati ottenuti nelle due posizioni, l'errore probabile di un intervallo di tempo compreso fra due medî di sessanta passaggi ciascuno sarà

$$\pm 0^s,014 ,$$

in luogo del valore $\pm 0^s,010$ di sopra trovato per altra via.

L'error probabile r_i del medio di tre intervalli sarà dunque ora

$$r_i = \frac{\pm 0^s,014}{\sqrt{3}} = \pm 0^s,008 .$$

E poichè in *agosto* il numero medio delle oscillazioni abbracciate da un intervallo fu di 1448, mentre in *febbraio* fu di 1784, avremo lo

Error probabile della durata di una oscillazione dedotta dal medio di tre intervalli simili:

$$\text{Agosto 1885} \quad \frac{\pm 0^s,008}{1448} = \pm 0^s,000\ 005\ 25$$

$$\text{Febbraio 1886} \quad \frac{\pm 0^s,008}{1784} = \pm 0,000\ 004\ 48 .$$

Siccome poi in *agosto* la durata di una oscillazione fu dedotta da *sedici* intervalli medî di 1448 oscillazioni e in *febbraio* da *trentadue* intervalli medî di 1784 oscillazioni, dovrebbe essere

l'error probabile della durata di una oscillazione

in Agosto 1885 $= \pm 0^s,000\ 001\ 3$,

in Febbraio 1886 $= \pm 0,000\ 000\ 8$.

§ XLI. *Error probabile della riduzione all'arco cicloidale.*

Supposto che tale riduzione siasi ottenuta colla formola di Cotes, riferita in appendice (§ LIII, form. XI), abbiamo (detta R tale riduzione):

$$dR = \frac{1}{90}\left\{12\, dX_2 + 32\,(dX_3 + dX_1) + 7\,(dX_f + dX_i)\right\}.$$

Detto r l'error probabile di R e indicando coi differenziali del secondo membro gli errori probabili delle quantità X_i, X_1, X_2, X_3, X_f avremo:

$$r = \frac{1}{90}\sqrt{(12\, dX_2)^2 + 32^2\,(dX_3^2 + dX_1^2) + 7^2\,(dX_f^2 + dX_i^2)}\,.$$

Ritenendo che l'error probabile comune alle cinque amplitudini, dalle quali sono ricavati i valori di X, sia $\pm 0',5$, basterà cercare nella tabella ausiliaria posta in appendice, al § LIV, le variazioni di X relative a questa comune variazione nel valore corrispondente di α. In media si ha:

dalle osservazioni di agosto 1885

cilindro pieno in basso		cilindro pieno in alto	
$\alpha_i = 95',2$	$dX_i = \pm 5,0$	$\alpha_i = 85',1$	$dX_i = \pm 4,5$
$\alpha_1 = 83,9$	$dX_1 = \pm 4,5$	$\alpha_1 = 67,7$	$dX_1 = \pm 3,6$
$\alpha_2 = 74,8$	$dX_2 = \pm 4,0$	$\alpha_2 = 55,0$	$dX_2 = \pm 3,0$
$\alpha_3 = 67,3$	$dX_3 = \pm 3,5$	$\alpha_3 = 45,6$	$dX_3 = \pm 2,5$
$\alpha_f = 61,1$	$dX_f = \pm 3,2$	$\alpha_f = 38,0$	$dX_f = \pm 2,0$

i valori dei dX essendo espressi in unità della 7ª decimale.

Introducendo tali valori nella equazione superiore si ha dalle osservazioni di agosto, in media, l'error probabile di una riduzione all'arco cicloidale in unità della 7ª decimale:

per cilindro pieno in basso $r = \pm 2,1$
" " " " alto $r = \pm 1,6$

qualora si adoperi pel calcolo di riduzione la formola di Cotes a 5 termini.

Adoperando invece, pel calcolo della riduzione, l'altro metodo esemplificato nel § LII, abbiamo (differenziando la (69), pag. 88, posto $T_0 - T' = R$)

$$dR = \frac{T'}{16\, R_1^2\, \mu\, \nu^2\, (t_f - t_i)}\, d\left\{\varphi(\mu\, t_f) - \varphi(\mu\, t_i)\right\}.$$

Considerando poi che, per le equazioni (67) e (68),

$$\varphi(\mu t) = \nu\,\alpha - \log \operatorname{hyp}(1 + \nu\,\alpha),$$

per cui

$$d\left\{\varphi(\mu\, t_f) - \varphi(\mu\, t_i)\right\} = \nu\,\frac{\nu\,\alpha_f}{1 + \nu\,\alpha_f}\, d\,\alpha_f - \nu\,\frac{\nu\,\alpha_i}{1 + \nu\,\alpha_i}\, d\,\alpha_i = \nu\left(\frac{d\,\alpha_f}{e^{\mu t_f}} - \frac{d\,\alpha_i}{e^{\mu t_i}}\right),$$

abbiamo

$$dR = \frac{T'}{16\, R_1^2\, \mu\, \nu\, (t_f - t_i)}\left\{\frac{1}{e^{\mu t_f}}\, d\,\alpha_f - \frac{1}{e^{\mu t_i}}\, d\,\alpha_i\right\}.$$

Pertanto, ponendo l'error probabile di α_f eguale all'error probabile di α_i eguale ad $r_\alpha = \pm 0',5$, abbiamo

$$r = \pm 0,5 \frac{T'}{16 R_1^2 \mu \nu (t_f - t_i)} \sqrt{\frac{1}{e^{2\mu t_f}} - \frac{1}{e^{2\mu t_i}}} .$$

Ma dalle osservazioni di agosto 1885 si ha in media:

per cilindro pieno in basso	per cilindro pieno in alto
$\alpha_i = 94',7$ $\alpha_f = 61,0$ $t_f - t_i = 2,406$	$\alpha_i = 84',9$ $\alpha_f = 37,9$ $t_f - t_i = 2,341$.

Introducendo nella superiore equazione i valori numerici qui scritti, e prendendo per μ e ν i valori medî ottenuti alla pagina 215, per T′ il valore $1^s,0062$, otteniamo pel *secondo metodo* di calcolo, in unità della settima decimale,

per cilindro pieno in basso $r = \pm 6,8$
" " " " alto $r = \pm 2,8$.

Assumendo, per esuberanza, l'error probabile di una riduzione all'arco cicloidale $= 7$ unità della 7ª decimale, mentre si vede che, in generale, è molto più piccolo, siccome il medio di agosto implica 52 riduzioni singole, l'error probabile della riduzione media sarà

$$\sqrt{\frac{49}{52}} = 1 \text{ unità della } 7^a \text{ decimale.}$$

Il medio di febbraio invece contiene 96 riduzioni e pertanto l'error probabile della riduzione media sarà

$$\sqrt{\frac{49}{96}} = 0,7 \text{ unità della } 7^a \text{ decimale.}$$

E in unità della 6ª decimale

error probabile della riduzione di agosto $= 0,10$
" " " " " febbraio $= 0,07$.

§ XLIII. *Riduzione all'amplitudine* zero *della durata di una oscillazione già ridotta all'arco cicloidale.*

Le osservazioni del febbraio 1886, istituite per determinare la durata di una oscillazione, furono, come già dissi, disposte in modo che potessero servire a ricercare se la durata dell'oscillazione, già ridotta all'arco infinitesimo, risulti indipendente dall'amplitudine nella quale furono osservate le oscillazioni.

Dalle Tabelle 50ª e 51ª, facendo per ogni giorno i medî delle riduzioni all'arco cicloidale, e cercando nella Tabella ausiliaria del § LIV le amplitudini corrispondenti,

indi facendo le differenze fra le durate medie delle colonne 5ª e 7ª, abbiamo gli elementi numerici della seguente

Tabella 52.ª

Febbraio 1886	Cilindro pieno					
	in basso			in alto		
	Amplitudine media della 1ª serie di oscillazioni	Amplitudine media della 2ª serie di oscillazioni	Differenza della durata dedotta dalle due serie in unità della 7ª decimale	Amplitudine media della 1ª serie di oscillazioni	Amplitudine media della 2ª serie di oscillazioni	Differenza della durata dedotta dalle due serie in unità della 7ª decimale
1	2	3	4	5	6	7
7	74′	44′	— 80	60′	23′	+ 330
8	80	48	— 47	62	23	+ 202
9	78	47	— 109	62	23	+ 80
16	83	50	— 22	57	22	+ 65
17	89	53	— 70	62	23	+ 96
18	87	52	— 155	66	24	+ 112
23	88	52	+ 4	62	23	— 207
24	88	51	+ 71	66	25	+ 38
Medî	83′.4	49′.6	— 51 ± 16	62′.1	23′.2	+ 90 ± 36

Da questi elementi risulta per *cilindro pieno in basso: aumento* della durata di una oscillazione, per una diminuzione di 33′,8 nell'amplitudine, eguale a 51 ± 16 unità della settima decimale. Perciò l'aumento della durata di oscillazione per la diminuzione di un minuto nell'amplitudine sarà = 1,5 unità della settima decimale.

E *per cilindro pieno in alto: diminuzione* della durata di una oscillazione, per la diminuzione di 38′,9 nell'amplitudine, 90 ± 36 unità della settima. Quindi *diminuzione unitaria* = 2,295 unità della settima decimale.

La entità delle differenze medie trovate, 51 e 90, considerata in relazione coi rispettivi errori probabili, rende credibile ch'esse sieno dovute a cause sistematiche piuttosto che a cause accidentali. E varrebbe certamente la pena di sottoporre questo punto a più esatta ricerca, per vedere a quale causa le differenze osservate sieno ascrivibili.

Applicando ai valori delle colonne 5ª e 7ª della Tabella 50ª le riduzioni all'amplitudine zero, registrate nelle colonne 2ª e 3ª della Tabella 53ª e risultanti dal fare i prodotti del quoziente + 1,5 per i valori delle rispettive amplitudini medie registrate nelle colonne 2ª e 3ª della Tabella 52ª, si ottengono i valori della durata di una oscillazione ridotti all'amplitudine *zero* delle colonne 4ª e 5ª della Tabella 53ª. Analogamente operando sulle colonne 5ª e 7ª della Tabella 51ª, servendosi del quoziente — 2,295, ottengonsi prima i numeri delle colonne 8ª e 9ª, poi quelli delle colonne 10ª e 11ª della Tabella 53ª.

TABELLA 53.ª

Febbraio 1886	Cilindro pieno in basso						Cilindro pieno in alto					
	Riduzione all'ampl. zero della 1ª serie	Riduzione all'ampl. zero della 2ª serie	Durata ridotta a zero della 1ª serie	Durata ridotta a zero della 2ª serie	Differenze	Media durata ridotta a zero delle due serie	Riduzione all'ampl. zero della 1ª serie	Riduzione all'ampl. zero della 2ª serie	Durata ridotta a zero della 1ª serie	Durata ridotta a zero della 2ª serie	Differenze	Media durata ridotta a zero delle due serie
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			1ˢ.0060	1ˢ.0060		1ˢ.0060			1ˢ.0060	1ˢ.0060		1ˢ.0060
7	+111	+ 66	622	657	— 35	640	—138	— 53	944	699	+245	822
8	120	72	610	609	+ 1	609	142	53	961	848	+113	904
9	117	72	564	628	— 64	596	142	53	850	859	— 9	855
16	125	75	705	677	+ 28	691	131	50	728	744	— 16	736
17	134	80	633	649	— 16	641	142	53	747	740	+ 7	744
18	130	78	461	564	—103	512	152	55	761	746	+ 15	754
23	132	78	591	529	+ 62	560	142	53	596	892	—296	744
24	+132	+ 77	603	477	+126	540	—152	— 57	718	775	— 57	747
Medî	125	75					—143	— 53				

Adottando, in mancanza di osservazioni apposite, i quozienti + 1,5 e — 2,295, dati dalle osservazioni di febbraio 1886, per ridurre all'amplitudine *zero* anche le durate osservate in agosto 1885 e registrate nelle Tabelle 48ª e 49ª ottengonsi i risultati contenuti nella seguente

TABELLA 54.ª

Agosto 1885	Cilindro pieno in basso			Cilindro pieno in alto		
	Amplitudine media	Riduzione all' amplitudine zero	Durata di una oscillazione ridotta a zero	Amplitudine media	Riduzione all' amplitudine zero	Durata di una oscillazione ridotta a zero
1	2	3	4	5	6	7
			1ˢ.006			1ˢ.006
5	75′	+ 113	(2108)	61′	— 140	(1687)
6	86	129	(1658)	65	149	(1396)
19	74	111	(1494) 1535 (1)	65	149	(1510) 1482
20	59	89	(1877) 1935 (2)	63	144	(1674) 1677
21	81	121	1664	60	138	1536
23	82	123	1876	55	126	1581
24	83	124	1657	62	142	1806
25	82	123	1724	53	122	1480
26	71	106	1715	53	122	1713
27	73	+ 110	1597	53	— 122	1606
Medî	76.6	+ 115		59 0	— 135	

(1) 1535 = $\frac{1}{4}$ (1658 + 3 × 1494), (2) 1935 = $\frac{1}{4}$ (2108 + 3 × 1877), ecc.

Osservazione. Si può notare che il medio valore della riduzione all'amplitudine zero, desunto dalle colonne 2ª, 3ª, 8ª e 9ª della Tabella 53ª, è

per cilindro pieno in basso = + 100 unità della 7ª ⎫ febbraio 1886
e per cilindro pieno in alto = — 98 " " " ⎭

e pertanto che, sulla media dei risultati ottenuti nelle due posizioni del cilindro, è di *una* sola unità della 7ª decimale.

Facendo lo stesso calcolo sulla Tabella 54ª abbiamo:

per cilindro pieno in basso = + 114 unità della 7ª ⎫ agosto 1885
" " " " alto = — 134 " " " ⎭

e pertanto, sulla media dei risultati ottenuti nelle due posizioni del cilindro, l'entità della riduzione negativa è di 10 unità della 7ª decimale.

Si vede che i risultati medî sono pressocchè indipendenti dalla causa che fa dipendere la durata dell'oscillazione, già ridotta all'arco cicloidale, dall'amplitudine media delle oscillazioni corrispondenti. Affinchè però l'indipendenza fosse completa, nell'adottato metodo di riduzione, bisognerebbe che le amplitudini delle oscillazioni nelle due posizioni reciproche del pendolo fossero in ragione inversa dei rispettivi quozienti di riduzione.

§ XLIV. *Error probabile della riduzione all'amplitudine* zero.

La riduzione all'amplitudine nulla è quella che presenta finora la maggiore incertezza, giacchè il coefficiente di tale riduzione da me adoperato è desunto da un numero di osservazioni abbastanza ristretto. E inoltre la forma stessa della correzione non è che ipotetica.

Dalla Tabella 52ª deducesi in unità della 7ª decimale

error probabile del coefficiente di riduzione

per cilindro pieno in basso ± 0,47
" " " " alto ± 0,92.

E pertanto l'*error probabile della riduzione in agosto*

per cilindro pieno in basso = ± 38,3 essendo l'amplitudine media 76',6 (Tab. 54ª)
" " " " alto = ± 54,2 " " " 59,0 "

e in *febbraio*

per cilindro pieno in basso = ± 33,3 essendo l'amplitudine media 66,5 (Tab. 52ª)
" " " " alto = ± 40,2 " " " 42,9 "

Poichè le durate di oscillazione, nelle due posizioni del cilindro, sono state combinate in un medio come se avessero eguale peso, considereremo le due durate come aventi error probabile comune eguale al medio aritmetico dei due errori parziali e l'errore del risultato si avrà allora dividendo il medio degli errori per $\sqrt{2}$. Avremo in unità della 6ª:

Agosto 1885

medio aritmetico degli errori probabili = ± 4,6
error probabile del risultato medio = ± 3,3.

Febbraio 1886

medio aritmetico degli errori probabili = ± 3,7
error probabile del risultato medio = ± 2,6.

§ XLV. *Durata definitiva della oscillazione nelle singole sere di osservazione e nel medio delle due serie espressa in tempo medio. Coefficiente di dilatazione del pendolo.*

Indicando con T_1 la durata dell'oscillazione a *cilindro pieno in basso* e con T_2 la durata a *cilindro pieno in alto*, se si applicano ai medî $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ delle colonne 4ª e 7ª della Tabella 54ª e ai medî delle colonne 7ª e 13ª della Tabella 53ª le correzioni

$$+\frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)}(T_1 - T_2)$$

indicate dalla equazione (37)′ a pag. 74; indi si riducono i tempi siderali in tempi medî sul dato che un secondo siderale corrisponde ad un secondo medio diminuito di $0^s,0027304$, si ottengono i numeri della seguente Tabella 55ª, nella quale sono riuniti, in un medio il risultato del 5 agosto con quello del 20, e in un altro medio il risultato del 6 con quello del 19 agosto, avendo dato ai risultati del 5 e 6 peso *uno* e agli altri due peso *tre*. Si intende che tali medî abbiano lo stesso peso dei valori ottenuti negli altri giorni.

Tabella 55.ª

1885 Agosto 1	Combinazione 2	Durata della oscillazione in tempo medio 3	1886 Febbraio 4	Combinazione 5	Durata della oscillazione in tempo medio 6
5-20	A *a*	$1^s.0034106$	7	A *a*	$1^s.0033023$
6-19	A *p*	4671	8	A *p*	2900
21	B *a*	4295	9	D *a*	2916
23	B *p*	4642	16	B *a*	3185
24	C *a*	4064	17	B *p*	3088
25	C *p*	4449	18	C *p*	2847
26	D *a*	4244	23	C *a*	2942
27	D *p*	4[illegible]18	24	D *p*	2903
Media = 1.0034323.6			Media = 1.0032975.5		

Considerando il massimo valore ottenuto per $T_1 - T_2$ si vede che, adoperando il valore del coefficiente $\frac{s_1 + s_2}{2(s_1 - s_2)}$ ricavato nel § XXXV, le correzioni qui sopra

calcolate colla (37)′ non eccedono mai le *quattrocento* unità della 7ª decimale. Bisognerebbe perciò che quel coefficiente fosse errato per $\frac{1}{800}$ del suo ammontare, affinchè l'errore della correzione arrivasse nel caso più sfavorevole a mezza unità della 7ª. Un tale errore del coefficiente vorrebbe dire un errore in $s_1 - s_2$ di $\frac{1}{800}$, cioè di quasi *mezzo* millimetro, la qual cosa non è certamente ammissibile [1].

Fra i due valori della durata ottenuti nelle due epoche passa la differenza:

$$\text{Durata di Agosto 1885} - \text{durata di Febbraio 1886} = + 0^s,0001348\,,$$

la quale, supposto che provenga unicamente dalla differenza di temperatura delle due epoche 23°,47 — 8°,90 = 14°,57, potrebbe servire a ridurre la durata dell'oscillazione alla temperatura *zero*. Dà anche un valore pel coefficiente γ di dilatazione del pendolo, cioè:

$$\gamma = 2\,\frac{0{,}0001348}{14{,}57} = 0{,}000\ 018\ 50.4\ .$$

Vedremo nel § XLVII che questo coefficiente concorda quasi esattamente con quello che si deduce per via da questa affatto indipendente.

§ XLVI. *Misura della differenza fra la distanza dei coltelli del pendolo e la lunghezza della scala* A.

Eseguito con cura nel corso della giornata l'aggiustamento dello strumento ed accertatomi che tutto era disposto opportunamente io passava ad eseguire le necessarie misure con un ordine prestabilito, il quale fu alcun poco diverso nei due periodi di osservazione.

[1] A solo scopo d'informazione, non perchè ve ne sia bisogno nelle riduzioni, riferisco le altezze barometriche ridotte a *zero* osservate alle 9 pom. nelle sere di osservazione.

Agosto 1885	Barometro a zero (mm)	Febbraio 1886	Barometro a zero (mm)
5	758.4	7	767.8
6	759.9	8	776.0
19	755.9	9	773.0
20	757.2	16	760.6
21	754.4	17	761.2
23	754.9	18	761.5
24	757.8	23	764.4
25	760.7	24	764.4
26	761.3	Media	766.1
27	759.2		
Media	758.0		

L'ordine delle osservazioni eseguite nell'Agosto 1885 per confrontare il pendolo colla scala e registrate nella Tabella 56ª, è palese dal seguente schema relativo al primo confronto eseguito nella sera del 5.

Ordine delle osservazioni registrate nella Tabella 56.ª

1885 Agosto 5. A . *a* . *i*.

		Colonna		
	Notazione dell'ora	3	11h.20m	
	Lettura ai termometri del comparatore			[1]
	Lettura al termometro n. 3 situato presso la scala	4	23°.80	
	» » » n. 2 » » » »	4	24.00	
Comparatore rivolto alla scala.	Puntamento e lettura alla divis. 10 del termom. metallico	5	µ 352.3	
	» » » » + 0.1 della scala	6	207.3	[2]
	» » » » 0.0 » »	6	306.8	
	» » » » 10 del termom. metallico	5	352.9	
	» » » » 1000.1 della scala	7	137.4	
	» » » » 1000.0 » »	7	240.0	
Comparatore rivolto al pendolo.	1° Puntamento e lettura al coltello superiore	8	255.0	
	2° » » » »	8	255.0	
	1° » » » inferiore	9	308.2	
	2° » » » »	9	307.8	
	1° » » » inferiore	9	308.2	
	2° » » » »	9	308.1	
	1° » » » superiore	8	254.0	
	2° » » » »	8	255.0	
Comparatore rivolto alla scala.	Puntamento e lettura alla divis. 1000.0 della scala	7	243.0	
	» » » » 999.9 » »	7	340.8	
	» » » » 10 del termom. metallico	5	356.0	
	» » » » 0.0 della scala	6	308.0	
	» » » » — 0.1 » »	6	408.7	
	» » » » 10 del termom. metallico	5	356.8	
	Lettura al termometro n. 2 situato presso la scala	4	24°.06	
	» » » n. 3 » » » »	4	23.80	
	Lettura ai termometri del comparatore			
	Notazione dell'ora	3	11h.40m	

In tutto sono trenta letture eseguite in media nell'intervallo di 17 minuti.

(1) Nella Tabella 56ª non sono riferite le indicazioni dei termometri del comparatore.

(2) Nella Tabella stessa delle letture alle divisioni ausiliarie sono registrate soltanto le unità ed i decimi. Lo stesso dicasi per le seconde letture ai coltelli.

Nei confronti istituiti in *febbraio* 1886, i cui risultati sono esposti nella Tabella 57ª, fu seguito l'ordine dello schema seguente relativo al primo confronto della sera 7 febbraio.

Ordine delle osservazioni registrate nella Tabella 57.ª

1886 Febbraio 7. A . *a* . *s* .

		Colonna	
	Notazione dell'ora	3	$9^h.22^m$
	Lettura al termometro n. 3 situato presso la scala	4	9°.28
	» » » n. 2 » » » »	4	9 . 22
Comparatore rivolto alla scala	Puntamento e lettura alla divis. 10 del termom. metallico	5	μ 043.2
	» » » » 0 della scala	6	187.2
	» » » » 0 » »	6	189.0
	» » » » 10 del termom. metallico	5	044.0
	» » » » + 0.1 della scala	7	088.0
	» » » » 0.0 » »	7	188.0
Comp. rivolto al pendolo	1° Puntamento e lettura al coltello inferiore	8	264.8
	2° » » » »	8	265.0
	1° » » » superiore	9	264.0
	2° » » » »	9	261.6
Comp. rivolto alla scala	Puntamento e lettura alla divis. 1000.1 della scala	10	063.0
	» » » » 1000.0 » »	10	164.0
	» » » » 1000.0 » »	10	164.0
	» » » » 999.9 » »	10	265.7
Comp. rivolto al pendolo	1° Puntamento e lettura al coltello superiore	9	264.0
	2° » » » »	9	262.4
	1° » » » inferiore	8	264.8
	2° » » » »	8	265.6
Comparatore rivolto alla scala	Puntamento e lettura alla divis. 0 della scala	7	191.0
	» » » » — 0.1 » »	7	290.0
	» » » » 0 » »	6	191.0
	» » » » 10 del termom. metallico	5	046.5
	» » » » 10 » » »	5	045.8
	» » » » 0 della scala	6	190.7
	Lettura al termometro n. 2 situato presso la scala	4	9°.40
	» » » n. 3 » » » »	4	9 . 60
	Notazione dell'ora	3	$9^h.35^m$

In tutto sono trenta letture eseguite in media nell'intervallo di 13 minuti.

Le differenze fra i due ordini sono queste:

a) Nelle osservazioni di febbraio è soppressa la lettura ai termometri annessi al comparatore, avendo le osservazioni di agosto dimostrato che la indicazione media di essi coincide quasi esattamente con quella dei due termometri situati presso la scala.

b) Mentre in agosto la lettura al termometro metallico implica quella lettura allo zero della scala, che serve anche nella comparazione della scala col pendolo, in febbraio le letture per la comparazione sono interamente indipendenti da quelle al termometro metallico, e ciò collo scopo di poter variare in tutti i modi (come realmente si fece) l'ordine dei confronti incominciando successivamente i puntamenti dalla scala, dal pendolo, dal basso e dall'alto.

c) Nel primo procedimento, facendo seguire immediatamente il puntamento sopra una estremità della scala a quello fatto sull'altro estremo e il puntamento sopra un coltello a quello sull'altro ([1]), si viene veramente a confrontare le due lunghezze e si suppone implicitamente che, nel breve intervallo della misura di una d'esse, la posizione del comparatore e la sua lunghezza (fra i due microscopî) non variino rispetto all'oggetto misurato. Nel secondo processo si fa seguire immediatamente il puntamento su una estremità della scala da quello al coltello più vicino o vice-versa. In tal maniera si misura la differenza di altezza dei due oggetti presi successivamente di mira, e si suppone implicitamente che, nella rotazione del comparatore, non varii l'altezza del microscopio.

d) Nel primo processo il comparatore deve essere fatto girare intorno alla verticale un numero di volte metà di quello del secondo processo. Invece in quello l'operatore è obligato a passare due volte dal microscopio inferiore al superiore e due volte dal superiore all' inferiore, mentre nel secondo processo il passaggio avviene una volta soltanto in ciascuna delle due direzioni. Per tale motivo il secondo processo riesce sensibilmente meno faticoso e più breve del primo.

I due processi si accordano in questo, che ogni misura, sia di lunghezza, sia di differenza di livello, viene eseguita così nell'uno come nell'altro due volte e in ordine inverso, per cui il medio dei due risultati può considerarsi come libero dalla influenza di piccole variazioni del comparatore avvenute durante le misure.

Inoltre tanto in un processo, quanto nell'altro, l'ordine dei puntamenti è così fatto, che il medio dei tempi dei due puntamenti al medesimo oggetto è lo stesso per tutti quattro gli oggetti presi di mira (cioè le due estremità della scala e i tagli dei due coltelli).

Proseguendo ora nella spiegazione delle Tabelle 56ª e 57ª è da notare, che i numeri della colonna 10ª della Tabella 56ª sono i medî dei quattro numeri registrati nella colonna 4ª. Nella Tabella 57ª invece il medio delle quattro letture termometriche della colonna 4ª è registrato nella colonna 11ª.

I numeri della colonna 11ª, Tabella 56ª, sono ottenuti sottraendo dalla media dei numeri della 5ª colonna aumentati di 1000^{p}, la media dei numeri della colonna 6ª.

([1]) Quest'ordine dei puntamenti mi è stato suggerito da uno schema manoscritto cortesemente favoritomi dal defunto prof. Oppolzer in occasione della mia gita a Vienna nell'ottobre del 1880 (v. Prefazione a pag. 46).

I numeri della colonna 12ª, Tabella 57ª, sono formati in analogo modo con quelli delle colonne 5ª e 6ª.

Il numero positivo crescente di giri e frazioni di giro del micrometro, in ognuno dei microscopî, corrisponde a movimento ascendente dei fili micrometrici, e le immagini degli oggetti osservati mediante i microscopî sono rovesciate. Viene da ciò che l'oggetto a cui corrisponde la lettura micrometrica minore trovasi più alto di quello a cui corrisponde la lettura maggiore.

Con tale avvertenza sottraendo nella Tabella 56ª rispettivamente i numeri delle colonne 8ª e 9ª dai numeri delle colonne 7ª e 6ª e raccogliendo in medî le differenze prese quattro a quattro, si hanno i numeri delle colonne 12ª e 13ª, i quali danno rispettivamente le depressioni (segno negativo) dei coltelli superiore ed inferiore relativamente alle due corrispondenti estremità della scala. I numeri dell'ultima colonna esprimono i valori osservati dell'aggiunta da fare alla lunghezza della scala per avere la distanza dei coltelli. Tali valori essendo sempre negativi vuol dire che la distanza dei coltelli è minore della lunghezza della scala.

Analogamente nella Tabella 57ª sottraendo i numeri delle colonne 9ª e 8ª dai numeri delle colonne 10ª e 7ª e aggruppando come prima in medî le differenze prese a quattro per volta, si ottengono i numeri delle colonne 13ª e 14ª e da questi quelli della 15ª.

TABELLA 56.ª

Agosto 1885	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine di ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura sulla divisione 10ª del termom. metallico	Scala		Coltello		Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello		Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
					divisione zero	divisione 1 metro	superiore	inferiore			superiore e la div. 1 m.	inferiore e la div. zero	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	o	μ	μ	μ	μ
5	A *a* *i*	11.20	23.80	352.3	306.8	240.0	255.0	307.8					
			24.00	352.9	7.3	37.4	5.0	8.2			—	—	—
			24.06	356.0	308.0	243.0	254.0	308.2					
		11.40	23.80	356.8	8.7	40.8	5.0	8.1	23.92	1046.3	14.5	0.4	14.1
»	» » *s*	13.20	23.80	361.0	315.0	246.0	269.2	315.8					
			24.10	361.3	4.3	5.0	7.0	4.6					
			24.08	361.9	315.7	249.3	268.1	316.0					
		13.37	23.92	362.3	5.5	8.2	9.3	5.8	23.97	1046.5	21.3	0.4	20.9

Agosto 1885	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine di ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura sulla divisione 10ª del termom. metallico	Scala		Coltello		Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello		Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
					divisione zero	divisione 1 metro	superiore	inferiore			superiore e la div. 1 m.	inferiore e la div. zero	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	o	μ	μ	μ	μ
6	A *p s*	11. 5	24.03	353.8	307.0	239.6	260.0	307.0					
			24.25	354.2	6.0	6.1	56.8	9.4			—	—	—
			24.28	355.9	308.0	239.7	258.7	309.0					
		11.27	24.00	356.6	7.1	9.6	9.0	7.4	24.14	1048.1	19.9	1.3	18.6
»	» » *i*	13. 6	24.20	362.6	313.2	245.9	267.9	317.0					
			24.24	363.0	2.8	3.0	8.0	7.9					
			24.32	365 0	312.5	247.2	268.6	316.8					
		13.27	24.00	364.9	2.5	6.3	7.6	7.0	24.19	1051.1	21.9	4.4	17.5
19	A *p i*	10.58	23.88	367.0	320.6	248.6	273.7	322.4					
			24.15	369.4	1.2	8.2	1.0	0.3					
			24.23	369.4	321.3	254.0	272.9	322.6					
		11.21	23.90	371.4	1.5	2.0	3.6	0.9	24.04	1048.2	23.1	0.4	22.7
»	» » *s*	13.19	24.10	375.0	325.7	254.2	286.0	326.2					
			24.28	375.9	6.0	4.2	6.2	4.1					
			24.28	376.5	324.6	257.1	283.0	326.0					
		13.39	24.02	377.5	4.5	7.7	5.0	4.7	24.17	1051.1	29.2	0.0	29.2
20	A *a s*	10.59	23.92	363.8	319.0	249.0	272.2	325.0					
			24.08	363.9	9.0	9.1	1.2	6.0					
			24.08	367.0	320.8	253.3	271.0	327.0					
		11.12	23.97	367.3	0.3	0.3	1.3	6.0	24.01	1045.7	21.0	6.2	14.8
»	» » *i*	12.56	24.05	378.3	329.5	261.2	287.3	333.8					
			24.18	379.0	9.7	59.4	7.9	3.8					
			24.25	380.0	329.7	261.4	286.5	333.4					
		13.11	24.06	380.8	30.5	1.2	7.5	4.7	24.14	1049.7	26.0	4.1	21.9
21	B *a i*	10.42	24.00	372.8	323.4	254.6	277.4	328 4					
			24 12	372.6	5.0	3.8	8.1	8.1					
			24.20	371.7	325.6	255.5	278.7	329.0					
		10.58	24.00	374.1	6.5	6.1	6.7	8.9	24.08	1047.7	22.7	3.5	19.2
»	» » *s*	12.41	24.15	383.0	331.9	260.7	285.3	337.0					
			24.25	381.0	1.5	0.4	7.5	6.5					
			24.18	381.1	331.7	264.1	284.6	336.3					
		12.58	24.00	380.4	0.4	4.2	5.6	5.7	24.15	1050.0	23.4	5.0	18.4

Agosto 1885	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine di ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura sulla divisione 10ª del termom. metallico	Scala		Coltello		Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello		Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
					divisione zero	divisione 1 metro	superiore	inferiore			superiore e la div. 1 m.	inferiore e la div. zero	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	o	μ	μ	μ	μ
23	B *p s*	10.39	23.85	362.8	319.8	247.8	269.0	324.8					
			24.05	364.8	8.4	7.0	71.6	5.3			—	—	—
			24.14	368.6	321.8	251.2	271.8	325.4					
		10.54	23.90	370.0	0.7	1.0	0.9	4.3	23.99	1046.4	21.6	4.8	16.8
»	» » *i*	12.45	24.00	378.3	328.5	259.0	282.0	334.7					
			24.15	378.6	8.3	8.6	79.8	4.2					
			24.18	379.0	329.5	260.6	280.0	334.4					
		13. 0	24.00	380.5	30.2	0.0	3.0	6.6	24.08	1050.0	21.7	5.9	15.8
24	C *a i*	10.55	24.00	368.0	319.7	250.0	273.0	331.8					
			24.12	367.4	9.4	0.0	2.5	0.3					
			24.23	369.3	321.3	251.0	272.8	330.5					
		11. 9	24.00	370.4	1.2	1.2	2.5	1.0	24.09	1048.4	22.1	10.4	11.6
»	» » *s*	13. 5	24.10	382.6	331.5	262.2	283.8	334.4					
			24.35	383.8	1.0	2.0	3.0	5.3					
			24.35	382.6	332.7	264.9	283.7	334.5					
		13.20	24.12	385.3	1.8	3.5	3.7	5.4	24.23	1051.8	20.4	3.1	17.3
25	C *p s*	10.49	24.06	369.0	323.1	254.3	272.0	327.0					
			24.16	369.1	1.8	2.8	3.0	6.7					
			24.28	370.7	323.7	255.0	273.2	328.9					
		11. 5	24.00	371.0	3.0	4.4	2.7	6.8	24.12	1047.1	18.6	4.4	14.2
»	» » *i*	13. 8	24.18	382.0	331.9	262.6	283.3	336.4					
			24.30	383.4	1.0	2.5	4.5	7.3					
			24.36	382.4	331.0	264.0	284.6	336.4					
		13.24	24.18	383.3	0.6	3.0	3.7	6.3	24.25	1051.6	21.0	5.5	15.5
26	D *a i*	10.14	23.95	369.5	322.5	254.9	276.3	333.2					
			24.16	369.9	2.5	3.7	6.3	4.2					
			24.16	371.5	323.0	257.4	277.6	333.2					
		10.29	24.00	372.2	2.9	6.2	7.1	2.7	24.07	1048.1	21.3	10.6	10.7
»	» » *s*	12.36	24.09	384.7	332.8	265.9	287.0	340.4					
			24.20	385.3	3.6	5.0	5.6	0.2					
			24.27	385.4	334.2	268.2	286.3	341.0					
		12.53	24.08	386.1	3.7	6.6	7.6	0.5	24.16	1051.8	20.2	7.0	13.2

Agosto 1885	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine di ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura sulla divisione 10ª del termom. metallico	Scala		Coltello		Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello		Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
					divisione zero	divisione 1 metro	superiore	inferiore			superiore e la div. 1 m.	inferiore e la div. zero	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		h m	°	μ	μ	μ	μ	μ	°	μ	μ	μ	μ
27	D *p* *i*	10.14	24.06	372.3	325.2	256.2	278.7	330.3					
			24.20	373.4	6.0	6.1	7.3	0.4			—	—	—
			24.22	374.6	326.4	259.0	276.7	331.1					
		10.29	24.00	375.0	6.4	8.2	8.0	29.8	24.12	1048.0	20.6	4.4	16.2
»	» » *s*	12.35	24.18	386.9	334.6	267.7	285.4	334.6					
			24.36	387.2	5.2	6.9	6.7	8.3					
			24.36	387.6	335.6	269.8	286.1	336.2					
		12.52	24.20	387.5	5.4	9.6	6.6	7.0	24.28	1052.1	17.7	1.6	16.1

Tabella 57.ª

Febbraio 1886	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine d'ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura alla divis. 10ª del termom. metallico	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura al coltello		Lettura alla divis. 1 m. della scala	Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello		Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
							inferiore	superiore				superiore e la div. 1 m.	inferiore e la div. zero	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		h m	°	μ	μ	μ	μ	μ	μ	°	μ	μ	μ	μ
7	A *a* *s*	9.22	9.28	043.2	187.2	188.0	265.0	261.6	164.0					
			9.22	4.0	9.0	8.0	4.8	4.0	3.0			—	—	—
			9.40	046.5	191.0	191.0	264.8	264.0	164.0					
		9.35	9.60	5.8	0.7	0.0	5.6	2.4	5.7	9.38	855.4	98.8	75.8	23.0
	» » »	10.52	9.76	056.7	197.5	197.9	276.3	272.1	175.0					
			9.73	5.8	7.9	7.5	8.7	5.0	4.9					
			9.60	058.9	198.9	199.0	280.6	273.3	176.3					
		11. 5	9.80	8.0	9.7	200.0	79.4	4.8	7.8	9.72	858.8	97.8	80.2	17.6
	» » *i*	11.40	9.53	064.6	204.0	204.2	283.3	283.0	184.2					
			9.60	4.8	4.3	4.5	2.2	0.0	3.2					
			9.60	065.0	205.2	204.1	282.2	280.7	184.0					
		11.53	9.80	5.1	5.0	4.2	3.7	1.1	3.1	9.63	860.2	97.6	78.6	19.0
	» » »	13.15	9.80	064.0	205.0	204.1	281.0	279.6	184.0					
			9.73	4.0	5.0	3.9	2.9	80.6	2.3					
			9.67	065.9	205.7	205.0	282.3	279.0	181.8					
		13.27	9.80	5.8	5.1	4.3	4.0	82.0	1.2	9.75	859.7	98.0	78.3	19.7

Febbraio 1886	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine d'ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura alla divis. 10^4 del termom. metallico	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura al coltello inferiore	Lettura al coltello superiore	Lettura alla divis. 1 m. della scala	Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello superiore e la div. 1 m.	Differenza di altezza fra il coltello inferiore e la div. zero	Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ	o	μ	μ	μ	μ
8	A *p i*	9. 5	9.22	038.2	183.2	183.0	264.0	259.4	159.5					
			9.20	7.6	4.0	4.8	0.6	60.8	7.2			—	—	—
			9.20	040.9	186.2	186.3	264.2	260.6	158.8					
		9.17	9.60	1.1	6.0	5.6	4.9	1.3	60.3	9.31	854.6	101.6	79.5	22.1
	» » »	10.41	9.62	049.0	192.2	193.9	276.7	269.9	171.4					
			9.62	50.0	3.3	4.0	6.1	9.7	1.6					
			9.60	053.4	195.7	194.8	277.5	270.8	171.4					
		10.55	9.72	3.8	5.0	5.0	7.0	1.7	1.4	9.64	857.5	99.1	82.4	16.7
	» » *s*	11.38	9.48	060.2	199.2	199.7	278.9	285.2	181.0					
			9.48	0.3	200.0	9.9	7.5	5.3	2.5					
			9.55	061.2	201.7	200.4	278.8	286.3	181.1					
		11.50	9.73	0.2	1.1	1.0	8.7	4.7	1.6	9.56	860.0	103.8	78.3	25.7
	» » »	13. 6	9.62	058.2	199.2	199.0	277.0	281.0	178.2					
			9.64	60.1	8.7	9.0	6.1	3.2	7.6					
			9.60	059.8	200.5	199.0	278.1	281.7	176.0					
		13.17	9.75	61.0	199.3	200.7	7.0	2.2	8.3	9.65	860.3	104.5	77.7	26.8
9	D *a i*	8.57	9.10	034.0	180.0	181.0	259.3	255.6	154.6					
			9.20	6.0	0.2	0.0	7.6	3.7	4.4					
			9.40	038.3	183.0	182.0	260.6	256.3	154.6					
		9.11	9.60	8.7	2.3	2.1	1.1	5.2	4.3	9.32	855.4	100.8	78.4	22.4
	» » »	10.35	9.60	048.7	192.6	191.9	274.1	267.1	166.9					
			9.67	9.3	2.4	1.6	4.1	9.1	6.0					
			9.48	052.0	194.0	193.7	274.1	269.8	167.0					
		10.47	9.70	1.8	4.0	3.0	5.5	70.9	7.3	9.61	857.2	102.4	81.9	20.5
	» *a s*	11.20	9.45	064.0	204.0	203.8	276.3	278.7	181.1					
			9.48	4.0	3.1	3.2	6.0	9.6	1.0					
			9.56	064.6	204.4	205.0	277.9	278.4	182.5					
		11.32	9.73	5.0	4.0	3.6	5.9	7.5	3.0	9.56	860.5	96.7	72.7	24.0
	» » »	11.52	9.64	061.0	201.4	200.7	276.9	272.1	176.7					
			9.62	1.0	1.4	1.0	5.0	0.6	7.0					
			9.60	061.2	201.9	201.1	274.9	271.7	176.3					
		13. 3	9.75	2.1	1.7	1.9	4.8	1.9	7.0	9.65	859.7	94.8	74.3	20.5

Febbraio 1886	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine d'ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura alla divis. 10a del termom. metallico	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura al coltello		Lettura alla divis. 1 m. della scala	Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello		Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
							inferiore	superiore				superiore e la div. 1 m.	inferiore e la div. zero	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ					
16	B *a s*	8.43	9 22	027.1	174.0	175.1	246.1	245.4	148.3					
			9.18	7.0	4.0	4.9	7.1	4.7	8.2			—	—	—
			9.20	030.4	175.8	175.9	247.7	246.4	148.2	o	μ	μ	μ	μ
		8.56	9.30	29.0	6.0	4.4	9.1	6.0	8.6	9.22	853.4	97.3	72.4	24.9
	" " "	10.20	9.52	037.1	183.0	183.2	258.3	257.7	158.2					
			9.40	7.3	2.9	2.6	9.4	6.1	8.1					
			9.40	041.7	185.3	184.1	257.3	256.1	160.4					
		10.33	9.52	1.8	5.1	5.3	9.9	6.9	59.2	9.46	855.4	97.7	74.9	22.8
	" " *i*	11.13	9.30	050.0	191.2	190.9	264.2	264.0	169.4					
			9.26	48.8	1.1	89.9	6.5	4.0	7.3					
			9 40	049.7	190.9	190.8	266.3	263.1	169.2					
		11.26	9.50	9.3	89.7	0.9	6.4	4.2	8.3	9.37	858.7	95.3	75.3	20.0
	" " "	12.58	9.48	048.0	190.7	191.0	264.3	262.7	166.1					
			9.42	8.0	2.0	0.1	4.9	1.7	6.1					
			9.40	049.8	192.2	192.0	266.1	263.2	166.0					
		13.10	9.52	9.5	1.2	2.2	5.6	3.0	6.8	9.45	857.3	96.9	73.9	23.0
17	B *p s*	9.14	9.12	030.3	177.0	178.0	251.0	251.3	151.7					
			9.06	0.9	8.4	8.0	1.0	0.0	1.2					
			9.28	034.0	180.6	180.9	251.6	252.0	152.3					
		9.26	9.35	4.1	0.3	0.4	0.3	2.1	1.3	9.20	853.2	99.9	71.7	28.2
	" " "	10.47	9.55	044.0	188.0	189.0	262.6	262.0	163.6					
			9.42	4.4	9.0	8.6	3.1	0.4	4.4					
			9.42	046.0	191.2	190.8	263.9	261.7	166.0					
		10.58	9.58	5.1	1.0	89.7	3.7	59.8	6.0	9.49	855.1	96.0	73.8	22.2
	" " *i*	11.29	9.40	052.7	195.5	194.8	269.6	270.3	173.8					
			9.28	3.0	5.0	5.0	71.0	0.2	2.6					
			9.40	054.8	196.1	197.0	271.7	271.8	173.1					
		11.42	9.60	5.0	7.0	5.2	2.1	1.8	3.1	9.42	858.0	97.9	75.6	22.3
	" " "	13. 1	9.60	052.0	193.7	195.0	270.3	269.2	171.6					
			9.56	3.8	5.1	4.8	1.3	8.9	2.0					
			9.52	054.9	197.1	196.0	271.6	271.2	171.2					
		13.12	9.62	4.7	5.9	6.9	2.1	69.4	1.8	9.58	858.4	98.1	75.7	22.4

Febbraio 1886	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine d'ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura alla divis. 10ª del termom. metallico	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura al coltello inferiore	Lettura al coltello superiore	Lettura alla divis. 1 m. della scala	Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello superiore e la div. 1 m.	Differenza di altezza fra il coltello inferiore e la div. zero	Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ	o	μ	μ	μ	μ
18	C *p i*	8.43	9.40	048.0	188.6	188.0	263.3	259.0	162.6					
			9.40	8.2	8.5	8.6	3.0	9.6	1.1			—	—	—
			9.77	050.1	189.0	188.0	261.7	259.3	160.6					
		8.56	9.60	48.3	9.1	8.6	2.7	9.6	2.0	9.54	859.8	98.1	74.4	23.7
	» » »	10.23	9.80	057.4	195.1	196.0	270.2	266.9	171.5					
			9.80	6.4	4.7	5.0	0.8	7.1	0.0					
			9.80	058.8	197.0	196.7	272.2	266.9	172.0					
		10.36	9.92	9.0	7.1	7.3	2.2	5.6	1.4	9.83	861.9	95.4	75.1	20.3
	» » *s*	11.14	9.68	065.1	200.9	199.7	273.2	274.9	179.1					
			9.68	4.7	1.1	200.4	4.1	4.2	7.8					
			9.80	065.9	201.3	201.3	273.8	274.2	177.2					
		11.27	9.97	5.7	2.0	0.0	5.0	4.9	8.1	9.78	864.0	96.3	73.7	22.6
	» » »	12.45	9.82	063.8	199.8	200.0	273.2	274.2	175.6					
			9.86	3.2	200.8	199.6	4.8	3.2	5.4					
			9.78	065.0	200.0	200.6	275.3	272.8	176.3					
		12.57	9.92	5.2	2.0	0.8	6.2	3.9	5.7	9.85	863.2	97.8	74.7	23.1
23	C *a s*	8.28	9.15	024.8	172.0	172.0	246.7	244.4	147.1					
			9.08	5.8	2.0	1.3	9.5	4.4	4.7					
			9.23	028.0	173.9	174.7	249.4	246.7	148.0					
		8.40	9.36	7.0	5.6	3.9	9.3	4.1	5.2	9.20	853.0	98.7	75.8	22.9
	» » »	10. 2	9.47	039.8	184.4	184.0	259.1	257.1	159.7					
			9.44	9.2	4.8	4.4	9.9	4.4	9.1					
			9.42	042.1	186.9	186.3	261.8	255.8	160.7					
		10.14	9.53	2.1	6.7	6.2	1.2	4.9	1.0	9.47	855.1	95.5	75.3	20.2
	» » *i*	10.49	9.30	047.1	189.7	190.0	266.0	264.9	169.2					
			9.28	8.1	90.0	89.6	6.2	4.6	8.7					
			9.41	050.6	191.7	191.9	268.3	265.3	170.0					
		11. 1	9.56	1.1	2.7	1.1	7.3	5.0	69.4	9.39	858.2	95.7	76.3	19.4
	» » »	12.22	9.56	047.5	189.8	189.8	267.1	262.7	167.0					
			9.48	7.0	9.8	9.1	6.4	2.0	5.3					
			9.48	049.4	191.8	191.1	268.6	262.4	165.2					
		12.34	9.60	8.6	1.9	2.0	8.6	2.4	6.4	9.53	857.3	96.4	77.2	19.2

Febbraio 1886	Disposizione dei coltelli e posizione della firma	Ora del principio e della fine d'ogni confronto	Termometri a mercurio	Lettura alla divis. 10ª del termom. metallico	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura alla divisione 0 della scala	Lettura al coltello		Lettura alla divis. 1 m. della scala	Medio dei termometri a mercurio	Medio del termometro metallico	Differenza di altezza fra il coltello		Distanza dei coltelli meno lungh. della scala
							inferiore	superiore				superiore e la div. 1 m.	inferiore e la div. zero	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		h m	o	μ	μ	μ	μ	μ	μ					
24	D *p s*	9.31	9.15	030.2	177.0	177.6	245.8	247.1	152.7					
			9.04	1.6	7.2	8.2	6.6	8.1	1.0			—	—	—
			9.22	033.0	178.7	178 2	247.2	247.4	150.9	o	μ	μ	μ	μ
		9.44	9.35	2.7	80.8	8.2	8.7	8.8	1.2	9.19	853.4	96.3	69.0	27.[illegible]
	" " "	11. 3	9.50	041.3	186.8	188.0	256.2	260.4	162.7					
			9.43	2.1	7.0	6.8	9.0	59.3	1.9					
			9.47	044.6	188.7	189.0	258.6	259.2	163.7					
		11.15	9.53	5.2	9.0	9.0	8.9	60.0	3.9	9.48	855.4	96.7	70.0	26.7
	" " *i*	11.50	9.47	052.1	195.2	194.0	267.2	266.2	172.9					
			9.40	2.3	4.0	5.3	4.9	4.6	1.8					
			9.52	051.9	194.9	195.7	266.7	266.7	172.6					
		12. 2	9. .0	2.2	5.0	4.3	6.9	5.8	1.7	9.50	857.3	93.6	71.6	22.[illegible]
	" " "	13.22	9.62	050.4	192.4	192.7	265.2	267.1	168.0					
			9.48	49.1	1.5	1.7	5.3	5.0	8.1					
			9.48	051.1	193.0	193.0	266.5	266.4	168.9					
		13.34	9.60	2.8	2.0	2 5	5.9	6.3	8.2	9.55	858.6	97.9	73.3	24.[illegible]

§ XLVII. *Distanza media dei coltelli nelle singole sere di osservazione e nel medio delle due serie. Coefficiente relativo di dilatazione del pendolo rispetto alla scala* A *e conseguente nuova determinazione del coefficiente di dilatazione del pendolo essendo noto il cofficiente della scala* A.

Nel riunire in medî le differenze ottenute nelle singole sere si dovrebbe dare a tutti i valori delle differenze stesse il medesimo peso. Ma poichè, trattandosi delle durate di oscillazione, si sono riuniti in due medî i quattro risultati ottenuti nelle sere del 5, 6, 19 e 20 agosto attribuendo loro pesi diversi, lo stesso faremo per le corrispondenti differenze. Si ottengono così le differenze medie delle colonne 3ª e 7ª della seguente tabella. Applicando poi tali differenze medie rispettivamente alle lunghezze della scala A ,

$1^m,000^{mm}397^{\mu},0$ valevole per $23^{\circ},47$,

1 , 000   133 , 4   "   "   8 , 90 ,

si hanno le lunghezze registrate nelle colonne 4ª e 8ª.

TABELLA 58.ª

1885 Agosto	Combinazione	Distanza dei coltelli meno scala A	Distanza dei coltelli (23°.47)	1886 Febbraio	Combinazione	Distanza dei coltelli meno scala A	Distanza dei coltelli (8°.90)
1	2	3	4	5	6	7	8
5-20	A *a*	— 18.2 μ	m mm μ 1.000 378.8	7	A *a*	— 19.8 μ	m mm μ 1.000 113.6
6-19	A *p*	— 24 0	73.0	8	A *p*	— 22.8	10.6
21	B *a*	— 18.8	78.2	9	D *a*	— 21.9	11.5
23	B *p*	— 16.3	80.7	16	B *a*	— 22.7	10.7
24	C *a*	— 14.5	82.5	17	B *p*	— 23.8	09.6
25	C *p*	— 14.8	82.2	18	C *p*	— 22.4	11.0
26	D *a*	— 12.0	85.0	23	C *a*	— 20.4	13.0
27	D *p*	— 16.1	80.9	24	D *p*	— 25.2	08.2
	Medie	— 16.84	1.000 380.2		Medie	— 22.38	1.000 111.0

Raggruppando le differenze in medie secondo ogni una delle quattro combinazioni, e scrivendo accanto a tali medie le temperature medie corrispondenti, otteniamo i numeri della seguente

TABELLA 59.ª

Combinazione	Agosto 1885		Febbraio 1886	
	Temperatura	Distanza dei coltelli meno scala A	Temperatura	Distanza dei coltelli meno scala A
1	2	3	4	5
A	23.43 °	— 19.96 μ	8.97 °	— 21.32 μ
B	23.43	— 17.55	8.79	— 23.22
C	23.52	— 14.65	8.96	— 21.42
D	23.52	— 14.05	8.87	— 23.50
Medî	23.47	— 16.55	8.90	— 22.37

Di qui si trae, in media, che, per una variazione di temperatura di $23°.47 - 8°.90 = 14°.57$, la differenza fra la distanza dei coltelli e la lunghezza della scala A ha variato di $5^{\mu},82$ in questo senso, che la distanza dei coltelli cresce al crescere della temperatura più di quello che faccia la scala. Pertanto il coefficiente di dilatazione γ del pendolo sarà più grande di quello δ della scala A di

$$\gamma - \delta = \frac{1^{\circ} \times 5^{\mu},8}{1^{m} \times 14^{\circ},57} = 0,000\ 000\ 40\ .$$

E poichè il coefficiente di A è $\delta = 0{,}000\ 018\ 09$, il coefficiente di dilatazione del pendolo sarà

$$\gamma = 0{,}000\ 018\ 49\,,$$

il quale valore, come si vede, corrisponde quasi a capello col valore ottenuto nel § XLV per via affatto diversa.

§ XLVIII. *Error probabile della distanza dei coltelli.*

È necessario premettere una considerazione relativa alla correzione di temperatura.

Sieno δ e γ rispettivamente i coefficienti di dilatazione lineare della scala e del pendolo e sia Δ la differenza fra la distanza D dei coltelli e la lunghezza A della scala. Indichiamo tale differenza con

$$\Delta_0 = D_0 - A_0 \text{ alla temperatura } zero\,,$$
$$\Delta_t = D_t - A_t \quad " \quad " \quad t\,,$$
$$\Delta_{t'} = D_{t'} - A_{t'} \quad " \quad " \quad t'\,,$$

e avremo le due equazioni:

$$\Delta_t = \Delta_0 + 1^m (\gamma - \delta)\, t$$
$$\Delta_{t'} = \Delta_0 + 1^m (\gamma - \delta)\, t',$$

dalle quali:

$$\Delta_{t'} - \Delta_t = 1^m (\gamma - \delta)\,(t' - t)\,,$$

giacchè pel calcolo del termine in $\gamma - \delta$ si può, senza tema di errore sensibile, ritenere $D_0 = A_0 = 1^m$. E poichè, come si è già veduto a pag. 261,

$$\gamma - \delta = 0{,}000\ 000\ 4$$

avremo

$$\Delta_{t'} - \Delta_t = 0^\mu{,}4\,(t' - t)\,.$$

Il massimo scostamento della temperatura osservata dalla media si ebbe in febbraio 1886 e fu $= -0^\circ{,}31$ (v. pag. 225, Tabella 43ª), mentre nelle osservazioni di agosto non fu che $+0^\circ{,}19$ (v. pag. 224, Tabella 42ª). Ponendo $t' - t = 0^\circ{,}31$, la massima correzione che sarebbe da applicare alle differenze osservate Δ_t, per ridurle alla temperatura media, sarebbe:

$$0^\mu{,}4 \times 0{,}31 = 0^\mu{,}12\,.$$

Considerando la piccolezza di tale correzione, *è lecito ritenere le differenze osservate in agosto come tutte misurate alla temperatura media* 23°,47, *e quelle osservate in febbraio come tutte ottenute alla temperatura media* 8°,90.

Ciò posto, la prima ricerca che si può fare sull'ultima colonna delle Tabelle 56ª, a pag. 253, e 57ª, a pag. 256, è quella di vedere se, in media, vi abbia differenza fra la distanza dei coltelli mentre il cilindro pieno è in basso e la distanza loro mentre il cilindro pieno è in alto.

Abbiamo in *agosto 1885*:

per cilindro pieno in basso . . . . . $\Delta_i = -16^\mu{,}5$

" " " " alto . . . . . $\Delta_s = -18{,}0$

$$\Delta_i - \Delta_s = +\ 1{,}5$$

ed in *febbraio 1886*:

per cilindro pieno in basso . . . . . $\Delta_i = -21^\mu,1$

" " " " alto . . . . . $\Delta_s = -23,7$

$\Delta_i - \Delta_s = +\ 2,6.$

Combinando i due risultati in uno, attribuendo loro pesi proporzionali al numero delle misure sulle quali sono fondati, cioè dando al primo il peso 1 e al secondo il peso 1,6, abbiamo

$$\Delta_i - \Delta_s = +2^\mu,2 \text{ in medio.}$$

L'Orff ha trovato per questa differenza il valore $+1^\mu,9 \pm 1^\mu,0$ (veggasi la sua Memoria già citata, alla pag. 58, dove tale differenza è indicata con Δ).

Dunque la distanza dei coltelli a cilindro pieno in basso è per circa due microni maggiore della distanza corrispondente a cilindro pieno in alto.

In secondo luogo si può ricercare se la distanza osservata dei coltelli stia in qualche relazione colla disposizione corrispondente dei coltelli nelle loro incassature.

Siccome in ognuna di queste disposizioni il numero delle volte nelle quali fu osservato col cilindro pieno in alto è eguale a quello delle osservazioni col cilindro pieno in basso, la ricerca attuale può farsi direttamente sui numeri della ultima colonna delle Tabelle 56ª e 57ª, aggruppandoli a norma delle singole disposizioni e senza prima correggerli, in più od in meno secondo il caso, per la metà della differenza $2^\mu,2$ sopra trovata.

Per *agosto 1885* abbiamo

Disposizione A	$\Delta = -20^\mu,0$	$\Delta_m - \Delta = +3^\mu,4$
" B	" $= -17,6$	" $= +1,0$
" C	" $= -14,7$	" $= -1,9$
" D	" $= -14,1$	" $= -2,5$
ed in medio	$\Delta_m = -16,6$	

e per *febbraio 1886*

Disposizione A	$\Delta = -21^\mu,3$	$\Delta_m - \Delta = -1^\mu,1$
" B	" $= -23,2$	" $= +0,8$
" C	" $= -21,4$	" $= -1,0$
" D	" $= -23,6$	" $= +1,2$
ed in medio	$\Delta_m = -22,4$.	

Come si vede facilmente dai valori di $\Delta_m - \Delta$, i risultati ottenuti in agosto sono infirmati dalle più concordanti e più numerose osservazioni di febbraio e si conclude, che il complesso delle osservazioni qui trattate non dà indizio abbastanza certo di una influenza sistematica e costante che la disposizione dei coltelli nelle incassature possa avere sulla loro reciproca distanza.

Puossi anche ricercare se abbia potuto avere influenza sulla distanza misurata dei coltelli l'ordine col quale furono eseguite le misure nel corso della sera.

Riducendo le misure alla media fra cilindro pieno in alto e cilindro pieno in basso, coll'applicare loro le correzioni *più* o *meno* $1^{\mu},1$ a seconda dei casi, poi facendo per l'*agosto* la media aritmetica dei valori ottenuti prima delle oscillazioni separatamente dalla media di quelli ottenuti dopo, abbiamo

Agosto 1885	prima delle oscillazioni	$\Delta = -16^{\mu},1$	$\Delta_m - \Delta = -1^{\mu},2$
	dopo le "	" $= -18,4$	" $= +1,1$
	ed in media	$\Delta_m = -17,3$ [1]	

così che, da prima a dopo le oscillazioni, la distanza dei coltelli sarebbe diminuita di $2^{\mu},3$ rispetto alla scala supposta invariata. Ciò vorrebbe dire che le condizioni rispettive di temperatura fra il pendolo e la scala prima e dopo le oscillazioni erano alquanto diverse.

Credo di poter dare una spiegazione di questo fatto colla circostanza, che, in *agosto*, le operazioni erano ogni sera fatte incominciare con una determinazione di posizione del centro di gravità, per eseguire la quale sono inevitabili, per quanto si cerchi limitarle, trasfusioni di calore dall'operatore al pendolo, come pure è inevitabile un piccolo riscaldamento per via della lampada occorrente nelle letture e nelle altre operazioni intorno all'apparecchio che serve per la determinazione del centro di gravità. Perciò, al tempo delle prime misure, il pendolo trovavasi ogni sera ad una temperatura un po' più elevata di quella della scala, mentre col procedere delle operazioni la temperatura del pendolo e della scala andavano sempre più equilibrandosi.

Della dannosa influenza che la determinazione del centro di gravità in principio delle operazioni di una sera può esercitare sui risultati, sospettai, subito dopo terminato il periodo delle determinazioni di agosto, all'atto della discussione dei risultati e perciò, fin d'allora, mi proposi di sopprimerla nelle altre operazioni che avrei dovuto fare in seguito, tanto più dovendo queste ultime essere eseguite nella stagione fredda, quando il riscaldamento prodotto dall'operatore e dalle lampade sarebbe stato più rapido e quindi, nel medesimo intervallo di tempo, più forte. Pertanto in *febbraio* ebbi cura di lasciare durante il giorno il pendolo sempre nel suo luogo normale accanto alla scala, in maniera che, al principio delle osservazioni, la temperatura fosse già nel miglior modo equilibrata, e riservai la unica determinazione del centro di gravità a dopo le altre osservazioni, cioè a quando un riscaldamento anche sensibile del pendolo non poteva avere più veruna conseguenza. Giudicando che un'altra possibile causa di squilibrio fra la temperatura del pendolo e quella della scala potesse essere, nelle operazioni di agosto, anche la troppa vicinanza al pendolo della lampada ad incandescenza destinata ad illuminare l'arco graduato durante le oscillazioni, ebbi cura in febbraio (come dissi altrove) di disporre la lampada stessa a circa quattro metri di distanza, procurando di raccogliere una sufficiente quantità di luce sull'arco graduato mediante una buona lente convergente, e riparando alla diminuzione di illuminazione sull'arco stesso coll'impiegare nella osservazione delle oscillazioni un cannocchiale di

(1) Questo medio non coincide col medio — 16,6 della pag. precedente e della Tabella 59ª giacchè qui a ciascuna delle misure isolate si è attribuito, come di dovere, il medesimo peso indipendentemente dalla particolare combinazione.

chiarezza e d'ingrandimento considerevolmente maggiori che nel cannocchiale usato in agosto.

Con siffatte precauzioni ottenni in media i risultati seguenti:

Febbraio 1886; poco avanti la 1ª serie di oscillazioni	$\Delta = -24^{\mu},0$	$\Delta_m - \Delta = +1,6$
dopo la prima serie " "	" $= -20,6$	" $= -1,8$
poco avanti la 2ª serie " "	" $= -22,2$	" $= -0,2$
dopo la seconda serie " "	" $= -22,7$	" $= +0,3$
in media	$\Delta_m = -22,4$,	

nei quali nulla apparisce di sistematico, mentre gli scostamenti dal medio, conservandosi presso a poco dell'ordine stesso di quelli di agosto, malgrado le usate precauzioni, fanno vedere che non dipendono soltanto dalle cause qui sopra supposte.

La conclusione che si può trarre dalle superiori ricerche può essere questa: che, meno la differenza sistematica proveniente dall'essere il cilindro pieno in alto piuttosto che in basso, le sconcordanze nei numeri dell'ultima colonna delle Tabelle 56ª e 57ª devono attribuirsi a cause accidentali ed irregolari.

Calcolando dunque gli scostamenti dei numeri dell'ultima colonna delle tabelle ora dette, corretti opportunamente di $\pm 1^{\mu},1$, dal loro medio generale e, con tali scostamenti, calcolando gli errori probabili, abbiamo:

Errore probabile di una misura isolata	$= \pm 2^{\mu},8$	Agosto 1885
" " del medio $-17^{\mu},3$ di 20 misure	$= \pm 0,6$	
" " di una misura isolata	$= \pm 1,6$	Febbraio 1886,
" " del medio $-22^{\mu},4$ di 32 misure	$= \pm 0,3$	

d'onde si vede che le misure del febbraio sono riuscite molto più precise di quelle di agosto.

L'error probabile di una misura isolata della serie di *agosto* è quasi identico con quello ottenuto dall'Orff (pag. 58) che è $= \pm 2^{\mu},6$.

E l'error probabile di una misura isolata della serie di *febbraio* è quasi coincidente cogli errori probabili ottenuti per una misura isolata da Bruhns [1], che sono:

dalle osservazioni di Bonn $\pm 1^{\mu},7$,
" " " Leiden $\pm 1,4$,
" " " Mannheim $\pm 1,5$.

L'errore probabile della lunghezza della scala A essendo $= \pm 0^{\mu},4$ (v. a pag. 180) sarà l'*error probabile della distanza dei coltelli*

per agosto 1885 $\pm 0^{\mu},7$
" febbraio 1886 $\pm 0,5$.

[1] *Astronomisch-Geodätische Arbeiten im Jahre 1870.* Herausgegeben von D.r C. Bruhns. (Leipzig 1871) Publication des königl. Preussischen Geodätischen Instituts (pag. 140).

§ XLIX. *Lunghezza del pendolo a secondi nelle singole sere di osservazione e nel medio delle due serie, ed errore probabile di ciascuno dei due medî calcolato mediante i loro scostamenti dai rispettivi valori parziali. Risultato finale.*

Coi dati esposti nelle colonne 3ª e 6ª della Tabella 55ª, combinati rispettivamente cogli elementi registrati nelle colonne 4ª e 8ª della Tabella 58ª, mediante la formola (37)″ della pag. 74, si hanno le lunghezze del pendolo semplice che batte i secondi della Tabella 60ª.

Tabella 60.ª

Agosto 1885			Febbraio 1886		
Giorno	Combinazione	Lunghezza del pendolo a secondi	Giorno	Combinazione	Lunghezza del pendolo a secondi
1	2	3	4	5	6
5-20	A *a*	mm 993 μ 478.0	7	A *a*	mm 993 μ 540.9
6-19	A *p*	583.9	8	A *p*	562.2
21	B *a*	551.7	9	D *a*	559.9
23	B *p*	485.4	16	B *a*	505.9
24	C *a*	601.8	17	B *p*	524.0
25	C *p*	525.3	18	C *p*	573.2
26	D *a*	568.5	23	C *a*	556.6
27	D *p*	589.5	24	D *p*	559.2
Medî		993 548.0			993 547.7
Errore probabile		± 12μ			± 5μ

La coincidenza quasi esatta dei due risultati medî ottenuti nelle due stagioni fa credere che in ciascuno di essi la somma degli errori fortuiti di osservazione sia nulla e che la somma degli errori sistematici sia la stessa nei due risultati. Meno probabile deve essere un compenso degli uni cogli altri.

Gli errori probabili, scritti sotto ai due risultati medî, sono stati dedotti dagli scostamenti che da questi medî hanno i valori parziali da cui essi rispettivamente provengono. Evidentemente tali errori probabili devono essere più grandi del giusto, giacchè comprendono in sè anche gli errori sistematici relativi alle differenti combinazioni dei coltelli e alle differenti posizioni della firma, benchè tali errori sistematici possano rimanere nel medio delle otto misure fra loro eliminati.

Risultato finale. Combinando i due risultati in uno solo, coll'attribuire loro i pesi indicati dagli errori probabili rispettivi, cioè il peso 6 al secondo medio e il peso *uno* al primo, si ottiene:

Lunghezza del pendolo semplice che batte i secondi a Padova nel luogo di osservazione, cioè a 19 metri circa sul livello del mare,

$$\mathbf{993^{mm}547^{\mu},7 \pm 4^{\mu},5}\,.$$

Anche l'errore probabile scritto accanto a questo risultato, devesi considerare come più grande piuttosto che come più piccolo del vero.

§ L. *Errore probabile del risultato finale calcolato in funzione degli errori probabili parziali delle quantità osservate.*

Abbiamo trovato, in unità della *sesta* decimale di un secondo di tempo,

	Agosto	Febbraio
(a pag. 242) error probabile della durata media di una oscillazione	± 1,3	± 0,8
(a pag. 203) error probabile della riduzione a tempo astronomico	± 0,3	± 0,3
(a pag. 244) error probabile della riduzione all'arco cicloidale	± 0,1	± 0,1
(a pag. 247) error probabile della riduzione all'amplitudine nulla	± 3,3	± 2,6.

In conseguenza l'*error probabile* r_τ *della durata di una oscillazione, espressa in tempo astronomico e ridotta all'arco cicloidale e all'amplitudine zero*, sarà in unità della 6ª decimale

nella media delle osservazioni di agosto 1885 ± 3,6
" " " " " febbraio 1886 ± 2,8 .

Ma, indicando con λ la lunghezza del pendolo matematico a secondi, con l la distanza dei coltelli e con τ la durata dell'oscillazione, siccome abbiamo

$$\lambda = \frac{l}{\tau^2},$$

avremo

$$d\lambda = \frac{\lambda}{l}\, dl - \frac{2\lambda}{\tau}\, d\tau .$$

Indicando con r_λ, r_l, r_τ rispettivamente gli errori probabili delle quantità λ, l e τ si ha:

$$r_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 r_l^2 + \left(\frac{2\lambda}{\tau}\right)^2 r_\tau^2}.$$

E siccome λ differisce pochissimo da l, per cui si può porre $\lambda = l$ circa, ed è prossimamente $l = 1^m$, $\tau = 1^s$, abbiamo

$$r_\lambda = \sqrt{r^2_l + 4\, r^2_\tau}.$$

		Agosto	Febbraio
Dalla pagina 265 abbiamo	$r_l =$	$\pm 0^\mu,7$	$\pm 0^\mu,5$.
Qui sopra si è trovato	$r_\tau =$	± 3 , 6	± 2 , 8 .
Quindi	$r_\lambda =$	± 7 , 3	± 5 , 6 .

Da questi due errori probabili si ottiene l'errore probabile del medio combinato dei valori parziali cui quegli errori spettano

$$\pm 4^\mu,6 ,$$

il quale risultato combina (fortuitamente non v'ha dubbio) con quello ottenuto per altra via nel § precedente.

§ LI. *Confronto del risultato ottenuto a Padova col medio di alcuni valori ottenuti in altre stazioni e ridotti al parallelo di Padova mediante il coefficiente di Helmert.*

Per vedere se il risultato da me ottenuto accenni alla esistenza in Padova di una qualche anomalia della gravità, ho ridotto alcune lunghezze del pendolo, ottenute in varî luoghi da varî esperimentatori e con metodi varî, alla latitudine di Padova,

servendomi per la riduzione di latitudine del coefficiente della formola di Helmert (*Die mathem. und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, II Theil, pag. 240).

Detta λ la lunghezza del pendolo semplice alla latitudine geografica L ed al livello del mare, detta λ_1 la lunghezza del pendolo semplice alla latitudine L_1 pure al mare, abbiamo:

$$\lambda = \gamma - \nu \cos 2 L$$

$$\lambda_1 = \gamma - \nu \cos 2 L_1$$

dalle quali

$$\lambda - \lambda_1 = 2 \nu \operatorname{sen} (L + L_1) \operatorname{sen} (L - L_1) .$$

Dalla citata formola di Helmert

$$\nu = 2631^{\mu} ,$$

quindi

$$\lambda - \lambda_1 = 5262^{\mu} \operatorname{sen} (L + L_1) \operatorname{sen} (L - L_1) .$$

Intendendo d'indicare con λ ed $L = 45^{\circ}.24'.3''$ gli elementi relativi a Padova, avremo i valori di $\lambda_1 - \lambda$ corrispondenti ai luoghi qui sotto segnati, e quindi i corrispondenti valori di λ, essendo dati i valori di λ_1. Abbiamo così la

TABELLA 61.ª

Luogo	L_1	Osservatori	λ_1	$\lambda - \lambda_1$	λ al livello del mare
Altona (1)	53° 32′ 45″	Peters C. F. W.	994mm 301μ	— 737μ	993mm 564μ
Berlino (2)	52 30 17	Anton	994 201	— 645	556
Parigi (3)	48 50 13	Kater, Sabine	993 861	— 315	546
		Biot, Mathieu	993 867	— 315	552
Monaco (4)	48 8 45	Orff	993 810	— 252	558
Milano (5)	45 28 1	Biot	993 548	— 6	542
		Media λ a Padova ed al livello del mare = 993 553			

Se ora si consideri che la riduzione della lunghezza del pendolo dal livello del mare all'altezza a cui a Padova furono fatte le osservazioni, cioè circa all'altezza di 19 metri, è circa -6^{μ}, si vedrà che il valore di λ, per il luogo delle osservazioni a Padova, quale risulta dalle determinazioni qui sopra riferite adoperando il coefficiente di Helmert è

$$993^{mm} 547^{\mu}$$

(1) Altona. Peters C. F. W., *Resultate aus Pendelbeobachtungen* (Astronomische Nachrichten, vol. 99, n. 2361, pag. 135-136, linea 4 salendo).

(2) Berlino. Orff Carl von, *Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen* (Abhandlungen der k. bayer. Akademie del Wiss, II Classe, XIV Bd, III Abtheil, pag. 292, linea 2 salendo).

(3) Parigi. Biot G. B., *Traité élémentaire d'Astronomie Physique,* Tome deuxième, Tableaux A et B, pag. 467 (Troisième Edition, Paris, Bachelier 1844).

(4) Monaco. Orff, loco cit., pag. 291.

(5) Milano. Biot G. B., loco citato, Tableau A, pag. 467.

il qual valore coincide quasi esattamente con quello da me ottenuto mediante la misura diretta. Non sembra dunque che a Padova esista una sensibile anomalia della gravità e l'eccesso di lunghezza del pendolo ottenuto dal Biot, di 56$^{\mu}$ circa sul valore poco sopra riferito, forse dipende da cause speciali relative allo strumento da lui adoperato e alle circostanze delle sue osservazioni.

APPENDICE

§ LII. *Esempio di determinazione delle costanti* μ, ν, k *della equazione*

$$\alpha = \frac{1}{\nu} \frac{1}{e^{\mu(k+\tau)} - 1}$$

e di riduzione all'arco cicloidale della durata media di un certo numero di oscillazioni nella ipotesi che l'amplitudine α *dipenda dal tempo* τ *nel modo ora indicato.*

Formulario.

Date tre amplitudini α, α_1, α_2 e le differenze dei tempi di osservazione $\tau_1 - \tau$, $\tau_2 - \tau$ espresse in unità arbitraria (p. es. 20^m), si calcolano A e B colle equazioni (v. pag. 89 e seg.):

$$\frac{\alpha_1 (\alpha - \alpha_2)}{\alpha_2 (\alpha - \alpha_1)} = \mathrm{A} \quad ; \quad \frac{\alpha (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2 (\alpha - \alpha_1)} = \mathrm{B} \tag{74}$$

e dovrà essere

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = 1 . \tag{75}$$

Si calcola poi

$$\frac{\tau_1 - \tau}{\tau_2 - \tau} = \lambda \tag{72}$$

$$\sigma = \lambda - \mathrm{M} \tag{82)'$$

e se $\mathrm{M} = \frac{1}{2}$ si calcola

$$x_1 = \mathrm{B}^2 , \tag{81}$$

se $\mathrm{M} = \frac{1}{3}$ si calcola

$$x_1 = \left(\sqrt{\mathrm{B} + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}\right)^3, \tag{82}$$

indi, in un caso e nell'altro,

$$x_2 = x_1 + \frac{\mathrm{A}\, x_1^{\mathrm{M}} \log \mathrm{hyp}\, x_1}{1 - \mathrm{M\,A}\, x_1^{\mathrm{M}-1}} \sigma \tag{83}$$

e si calcoleranno $\varDelta x_2$ e $\varDelta x_3$ colle equazioni

$$\left.\begin{aligned} x_2 + \varDelta x_2 &= \mathrm{A}\, x_2^{\lambda} - \mathrm{B} \\ x_3 + \varDelta x_3 &= \mathrm{A}\, x_3^{\lambda} - \mathrm{B} \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

essendo x_3 un numero arbitrariamente poco diverso da x_2.

Si avrà allora

$$x_4 = x_2 - \frac{x_3 - x_2}{\varDelta x_3 - \varDelta x_2} \varDelta x_2$$

oppure

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_2}{\varDelta x_3 - \varDelta x_2} \varDelta x_3, \tag{84)'$$

e, calcolato $\varDelta x_4$ colla

$$x_4 + \varDelta x_4 = \mathrm{A}\, x_4^{\lambda} - \mathrm{B} ,$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4 - x_3}{\varDelta x_4 - \varDelta x_3} \varDelta x_4$$

e così di seguito finchè risulti

$$\Delta x = 0 .$$

Finalmente si calcolano le equazioni

$$\mu = \frac{1}{\tau_2 - \tau} \frac{\log x}{\log e} \tag{77}$$

$$\nu = \frac{\alpha_2 x - \alpha}{\alpha \alpha_2 (1 - x)} = \frac{\alpha_1 x^\lambda - \alpha}{\alpha \alpha_1 (1 - x^\lambda)} \tag{78}$$

$$k = \frac{1}{\mu \log e} \log \frac{1 + \nu\alpha}{\nu\alpha} - \tau = \frac{1}{\mu \log e} \log \frac{1 + \nu\alpha_1}{\nu\alpha_1} - \tau_1 = \frac{1}{\mu \log e} \log \frac{1 + \nu\alpha_2}{\nu\alpha_2} - \tau_2 . \tag{79}$$

Formato per un tempo τ_n l'argomento $\log \mu (k + \tau_n) = \log \mu\, t_n$ si desume dalla tabella del § XI pag. 93 $\log \nu\, \alpha_n$, d'onde (α_n) calcolato, che, posto a confronto coll' α_n osservato, ci darà le differenze

$$(\alpha_n) - \alpha_n = \mathrm{C} - \mathrm{O} .$$

Si potrebbe qui, all'occorrenza, servirsi di tali differenze per correggere i trovati valori di μ, ν, k formando prima le equazioni agli errori (85) e poi formando e risolvendo le conseguenti equazioni normali. In generale però non sarà necessario di far ciò, riuscendo le differenze C — O più piccole dell'errore probabile di osservazione d'una amplitudine.

Riduzione all'arco cicloidale. Dati i tempi τ_i, τ_f, iniziale e finale di una serie di oscillazioni, si formano i tempi

$$t_i = k + \tau_i \qquad ; \qquad t_f = k + \tau_f$$

e coi $\log \mu (k + \tau_i)$, $\log \mu (k + \tau_f)$ come argomenti, si prendono dalla tavola sopra citata $\log \varphi (\mu\, t_i)$ e $\log \varphi (\mu\, t_f)$ e si calcola la cercata riduzione colla formola

$$\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}' = \frac{\mathrm{T}'}{16\, \mathrm{R}_1^2\, \mu\, \nu^2 (t_f - t_i)} \left\{ \varphi (\mu\, t_f) - \varphi (\mu\, t_i) \right\} \tag{69}$$

essendo T′ la durata approssimativa dell'oscillazione media ed R_1 il numero dei minuti primi contenuti nel raggio.

Esempio.

Dati per il calcolo. Cfr. pag. 219, Tabella 41ª

1886 Febbraio 23.

Cilindro pieno in alto. (Unità di tempo $= 20^m$).

$\alpha_2 = 16',0$, $\alpha_1 = 55',0$, $\alpha = 134',3$, $\tau_1 - \tau = 1,03825$

$\alpha - \alpha_1 = 79',3$, $\alpha - \alpha_2 = 118',3$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 39',0$, $\tau_2 - \tau = 3,02467$

Calcolo delle equazioni (74), (75), (72) e (82)′.

$\log \alpha_2 = 1,20412$	$\log \alpha_1 = 1,74036$	$\log \alpha = 2,12808$	$\log(\tau_1 - \tau) = 0,01630$
$\log(\alpha - \alpha_1) = 1,89927$	$\log(\alpha - \alpha_2) = 2,07298$	$\log(\alpha_1 - \alpha_2) = 1,59106$	$\log(\tau_2 - \tau) = 0,48068$
	$\log \alpha_1 (\alpha - \alpha_2) = 3,81334$	$1\, \alpha (\alpha_1 - \alpha_2) = 3,71914$	$\log \lambda = 9,53562$
	$\log \alpha_2 (\alpha - \alpha_1) = 3,10339$	$1\, \alpha_2 (\alpha - \alpha_1) = 3,10339$	$\lambda = 0,34326$
	$\log \mathrm{A} = 0,70995$	$\log \mathrm{B} = 0,61575$	$\mathrm{M} = 0,33333$
$\mathrm{A} - \mathrm{B} = 1,0000$	$\mathrm{A} = 5,1281$	$\mathrm{B} = 4,1281$	$\sigma = 0,00993$

Calcolo della equaz.e (82).

B	$= 4,1281$
$\frac{1}{4}$	$= 0,25$
$B + \frac{1}{4}$	$= 4,3781$
$\log\left(B + \frac{1}{4}\right)$	$= 0,64129$
$\log\left(B + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$	$= 0,32065$
$\log \frac{1}{2}$	$= 9,69897$
arg.	$= 0,62168$
subtract.	$= 0,50309$
$\log x_1^{\frac{1}{3}}$	$= 0,20206$
$\log x_1$	$= 0,60618$
x_1	$= 4,038$

Calcolo del termine in σ della (83).

$\log \log x_1$	$= 9,78260$	$\log A$	$= 0,70995$
$\log \log e$	$= 9,63778$	$\log M$	$= 9,52288$
$\log \log \text{hyp}\ x_1$	$= 0,14482$	compl. $\log x_1^{\frac{2}{3}}$	$= 9,59588$
$M \log x_1$	$= 0,20206$	$\log M A\, x_1^{-\frac{2}{3}}$	$= 9,82871$
$\log A$	$= 0,70995$	arg.	$= 0,17129$
log numer.	$= 1,05683$	subtract.	$= 9,68441$
log denom.	$= 9,51312$		
log coefficiente	$= 1,54371$		
$\log \sigma$	$= 7,99695$		
log correzione	$= 9,54066$		
$x_2 - x_1$	$= + 0,347$	x_2	$= 4,385$

Calcolo della equazione (76).

1a prova	2a prova	Equazione (84)′	3a prova
$x_2 = 4,385$	$x_3 = 4,400$	$x_3 - x_2 = +0,01500$	$x_4 = 4,39766$
$\log x = 0,64197$	0,64345	$\Delta x_3 - \Delta x_2 = -0,00513$	$0,64323 = \log x$
$\log \log x = 9,80752$	9,80852		$9,80837 = \log\log x$
$\log \lambda = 9,53562$	9,53562	$\frac{x_3 - x_2}{\Delta x_3 - \Delta x_2} = -2,924$	9,53562
$\log \log x^\lambda = 9,34314$	9,34414		9,34399
$\log x^\lambda = 0,22036$	0,22086		$0,22079 = \log x^\lambda$
$\log A = 0,70995$	0,70995		0,70995
$\log A\, x^\lambda = 0,93031$	0,93081	Correzione di x_3	0,93074
$\log B = 0,61575$	0,61575		0,61575
argom. $= 0,31456$	0,31506	$- 0,00234$.	0,31499
subract. $= 0,02665$	0,02762		0,02748
$\log(x_2 + \Delta x_2) = 0,64240$	0,64337		0,64323
$x_2 + \Delta x_2 = 4,38933$	$x_3 + \Delta x_3 = 4,39920$		
$\Delta x_2 = +0,00433$	$\Delta x_3 = -0,00080$		$\Delta x_4 = 0$

Equazione (77).

$\log\log x = 9{,}80837$
$\log\log e = 9{,}63778$
$\log(\tau_1 - \tau) = 0{,}48068$
$\log \mu = 9{,}68991$

$\mu = 0{,}48968$

Per unità di tempo
$= 10^{m}$
$(\mu = 0{,}24484)$

Equazioni (78).

$\log x = 0{,}64323$	$\log x^{\lambda} = 0{,}22079$
$\log \alpha_2 = 1{,}20412$	$\log \alpha_1 = 1{,}74036$
$\log \alpha_2\, x = 1{,}84735$	$\log \alpha_1\, x^{\lambda} = 1{,}96115$
$\log \alpha = 2{,}12808$	$\log \alpha = 2{,}12808$
arg. $= 0{,}28073$	0,16693
subtract. $= 9{,}95840$	9,67087
log num $= 1{,}80575$n	1,63202n
$\log(1 - x) = 0{,}53119$n	$\log(1 - x^{\lambda}) = 9{,}82125$n
$\log \alpha\, \alpha_2 = 3{,}33220$	$\log \alpha\, \alpha_1 = 3{,}86844$
$\log \nu = 7{,}94236$	$= 7{,}94233$

$\nu = +\, 0{,}00876$

Equazioni (79).

$\log \nu\, \alpha =$	0,07043	9,68271	9,14647
$\log(1 + \nu\alpha) =$		0,17074	0,05695
$\log \frac{1 + \nu\alpha}{\nu\alpha} =$	0,26724	0,48803	0,91048
log log » $=$	9,42690	9,68845	9,95927
$\log \mu \log e =$	9,32769	9,32769	9,32769
log I term. $=$	0,09921	0,36076	0,63158
antilog $=$		2,29490	4,28130
$\tau =$		1,03825	3,02467
$k =$	1,25663	1,25665	1,25663

medio $k = 1{,}25664$
(per unità $= 10^{m}$, $k = 2{,}51328$)

Confronto delle osservazioni col calcolo.

N.° d'ordine	1	2	3	4	5	6	7	8
(1) τ	0,	0,56008	1,03825	1,53575	2,03900	2,51275	3,02467	3,50050
$t = k + \tau$	1,25664	1,81672	2,29489	2,79239	3,29564	3,76939	4,28131	4,75714
$\log t$	0,09921	0,25928	0,36076	0,44598	0,51794	0,57627	0,63158	0,67734
$\log \mu\, t$	9,78912	9,94919	0,05067	0,13589	0,20785	0,26618	0,32149	0,36725
(2) $\log \nu\, \alpha$	0,0704	9,8434	9,6828	9,5339	9,3956	9,2730	9,1464	9,0329
$\log \alpha$	2,1281	1,9011	1,7405	1,5916	1,4533	1,3307	1,2041	1,0906
α calcolato	134′,3	79,6	55,0	39,0	28,4	21,4	16,0	12,3
α osservato	134,3	79,8	55,0	38,9	28,4	21,6	16,0	13,0
O — C	0,0	+ 0,2	0,0	— 0,1	0,0	+ 0,2	0,0	+ 0,7

(1) V. la Tabella 41ª a pag. 219. — (2) V. Tabella a pag. 93.

Calcolo della equazione (69).

([1]) Tempo orig.: $6^h.58^m.40^s,4$	Tempo osserv.: $7^h.4^m.0^s,2$	$7^h.34^m.40^s,4$	$8^h.4^m.10^s,1$
	$\tau = 0,26650$	1,80000	3,27475
$T' = 1,0061$	$t = k + \tau = 1,52314$	3,05664	4,53139
$\log T' = 0,00264$	$\log t = 0,18275$	0,48525	0,65623
	$\log \mu t = 9,87266$	0,17516	0,34614
$\log \mu = 9,68991$	([2]) $\log \varphi(\mu t) = 9,4137$	8,5440	7,8377
$\log \nu^2 = 5,88470$	arg. =	0,8697	0,7063
$\log 16 = 1,20412$	subtract. =	0,8067	0,6112
$\log R_1^2 = 7,07254$	$\log \{\varphi(\mu t_f) - \varphi(\mu t_i)\} =$	9,3507n	8,4489n
$\log 16\, R_1^2\, \mu\, \nu^2 = 3,85127$			
$\log \dfrac{T'}{16\, R_1^2\, \mu\, \nu^2} = 6,15137$	$t_f - t_i =$	1,53350	1,47465
	$\log(t_f - t_i) =$	0,18569	0,16869
	$\log \{T' : 16 R_1^2 \mu \nu^2 (t_f - t_i)\} =$	5,96568	5,98268
	$\log(T_0 - T') =$	5,3164n	4,4316n
	$T_0 - T' =$	$-0,0000207$	$-0,0000027$

(come a pag. 237, Tab. 51ª)

([1]) V. Tabella 45ª a pag. 230. — ([2]) V. Tabella a pag. 93.

---

§ LIII. *Esempio di calcolo dei coefficienti della equazione*

$$\alpha = \alpha_0 + A\,t + B\,t^2 + C\,t^3 \qquad \text{(A)}$$

e della riduzione all'arco cicloidale della durata media di un certo numero di oscillazioni nella ipotesi che l'amplitudine α varii col tempo t secondo la legge espressa da quella equazione.

Formulario.

Sieno date, per osservazione, le amplitudini α_0 , α_1 , α_2 , α_3 , α_4
e i tempi corrispondenti 0 , t_1 , t_2 , t_3 , t_4
espressi in unità arbitraria e contati dall'istante in cui l'amplitudine è α_0.

Lasciando da parte pel momento la quarta osservazione, si formano colle altre le tre equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_4 - \alpha_0 &= C_0\,t_4^3 + B_0\,t_4^2 + A_0\,t_4 \\ \alpha_2 - \alpha_0 &= C_0\,t_2^3 + B_0\,t_2^2 + A_0\,t_2 \\ \alpha_1 - \alpha_0 &= C_0\,t_1^3 + B_0\,t_1^2 + A_0\,t_1\,. \end{aligned}\right\} \quad \text{I}$$

Per avere le due risultanti dalla eliminazione di A_0 si formino prima le quantità ausiliarie

$$\left.\begin{aligned} f_4 &= t_4 : t_1 & ;\quad f_2 &= t_2 : t_1 \\ \lambda_4 &= \alpha_4 - \alpha_0 - f_4(\alpha_1 - \alpha_0) & ;\quad \lambda_2 &= \alpha_2 - \alpha_0 - f_2(\alpha_1 - \alpha_0) \\ \mu_4 &= t_4^3 - f_4\,t_1^3 & ;\quad \mu_2 &= t_2^3 - f_2\,t_1^3 \\ \nu_4 &= t_4^2 - f_4\,t_1^2 & ;\quad \nu_2 &= t_2^2 - f_2\,t_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

e si avrà:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_4 &= C_0\,\mu_4 + B_0\,\nu_4\\ \lambda_2 &= C_0\,\mu_2 + B_0\,\nu_2\,.\end{aligned}\right\}\quad \text{II}$$

Ponendo in seguito

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \nu_4 : \nu_2\\ \pi &= \lambda_4 - \varphi\,\lambda_2\\ \varrho &= \mu_4 - \varphi\,\mu_2\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

risulta:

$$C_0 = \frac{\pi}{\varrho} \qquad \text{III}$$

e successivamente

$$B_0 = \frac{\lambda_4 - C_0\,\mu_4}{\nu_4} = \frac{\lambda_2 - C_0\,\mu_2}{\nu_2} \qquad \text{IV}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_4 - \alpha_0 - (C_0 t_4^3 + B_0 t_4^2)}{t_4} = \frac{\alpha_2 - \alpha_0 - (C_0 t_2^3 + B_0 t_2^2)}{t_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 - (C_0 t_1^3 + B_0 t_1^2)}{t_1}\,. \qquad \text{V}$$

Trattandosi di calcoli approssimativi, i valori delle quantità incognite A_0, B_0, C_0 potranno riuscire leggermente errati nell'ultima decimale. E per conseguenza avverrà che i tre valori, per es. di A_0, che si ottengono separatamente dalle tre equazioni, dopo di avere determinato B_0 e C_0, potranno differire fra loro di qualche unità dell'ultima decimale. Affinchè la differenza riesca la minore possibile giova lasciar per ultima da determinare quella incognita (nel caso nostro la A_0) i cui coefficienti nelle tre equazioni differiscono meno fra loro.

Indicando con (α_1), (α_2), (α_3), (α_4) le amplitudini calcolate colla equazione (A) nella quale sieno introdotti per t i valori osservati e per A, B, C i valori A_0, B_0, C_0, si ha:

$$\begin{aligned}(\alpha_1) &= \alpha_0 + A_0\,t_1 + B_0\,t_1^2 + C_0\,t_1^3\\ (\alpha_2) &= \alpha_0 + A_0\,t_2 + B_0\,t_2^2 + C_0\,t_2^3\\ (\alpha_3) &= \alpha_0 + A_0\,t_3 + B_0\,t_3^2 + C_0\,t_3^3\\ (\alpha_4) &= \alpha_0 + A\;\;t_4 + B_0\,t_4^2 + C_0\,t_4^3\,.\end{aligned}$$

Confrontando questi valori calcolati cogli osservati, avremo nel caso presente:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1) - \alpha_1 &= n_1 = 0\\ (\alpha_2) - \alpha_2 &= n_2 = 0\\ (\alpha_3) - \alpha_3 &= n_3 \sim\\ (\alpha_4) - \alpha_4 &= n_4 = 0\,.\end{aligned}\right\}\quad \text{VI}$$

Qualunque altro sistema di valori di A, B, C, diversi da A_0, B_0, C_0, ci darà altre differenze fra calcolo ed osservazione. Indichiamo con $(\alpha_1) + \varDelta_1$, $(\alpha_2) + \varDelta_2$ .... i valori che si ottengono in luogo di (α_1), (α_2) .... quando si ponga $A_0 + x$, $B_0 + y$, $C_0 + z$ in luogo di A_0, B_0, C_0. Se, per dare alle equazioni l'aspetto solito, porremo a_1, b_1, c_1 rispettivamente in luogo di t_1, t_1^2, t_1^3; a_2, b_2, c_2 in luogo di t_2, t_2^2, t_3^2 .... avremo:

$$\begin{aligned}n_1 + a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z &= \varDelta_1\\ n_2 + a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z &= \varDelta_2\\ n_3 + a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z &= \varDelta_3\\ n_4 + a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z &= \varDelta_4\end{aligned}$$

dove $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ rappresentano le differenze *calcolo-osservazione* nella ipotesi $A_0 + x$, $B_0 + y$, $C_0 + z$. Si determina x, y, z in modo che $\Sigma \Delta^2$ sia minima, e ciò si ottiene, notoriamente, risolvendo le tre equazioni:

$$\left.\begin{aligned} [an] + [aa]x + [ab]y + [ac]z = 0 \\ [bn] + [ab]x + [bb]y + [bc]z = 0 \\ [cn] + [ac]x + [bc]y + [cc]z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{VII}$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} [aa] = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 - \dots \\ [ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Le due risultanti dalla eliminazione di z sono:

$$\left.\begin{aligned} [an1] + [aa1]x + [ab1]y = 0 \\ [bn1] + [ab1]x + [bb1]y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII}$$

avendo posto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{[ac]}{[cc]} = \alpha \qquad \frac{[bc]}{[cc]} = \beta \\ [an] - \alpha[cn] = [an1] \\ [aa] - \alpha[ac] = [aa1] \\ [ab] - \alpha[bc] = [ab1] \\ [bn] - \beta[cn] = [bn1] \\ [bb] - \beta[bc] = [bb1]. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

E la equazione in x è:

$$[an2] + [aa2]x = 0 \qquad \text{IX}$$

ponendo

$$\left.\begin{aligned} \frac{[ab1]}{[bb1]} = \gamma \\ [an1] - \gamma[bn1] = [an2] \\ [aa1] - \gamma[ab1] = [aa2]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Noto x le equazioni VIII danno y per doppia via, e noti x ed y le VII conducono, per tre vie, al valore di z.

Determinati x, y, z, coi valori $A_0 + x = A$, $B_0 + y = B$, $C_0 + z = C$ si calcolano le amplitudini corrispondenti ai tempi di osservazione per vedere di quanto esse differiscano dalle amplitudini osservate e dovrà riuscire $\Sigma \Delta^2 < n_3^2$.

Volendo paragonare il risultato ottenuto da una serie di amplitudini con quello dedotto da un'altra serie, bisogna partire in ambidue i casi, per contare il tempo, dall'istante in cui l'amplitudine ha un determinato valore iniziale α'. Per determinare tale istante bisogna risolvere la equazione

$$t_0^3 + \frac{B}{C} t_0^2 + \frac{A}{C} t_0 + \frac{\alpha_0 - \alpha'}{C} = 0.$$

Determinato t_0 si ponga $t - t_0 = \tau$ e la equazione (A) prende quest'altro aspetto:

$$\alpha = \alpha' + A'\tau + B'\tau^2 + C'\tau^3 \qquad \text{X}$$

avendo posto

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + A\, t_0 + B\, t_0^2 + C\, t_0^3 &= \alpha' \\ A + 2\, B\, t_0 + 3\, C\, t_0^2 &= A' \\ B + 3\, C\, t_0 &= B' \\ C &= C' \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

e la equazione X potrà tener luogo della A nel calcolo delle amplitudini dalle quali dipende la riduzione all'arco cicloidale.

Riduzione all'arco cicloidale. Avendo ora una serie di oscillazioni incominciata al tempo τ_i e terminata al tempo τ_f, si divida l'intervallo $\tau_f - \tau_i$ in quattro eguali parti e si formino cinque tempi equidistanti fra τ_f e τ_i implicitamente, si calcolino i corrispondenti valori di α colla X, e le corrispondenti riduzioni mediante la tavola ausiliaria posta in fine. Si avrà:

per i tempi	le amplitudini	e le riduzioni
τ_i	α_i	X_i
$\tau_i + \frac{1}{4}(\tau_f - \tau_i) = \tau_1$	α_1	X_1
$\tau_i + \frac{1}{2}(\tau_f - \tau_i) = \tau_2$	α_2	X_2
$\tau_i + \frac{3}{4}(\tau_f - \tau_i) = \tau_3$	α_3	X_3
τ_f	α_f	X_f.

(7)

Allora la riduzione da applicare alla durata media delle oscillazioni compiute fra τ_i e τ_f, per ridurla all'arco cicloidale è

$$T_0 - T' = \frac{1}{90} \left\{ 12\, X_2 + 32\, (X_1 + X_3) + 7\, (X_i + X_f) \right\}. \qquad \text{XI}$$

Esempio.

Dati (v. Tabella 38ª pag. 216).

1885 Agosto	T	$T_n - T_0 = 10\, t_n$	α_n	$\alpha_n - \alpha_0$	t_n	$\log(\alpha_n - \alpha_0)$	$\log t_n$	$\log t_n^2$	$\log t_n^3$
27	22ʰ 6ᵐ 0.2ˢ		96′.9						
		8ᵐ 8.8ˢ		— 26′.5	0.8147	1.42325n	9.91100	9.82200	9.73300
	22 14 9.0		70.4						
		17 29.0		— 46.2	1.7483	1.66464n	0.24262	0.48524	0.72786
	22 23 29.2		50.7						
		29 25.3		— 62.3	2.9422	1.79449n	0.46867	0.93734	1.40601
	22 35 25.5		34.6						
		37 15.8		— 69.4	3.7263	1.84136n	0.57128	1.14256	1.71384
	22 43 16.0		27.5						

Risoluzione delle equazioni (I).

$\alpha_4 - \alpha_0$	1.84136n	t_4^3	1.71384	t_4^2	1.14256	t_4	0.57128	λ_4	1.71439	λ_2	1.02810
ded.	9.87303	ded.	9.97873	ded.	9.89285			add.	0.26639	add.	0.13005
arg.	0.24217	arg.	1.32056	arg.	0.66028	$t_4\,t_1^{-1} =$		arg.	9.92772	arg.	9.54298
$f_4(\alpha_1-\alpha_0)$	2.08353n	$f_4 t_1^3$	0.39328	$f_4 t_1^2$	0.48228	f_4	0.66028	μ_4 C$_0$	1.64211n	μ_2 C$_0$	0.57108n
								num.	1.98078	num.	1.15815
$\alpha_2 - \alpha_0$	1.66464n	t_2^3	0.72786	t_2^2	0.48524	t_2	0.24262	ν_4	1.03541	ν_2	0.21278
ded.	9.36346	ded.	9.89368	arg.	0.33162						
arg.	0.09023	arg.	0.66324	ded.	0.05916	$t_2\,t_1^{-1} =$		logB$_0$=0.94537		logB$_0$=0.94537	
$f_2(\alpha_1-\alpha_0)$	1.75487n	$f_2 t_1^3$	0.06462	$f_2 t_1^2$	0.15362	f_2	0.33162				
$\alpha_1 - \alpha_0$	1.42325n	t_1^3	9.73300	t_1^2	9.82200	t_1	9.91100				

λ_4	1.71439	μ_4	1.69257	ν_4	1.03541	t_4^3 C$_0$	1.66338n	t_2^3 C$_0$	0.67740n	t_1^3 C$_0$	9.68254n
ded.	9.56679	arg.	0.24840			arg.	0.42455	arg.	0.75321	arg.	1.08483
arg.	0.13634	ded.	9.88747	$\nu_4\,\nu_2^{-1} =$		ded.	9.79503	ded.	9.91565	ded.	9.96272
$\varphi\,\lambda_2$	1.85073	$\varphi\,\mu_2$	1.44417	φ	0.82263	t_4^2 B$_0$	2.08793	t_2^2 B$_0$	1.43061	t_1^2 B$_0$	0.76737
						somma	1.88296	. . . .	1.34626	. . . .	0.73009
λ_2	1.02810	μ_2	0.62154	ν_2	0.21278	add.	0.28073	arg.	9.68162	arg.	9.30684
						arg.	9.95840	add.	0.17038	add.	0.08015
π	1.28118n	ϱ	1.33164			$\alpha_4-\alpha_0$	1.84136n	$\alpha_2-\alpha_0$	1.66464n	$\alpha_1-\alpha_0$	1.42325n
				A$_0$=−39.120		num.	2.16369n	num.	1.83502n	num.	1.50340n
log C$_0$ = 9.94954n				B$_0$=+ 8.818		t_4	0.57128	t_2	0.24262	t_1	0.91100
				C$_0$=− 0.890		log A$_0$	1.59241n	log A$_0$	1.59240n	log A$_0$	1.59240n

Confronto del calcolo colla osservazione nell' ipotesi A$_0$, B$_0$, C$_0$.

A$_0$ t_1 1.50340n − 31'.87	A$_0$ t_2 1.83502n − 68'.39	A$_0$ t_3 2.06107n − 115'.10	A$_0$ t_4 2.16368n − 145'.77
B$_0$ t_1^2 0.76737 + 5.85	B$_0$ t_2^2 1.43061 + 26.95	B$_0$ t_3^2 1.88271 + 76.33	B$_0$ t_4^2 2.08793 + 122.44
C$_0$ t_1^3 9.68254n − 0.48	C$_0$ t_2^3 0.67740n − 4.76	C$_0$ t_3^2 1.35555n − 22.67	C$_0$ t_4^3 1.66338n − 46.07
$\alpha_1 - \alpha_0$ { C = − 26.50	$\alpha_2 - \alpha_0$ { C = − 46.20	$\alpha_3 - \alpha_0$ { C = − 61.44	$\alpha_4 - \alpha_0$ { C = − 69.40
{ O = − 26.5	{ O = − 46.2	{ O = − 62.3	{ O = − 69.4
C − O = n_1 = 0.0	C − O = n_2 = 0.0	C − O = n_3 = + 0.86	C − O = n_4 = 0.0

Correzione dei coefficienti mediante la quarta osservazione.

Formazione e risoluzione delle equazioni VII.

log a	log b	log c	log n
9.9110	9.8220	9.7330	$-\infty$
0.2426	0.4852	0.7279	$-\infty$
0.4687	0.9373	1.4060	9.9345
0.5713	1.1426	1.7138	$-\infty$

log $a\,a$	log $a\,b$	log $a\,c$	log $a\,n$	log $b\,b$	log $b\,c$	log $b\,n$	log $c\,c$	log $c\,n$
=	=	9.6440	$-\infty$	=	9.5550	$-\infty$	9.4660	$-\infty$
log b	log c	0.9704	$-\infty$	log $a\,c$	1.2130	$-\infty$	1.4558	$-\infty$
		1.8748	0.4032		2.3435	0.8718	2.8120	1.3405
		2.2852	$-\infty$		2.8565	$-\infty$	3.4276	$-\infty$
0.664	0.541	0.44	0.0	»	0.4	0.0	0.3	0.0
3.056	5.345	9.34	0.0	»	16.3	0.0	28.6	0.0
8.656	25.470	74.96	2.530	»	220.6	7.444	648.7	21.90
13.887	51.74	192.84	0 0	»	718.6	0.0	2676.7	0.0
26.263	83.096	277.58	2.530	277.58	955.9	7.444	3354.3	21.90
[$a\,a$]	[$a\,b$]	[$a\,c$]	[$a\,n$]	[$b\,b$]	[$b\,c$]	[$b\,n$]	[$c\,c$]	[$c\,n$]

[$a\,n$]	0.4032	[$a\,a$]	1.4193	[$a\,b$]	1.9196	[$a\,c$]	2.4434	[$a\,n\,1$]	9.8560	[$b\,n\,1$]	0.0800
arg.	0.1449	arg.	0.0581	arg.	0.0214			arg.	9.3505	arg.	9.4899
	9.5977		9.1558		8.7034		$\alpha =$		0.0878		0.1169
α[$c\,n$]	0.2583	α[$a\,c$]	1.3612	α[$b\,c$]	1.8982	$\frac{[a\,c]}{[c\,c]}$	8.9178	[$aa1$]x	0.5055	[$ab1$]x	0.5901
								num.	0.5933n		0.7070n
[$b\,n$]	0.8718	[$a\,b$]	1.9196	[$b\,b$]	2.4434	[$b\,c$]	2.9804	[$a\,b\,1$]	0.6016	[$b\,b\,1$]	0.7153
arg.	0.0765	arg.	0.0214	arg.	0.0082			log y	=9.9917n	log y	=9.9917n
	9.2847		8.7034		8.2801		$\beta =$	$A = A_0 + x = -$ 38.146			
β[$c\,n$]	0.7953	β[$a\,c$]	1.8982	β[$b\,c$]	2.4352	$\frac{[b\,c]}{[c\,c]}$	9.4548	$B = B_0 + y = +$ 7.837			
[$c\,n$]	1.3405	[$a\,c$]	2.4434	[$b\,c$]	2.9804	[$c\,c$]	3.5256	$C = C_0 + z = -$ 0.698			

[$a\,n\,1$]	9.8560	[$a\,a\,1$]	0.5170	[$a\,b\,1$]	0.6016	[$a\,n$]	0.4032	[$b\,n$]	0.8718	[$c\,n$]	1.3405
	9.4611	arg.	0.0291			arg.	8.9954	arg.	8.9637	arg.	8.9086
arg.	0.1103		8.8407		$\gamma =$		0.0410		0.0382		0.0338
γ[$bn1$]	9.9663	γ[$ab1$]	0.4879	$\frac{[a\,b\,1]}{[b\,b\,1]}$	9.8863	[$a\,a$]x	1.4078	[$a\,b$]x	1.9081	[$a\,c$]x	2.4319
							1.4488		1 9463		2.4657
[$b\,n\,1$]	0.0800	[$a\,b\,1$]	0.6016	[$b\,b\,1$]	0.7153	arg.	0.4625	arg.	0.4888	arg.	0.5064
[$a\,n\,2$]	9.3171n	[$a\,a\,2$]	9.3286				9.8164		9.8296		9.8378
		$x = +$ 0.974				[$a\,b$]y	1.9113n	[$b\,b$]y	2.4351n	[$b\,c$]y	2.9721n
log x=9.9885		$y = -$ 0.981					1.7277n		2.2647n		2.8099n
		$z = +$ 0.192					2.4434		2.9804		3.5256
						log z	=9.2843	log z	=9.2843	log z	=9.2843

log A = 1.58145n　　log B = 0.89415　　log C = 9.84786n

Confronto del calcolo colla osservazione.

A t_1 1.49245n — 31'.08	A t_2 1.82407n — 66'.69	A t_3 2.05012n — 112'.23	A t_4 2.15273n — 142'.14
B t_1^2 0.71615 + 5.20	B t_2^2 1.37939 + 23.95	B t_3^2 1.83149 + 67.84	B t_4^2 2.03671 + 108.82
C t_1^3 9.57686n — 0.38	C t_2^3 0.57172n — 3.73	C t_3^3 1.24987n — 17.78	C t_4^3 1.55770n — 36.12
C = — 26.26	— 46.47	— 62.17	— 69.44
O = — 26.5	— 46.2	— 62.3	— 69.4
C — O = + 0 24	C — O = — 0.27	C — O = + 0.13	C — O = — 0.04

Espressione di α contando t dall'istante della prima osservazione dell'amplitudine.

$$\alpha = 96'.9 - 38'.146\, t + 7'.937\, t^2 - 0'.698\, t^3 .$$

Determinazione di $t = t_0$ per $\alpha = 60'$, mediante la risoluzione della equazione:

$$0{,}698\, t_0^3 - 7{,}837\, t_0^2 + 38{,}146\, t_0 - (96',9 - 60') = 0$$

da cui

$$t_0^3 - 11{,}228\, t_0^2 + 54{,}650\, t_0 - 52{,}865 = 0 .$$

1	1	— 11,228	+ 54,650	— 52,865
	1	— 10,228	+ 44,422	— 8,443
	1	— 9,228	+ 35,194	
	1	— 8,228		
2	1	— 82,28	+ 3519,4	— 8443
	1	— 80,28	+ 3358,8	— 1725
	1	— 78,28	+ 3202,3	
	1	— 76,28		
5		— 0,76	+ 320,2	— 1725
		— 0,76	+ 316,4	— 143
		— 0,76	+ 312,6	
4			+ 31,3	— 143
5			+ 31,3	— 18
6			+ 3,1	— 2
			+ 0,3	— 2

Prova

$\log t_0$	= 0,09849
$\log t_0^2$	= 0,19698
$\log t_0^3$	= 0,29547
$\log A\, t_0$	= 1,67994n
$\log B\, t_0^2$	= 1,09113
$\log C\, t_0^3$	= 0,13933n
$A\, t_0$	= —47',85
$B\, t_0^2$	= + 12,33
$C\, t_0^3$	= — 1,38
	+ 96,9
	α = 60,00

$$t_0 = 1{,}25456 = 12^{m}.32^{s},74$$

A = — 38,146	B + 7,837	log A' = 1,33802n
2 B t_0 = + 19,664	3 C t_0 — 2,627	
3 C t_0^2 = — 3,296		log B' = 0,71684
A' = — 21,778	B' + 5,210	log C' = 9,84386n.

Espressione di α contando il tempo τ dall'istante in cui $\alpha = 60'$.

$$\alpha = 60' - 21{,}778\, \tau + 5{,}210\, \tau^2 - 0{,}698\, \tau^3 .$$

Calcolo della riduzione all'arco cicloidale per 27 Agosto 1885, D.*p*.*s*, serie di mezzo.

Tempo dell'orologio all'istante della 1ª amplitudine osservata 96',9	=	22ʰ. 6ᵐ. 0ˢ,2
Intervallo di tempo nel quale l'amplitudine diminuisce di 36',9 = t_0	=	12.32,74
Tempo dell'orologio all'istante in cui l'amplitudine è 60'	=	22.18.32,94 = T_{60}
" " " al principio della serie di oscillaz.[1] (pag. 229)	=	22.10.15,07 = T_i
" " " alla fine " " "	=	22.39.27,83 = T_f

$$\tau_i = \tfrac{1}{10}(T_i - T_{60}) = -0,82978$$

$$\tfrac{1}{4}(\tau_f - \tau_i) = 0,73032 \qquad \tau_f = \tfrac{1}{10}(T_f - T_{60}) = +2,09148$$

$$\tau_f - \tau_i = +2,92126$$

	log τ	log τ²	log τ³			
$\tau_i = -0,82978$	9,91896n	9,83792	9,75688n	$\alpha_i = 82',1$	$X_i = 358,5$	
$\tau_1 = -0,09947$	8,99769n	7,99538	6,99307n	$\alpha_1 = 62,2$	$X_1 = 205,8$	
$\tau_2 = +0,63085$	9,79993	9,59986	9,39979	$\alpha_2 = 48,1$	$X_2 = 123,1$	$12\,X_2 = 1477$
$\tau_3 = +1,36116$	0,13391	0,26782	0,40173	$\alpha_3 = 38,2$	$X_3 = 77,6$	$32(X_3 + X_1) = 9069$
$\tau_f = +2,09148$	0,32045	0,64090	0,96135	$\alpha_f = 30,8$	$X_f = 50,5$	$7(X_f + X_i) = 2863$

Calcolo di $\alpha - 60' = A'\tau + B'\tau^2 + C'\tau^3$.

	τ_i	'	τ_1	'	τ_2	'	τ_3	'	τ_f	'
$A'\tau$ =	1,25698	18,07	0,33571	2,17	1,13795n	—13,74	1,47193n	—29,64	1,65847n	—45,55
$B'\tau^2$ =	0,55476	3,59	8,71222	0,05	0,31670	+ 2,07	0,98466	+ 9,65	1,35774	+22,79
$C'\tau^3$ =	9,60074	0,40	6,83693	0,00	9,24365n	— 0,18	0,24559n	— 1,76	0,80521n	— 6,39
$\alpha - 60'$ =		+ 22,06		+ 2,22		—11,85		—21,75		—29,15

Riduzione $= T_0 - T' = -\dfrac{13409}{90} = -149$ unità della settima decimale (come a pag. 235, Tabella 49ª).

§ LIV. *Tavola per la riduzione all'arco cicloidale della durata* $= 1^s{,}006$ *di una oscillazione di amplitudine* α'.

$$\text{Riduzione} = \frac{1^s{,}006}{16\,R_1^2}\,\alpha'^2\,10^7 \text{ in unità della } 7^a \text{ decimale.}$$

α'	Riduzione all'arco cicloidale	Differenze	α'	Riduzione all'arco cicloidale	Differenze	α'	Riduzione all'arco cicloidale	Differenze	α'	Riduzione all'arco cicloidale	Differenze
0°. 1'	0.05		0°.36'	68.95	3.78	1°.11'	268.15	7.50	1°.46'	597.59	11.22
2	0.21	0.16	37	72.83	3.88	12	275.76	7.61	47	608.92	11.33
3	0.48	0 27	38	76.82	3.99	13	283.47	7.71	48	620.35	11.43
4	0.85	0.37	39	80.92	4.10	14	291.29	7.82	49	631.88	11.53
5	1.33	0.48	40	85.12	4.20	15	299.22	7.93	50	643.53	11.65
6	1.92	0.59	41	89.43	4.31	16	307.25	8.03	51	655.28	11.75
7	2.61	0.69	42	93.84	4.41	17	315.38	8.13	52	667.13	11.85
8	3.40	0.79	43	98.37	4.53	18	323.63	8.25	53	679.09	11.96
9	4.31	0.91	44	102.99	4.62	19	331.98	8.35	54	691.16	12.07
10	5.32	1.01	45	107.73	4.74	20	340.43	8.45	55	703.34	12.18
11	6.44	1.12	46	112.57	4.84	21	349.00	8.57	56	715.62	12.28
12	7.66	1.22	47	117.52	4.95	22	357.66	8.66	57	728.01	12.39
13	8.99	1.33	48	122.57	5.05	23	366.44	8.78	58	740.50	12.49
14	10.43	1.44	49	127.73	5.16	24	375.32	8.88	59	753.10	12.60
15	11.97	1.54	50	133.00	5.27	25	384.31	8.99	2. 0	765.80	12.70
16	13.62	1.65	51	138 37	5.37	26	393.40	9.09	1	778.61	12.81
17	15.38	1.76	52	143.85	5.48	27	402.60	9.20	2	791.53	12.92
18	17.24	1.86	53	149.43	5.58	28	411.91	9.31	3	804.56	13.03
19	19.21	1.97	54	155.12	5.69	29	421.32	9.41	4	817.68	13.12
20	21.28	2.07	55	160.92	5.80	30	430.84	9.52	5	830.92	13.24
21	23.46	2.18	56	166.83	5.91	31	440.47	9.63	6	844.26	13.34
22	25.75	2.29	57	172.84	6.01	32	450.20	9.73	7	857.71	13.45
23	28.14	2.39	58	178.96	6.12	33	460.03	9.83	8	871.26	13.55
24	30.64	2.50	59	185.18	6.22	34	469.98	9.95	9	884.92	13.66
25	33.25	2.61	1. 0	191.51	6.33	35	480.03	10.05	10	898.69	13.77
26	35.96	2.71	1. 1	197.94	6 43	36	490.18	10.15	11	912.56	13.87
27	38.78	2.82	2	204.49	6.55	37	500.45	10.27	12	926.54	13.98
28	41.71	2.93	3	211.14	6.65	38	510.82	10.37	13	940.62	14.08
29	44.74	3.03	4	217.89	6.75	39	521.29	10.47	14	954.82	14.20
30	47.88	3.14	5	224.75	6.86	40	531.87	10.58	15	969.11	14.29
31	51.13	3.25	6	231.72	6.97	41	542.56	10.69	16	983.52	14.41
32	54.48	3.35	7	238.79	7.07	42	553.35	10.79	17	998 03	14.51
33	57.94	3.46	8	245.98	7.19	43	564.26	10.91	18	1012.64	14.61
34	61.50	3.56	9	253.26	7.28	44	575.26	11.00	19	1027.36	14.72
0.35	65.17	3.67	1.10	260.65	7.39	1.45	586.37	11.11	2.20	1042.19	14.83

fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7
fig. 8
fig. 9
fig. 10
θ+90°
1/2

fig. 1
1/200
fig. 4
1/50
fig. 3
1/200
fig. 5
1/50
fig. 6
1/10
fig. 2
1/200
fig. 7

fig. 1
1/10
fig. 2
1/10
fig. 3
1/10
Nord
Sud
Est

fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7
fig. 8

fig. 5
1/1
A
A
fig. 4
1/1
fig. 1
1/1
A
B
m
n
n'
m'
G
G
fig. 2
1/1
H
L
F
C
N
P
M
M'
N'
P'
H'
L'
F'
C'
fig. 7
A
B
fig. 3
1/1
N
P
O
M
M'
O'
N'
P'
fig. 6
1/2

fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7

fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6

fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
sud
ovest
27X
28X
29IX

RELAZIONE

letta dal Socio F. Brioschi, relatore, a nome anche del Socio C. Razzaboni, nella seduta dell' 8 aprile 1888, sulla Memoria dell' ing. Paolo Cornaglia, intitolata: *Delle Spiaggie.*

« L'autore, già noto per lavori relativi ai porti di mare, in quello sottoposto al nostro esame, dopo avere riassunte e coordinate una serie di osservazioni e di misure dirette, relative alla formazione delle spiaggie, ha dedotte dalle medesime alcuni principî generali intorno al moto delle onde, ed ai movimenti dei materiali da esse prodotti, principî i quali possono trovare nella pratica utile e continua applicazione.

« I Commissarî concludono per ciò nel proporre all'Accademia l' inserzione della Memoria dell' ispettore Cornaglia nei suoi Atti ».

Delle spiaggie.
Memoria dell'ing. PAOLO CORNAGLIA.

1. *I materiali delle spiaggie si muovono essenzialmente sotto l'azione del mare.*

Se attraverso una spiaggia marittima, come quelle d'Italia, si dispone un ostacolo, ad esempio un pennello od un molo; si osserva generalmente che negli angoli dai due lati dell'ostacolo si accumula una certa quantità di materiali, sistemandosi per guisa che quivi la spiaggia viene ad assumere un andamento in curva più o meno ampia ed aperta, ma colla concavità volta al largo, la quale raccorda il fianco dell'ostacolo col rimanente della spiaggia.

È essenzialmente il mare che accumula e sistema quei materiali; giacchè il fenomeno si osserva anche, ed anzi meglio, dove non esistono correnti prodotte da altre cause (1); o se vi sono, esse non hanno, come avviene per la corrente litoranea (2), forza sufficiente da smuovere i detti materiali.

E dicendo che è il mare il quale accumula e sistema quei materiali, si deve intendere essere i movimenti che le onde determinano sul fondo; giacchè è appunto e soltanto sotto l'impulso del liquido in moto rasente il fondo che i materiali del fondo stesso si muovono.

Tanto è vero che quei materiali si muovono sotto l'azione del mare, che dalla parte di dove arrivano le agitazioni più forti, specialmente se sono di *traversìa* (3), generalmente si vede che essi si accumulano in maggior copia, a segno che la spiaggia nel suo andamento generale da questa parte dell'ostacolo si dispone più avanti verso il largo che non dall'altra parte.

(1) Nello stretto di Messina ad esempio vi ha la corrente di flusso e riflusso la cui velocità è ordinariamente da 1,50 a 2,00 metri, e può aumentare notevolmente se il vento la favorisce.

(2) La corrente litoranea possiede al più una velocità di 4 miglia marine nelle 24 ore, ossia di centimetri 9 (nove) al minuto secondo; e possiede tale velocità alla superficie e non già sul fondo, dove non consta sia ancora stata misurata. — Sul fondo la velocità della corrente litoranea sarà indubbiamente minore; ma quand'anche fosse ancora la stessa, sarebbe incapace di smuovere i materiali delle spiaggie, perchè a muoverli occorrono almeno le velocità seguenti:

Sabbia	30	centimetri al minuto secondo;
Ghiaja	60	» »
Ciottoli	90	» »

(3) *Traversìa* è quel mare o meglio agitazione proveniente dal largo, che a motivo della sua violenza mette in pericolo i bastimenti di andare a traverso al litorale.

Così i numerosi pennelli costrutti sulla riviera ligure occidentale per imbonire [1] quelle spiaggie, sono tutti più interriti dalla parte di ponente; perchè la traversìa essendo di libeccio, colpisce le spiaggie stesse sotto un angolo acuto dalla parte di ponente.

Ma un gran fatto dimostra anche più nettamente la cosa, ed è che le sporgenze delle coste marittime in genere si trovano più interrite dalla parte della traversìa; ed anzi dall'altra parte esse si trovano più o meno scarnate, perchè il mare da questa parte avendo minor forza, vi raduna una minor quantità di materiali e più piccoli; e se la sporgenza non è troppo pronunciata per guisa che l'adiacente spiaggia da questa stessa parte possa ancora essere abbastanza battuta dalla traversìa, la medesima cacciando avanti i materiali, li allontana dalla sporgenza.

Basta consultare una carta costiera qualunque per constatare il fatto; ma un dei litorali che lo presenti in modo più luminoso, è il calabrese del Tirreno.

Quivi tutte le sporgenze si trovano più interrite dalla parte verso Reggio nella tratta da Capo Vaticano al golfo di S. Eufemia; ed invece si trovano più interrite dalla parte verso Napoli nell'altra tratta tra i golfi di S. Eufemia e di Policastro.

Nel suo andamento generale il litorale nella prima tratta si dirige ad est 18° nord ed a nord 17° ovest nella seconda. La traversìa, stante la diversa giacitura ed orientazione del litorale, è da ovest-nord-ovest nella prima tratta e da ovest nella seconda

Quindi la traversìa medesima fa un angolo acuto col litorale verso Reggio nella prima tratta; ed un angolo acuto col litorale verso Napoli nella seconda tratta: epperò fa camminare dapertutto le materie verso il golfo di S. Eufemia come in una specie di cul di sacco.

I materiali poi che il mare raduna da una parte dell'ostacolo, vengono più o meno lasciati a posto dal mare proveniente dall'altra parte, appunto perchè si trovano più o meno al riparo di detto ostacolo.

Da tutto ciò si deduce che il mare, secondo la sua forza, purchè sia sufficiente, fa muovere tutti od alcuni soltanto dei materiali delle spiaggie come l'arena, la ghiaia, i ciottoli, ecc.; e li fa muovere ora in un senso ed ora nell'altro secondo la sua direzione; ma in definitivo essi camminano principalmente in quel senso nel quale il mare ha un'azione prevalente, che generalmente come si disse è la traversìa.

2. *Il peso dei materiali modifica gli effetti dei movimenti dovuti esclusivamente alle onde.*

Nelle spiaggie marittime si osserva poi l'altro gran fatto che, mentre talune si protendono, altre invece si corrodono.

Nelle prime si annoverano fra le altre in Italia le spiaggie di Ferrara e Ravenna, della Calabria occidentale e di Pisa.

Tra le seconde si hanno la spiaggia alle cave di monte Conero presso Ancona, e molte della riviera ligure occidentale, le quali appunto si cercò d'imbonire mediante pennelli perchè si corrodevano.

[1] In questi casi si adotterà *imbonire* a preferenza di *bonificare*, giacchè ormai quest'ultimo vocabolo viene comunemente usato nelle questioni che hanno rapporto coll'igiene.

Ora siccome le leggi della natura sono indubbiamente dappertutto le stesse, si deve concludere che *alla riva*:

1° I movimenti delle materie non sieno esclusivamente d'appulso alla riva o di trascinamento verso il largo; ma sieno alternativamente rivolti ora nell'un senso ed ora nell'altro, come del resto si osserva nei flutti alla riva;

2° In talune circostanze prevalga il movimento verso la riva, ed in altre prevalga invece il movimento verso il largo.

Quest'ultima circostanza ne implica un'altra; che cioè deve necessariamente intervenire qualche altra causa la quale modifichi gli effetti che da lor sole le onde del mare produrrebbero sul fondo.

Ora se si osservano le spiaggie in aumento, si scorge che sono tutte sottili: e viceversa le altre veramente in corrosione sono tutte più o meno profonde, vale a dire a fondo ripido. *Veramente in corrosione*, perchè talune spiaggie dopo essersi avanzate per un certo tempo, poscia si ritirano; come si verificò ad esempio nelle spiaggie a levante del vecchio porto di Pesaro e del porto di Porto Maurizio.

Ciò avviene nelle spiaggie sottili dove, date certe condizioni, si formano dei rialzi di fondo sottomarini i quali intercettano più o meno il mare dal largo. Allora le spiaggie alla riva si ritirano, ma sufficientemente al largo continuano ancora ad avanzarsi sott'acqua come si vedrà in seguito (14); epperò questo caso anzichè contraddire la regola generale, la conferma, che cioè le spiaggie sottili si protendono e le profonde si corrodono.

Le carte idrografiche della R. Marina per le spiaggie sottili, ed i rilievi eseguiti appositamente od in occasione dell'esecuzione di opere marittime sulle spiaggie profonde; mostrano infatti che a partire dalla riva la distanza della linea di livello del fondo alla profondità di 10 metri, ossia della linea isobata dei 10 metri, è nelle diverse spiaggie la seguente.

Per le spiaggie sottili varia:

a Ferrara	da m.	2700	a m.	5000
a Ravenna	"	4200	"	6500
nella Calabria occidentale . .	"	[1] 250	"	800
a Pisa	"	1000	"	2800

Per le spiaggie profonde è:

alle cave di monte Conero	m. 100
a Chiavari	" 400
a Cornigliano	" 150
a Pegli	" 400
a Voltri.	" 350
a Varazze	" 180
a Celle	" 275
a Bergeggi.	" 125
a Noli	" 100
a Finalmarina.	" 130

[1] Da rilievi appositi; fatta eccezione di certi punti speciali, come davanti ai Capi ed ai delta dei torrenti.

Da ciò si scorge che la causa la quale interviene a modificare gli effetti che da lor sole le onde produrrebbero sul fondo, è la componente del peso dei materiali parallela al fondo; la quale agisce sempre secondo la linea di massima pendenza del fondo, e non è messa in giuoco nel movimento che quando questo è abbastanza energico da far muovere i materiali.

Le onde agiscono invece nella direzione del proprio cammino, come lo dimostra il fatto che i materiali camminano ora in un senso ed ora nell'altro secondo la parte da cui il mare, ossia le sue onde provengono.

Ora i movimenti sul fondo dovuti esclusivamente alle onde si possono scomporre in due componenti: l'una secondo le linee di livello del fondo; l'altra normale alle linee medesime. La prima è quella che fa camminare i materiali lungo i litorali. L'impulso dovuto alla seconda, combinato colla suddetta componente del peso dei materiali parallela al fondo, costituisce la forza che li spinge alla riva o li tira al largo.

Se come si supporrà in tutto quel che segue, e si verifica sempre fino ad una certa distanza più o meno grande dalla riva secondo le circostanze, il fondo del mare pende verso il largo; in allora la componente del peso in parola si sottrae sempre dal detto impulso quando è volto verso la riva; vi si aggiunge sempre se è invece volto verso il largo.

Sovra fondo a pendenza mite, la componente medesima ha un tenue valore; e viceversa lo ha grande su fondo ripido.

Nel primo caso ciò che vien tolto dall'impulso delle onde verso la riva ed aggiunto al loro impulso verso il largo, non è capace di rendere l'intensità del primo inferiore al secondo.

L'inverso succede nell'altro caso nel quale l'impulso alla discesa coll'aggiunta che riceve, riesce d'una intensità superiore a quello all'ascesa colla riduzione che subisce.

Da ciò consegue ancora che i movimenti in ascesa che le onde determinano sul fondo alla riva, devono prevalere su quelli in discesa; giacchè se fossero d'intensità uguale, per effetto di detta componente del peso l'impulso verso il largo prevarrebbe sempre e le spiaggie si corroderebbero sempre. La stessa cosa ed a più forte ragione succederebbe se l'impulso verso il largo prevalesse su quello verso la riva.

3. *I materiali che arrivano al mare rimangono nei bacini di loro origine.*

Ma in natura si osserva un altro fatto capitale, ed è che i detriti che i corsi d'acqua portano al mare o che i flutti svelgono dalle coste, non escono per così dire fuori dei bacini di loro origine.

Per così dire, perchè talvolta, secondo le circostanze, essi camminano più o meno lontano lungo i litorali, facendosi naturalmente sempre più rari; ma ad un certo punto si vedono a cessare completamente.

La riviera occidentale ligure colla sua grande varietà di terreni geologici e colla sua orientazione per la quale viene colpita in isbieco dalla traversìa, offre al riguardo esempî molto rimarchevoli ed eloquenti (¹).

(¹) L. Mazzuoli, *Sulla natura litologica delle spiaggie liguri.* Bollettino geologico, n. 9 e 10 del 1887.

Guardata in grande, cioè fatta astrazione da qualche lembo di quaternario, di pliocene e di miocene esistente qua e là, specialmente in vicinanza al mare; la costituzione geologica di quella riviera andando verso Genova come risulta dalla carta di A. Issel, L. Mazzuoli e D. Zaccagna, è la seguente.

Alla punta della Mortola presso il confine del regno terminano il giurese ed il crataceo (calcari compatti per lo più di color chiaro).

Poscia fino ad Albenga si trova un gran deposito di eocene (calcari-marnosi, argillo-scisti ed arenarie, con prevalenza or dell'uno ed or dell'altro di questi tre tipi rocciosi, tutti di color bruno talvolta molto cupo).

Da Ceriale poco oltre Albenga fino a Bergeggi apparisce un esteso giacimento di trias inferiore (calcari ceroidi e marmorei, quarziti ed anageniti, calcèscisti e scisti talcosi e micacei), il quale alterna col trias medio (calcare cavernoso e calcare dolomitico bigio ed azzurro da calce).

Da Bergeggi ad Albissola si presenta una serie di roccie del terreno primario (quarziti, scisti talcosi e cloritici nodulosi, e besimauditi già denominate apenniniti). In alto però delle valli del Letimbro e del Sansobbia che sboccano il primo poco a ponente di Savona ed il secondo immediatamente a levante d'Albissola; si riscontrano delle masse più o meno estese di calcare del trias medio.

Da Varazze a Cornigliano s'incontra una potente formazione serpentinosa frammista a roccie talcose e micacee del trias inferiore, principalmente nelle vallate che sboccano a Voltri; con isole di calcare dolomitico (trias medio) a Cogoleto, Voltri e Sestri-ponente. Quindi fino a Genova ed oltre, di nuovo i sedimenti eocenici come nella prima tratta,

Il quaternario (da Albenga a Pietra-ligure) è rappresentato da depositi di ghiaie e ciottoli; il pliocene (in diversi punti della prima tratta e nella pianura tra Vado e Savona) è costituito da conglomerati, sabbie, marne, ed argille, per lo più di color chiaro; ed il miocene (quasi da Albissola a Varazze) è formato da arenarie e conglomerati.

Or bene, i materiali delle spiaggie tra Bordighera ed Albenga escluse, sono unicamente dell'eocene; ed anzi in generale sono d'arenaria o di calcare marnoso come l'adiacente costa.

La spiaggia di Noli è di frammenti di quarziti, scisti talcosi e calcari del secondario.

Quella di Vado al sud del forte di S. Lorenzo è di detriti di roccie quarzose ed a pasta talcoide, tra i quali se ne osservano alcuni a struttura gneissica del terreno primario, con assenza di frammenti di roccia calcare. La debole effervescenza che la sabbia di questa spiaggia fa cogli acidi, è dovuta alla presenza di resti di conchiglie, ed all'esistenza di un poco di calcite inclusa in certe roccie silicee.

A Pegli nel 1880, cioè prima che si prolungasse il pennello di levante e si costruisse quello di ponente, lavori questi stati eseguiti verso il 1883 con massi naturali di roccia talcosa e qualcheduno di roccia serpentinosa; la spiaggia era esclusivamente di ghiaia più o meno minuta di serpentina.

Ciò dipende dacchè, procedendo verso Genova, gli elementi di calcare giurese

e cretaceo che s'incontrano sulla spiaggia di Ventimiglia e Bordighera, non superano il Capo di S. Ampeglio. I materiali dell'eocene passano bensì oltre Loano e fors'anche al di là del Capo di Caprazoppa, ma da quest'ultimo punto ne passano più pochi; non ne passano poi più affatto al di là di Capo Noli.

I frammenti di calcare secondario che si trovano ancora in abbondanza a sud del molo alla cava di Bergeggi, non lo oltrepassano.

Parimente i detriti di talcoscisto ben abbondanti ancora a ponente della cosidetta Pria Pula, non passano oltre sulla vicina spiaggia di Pegli.

Ma non solo certe sporgenze della costa intercettano il cammino dei materiali; bensì ancora certe sue brusche rientranze. Così mentre sulla spiaggia a sud del porto di Savona ed in quella di Albissola a nord del porto stesso, si rinvengono degli elementi di calcare secondario portati sulla prima dal Letimbro e sulla seconda dal Sansobbia; non se ne trovano più affatto sulla spiaggia del cosidetto secondo ritano lungo la costa da Savona ad Albissola; e se qualche effervescenza si manifesta nella sabbia di questo ritano, essa è dovuta alle medesime cause a cui lo è quella della sabbia componente la spiagga a sud del forte di S. Lorenzo di Vado.

Ora le particolarità del litorale, o più precisamente lo sviluppo delle spiaggie percorse dai materiali, e la distanza alla quale la linea isobata dei 10 metri passa davanti ai Capi ed alle sporgenze in genere; sono le seguenti:

	Sviluppo delle spiaggie kilm.	Distanza della linea dei 10 m. metri
Dalla punta della Mortola presso il confine del regno fino a Bordighera oltre .	10	
e non presenta sul suo percorso che il promontorio di Ventimiglia circa . . .	4	375
Capo S. Ampeglio		245
Da Albenga fino al Capo di Caprazoppa .	18	
con una piccola sporgenza a Loano . .	10	470
Capo di Caprazoppa		150
Capo Noli		95
Asse del molo di Bergeggi		45
Da Voltri alla Pria Pula oltre	4	
ed è completamente libera,		
Pria Pula { dalla riva		340
Pria Pula { dallo scoglio emergente . .		100

Cose analoghe si verificano anche andando in senso inverso, ossia verso la frontiera francese; che cioè i materiali delle spiaggie passano al di là di certe punte meno pronunciate, ma non più al di là di certe altre.

Cose simili accadono lungo la costa francese del Mediterraneo, tantochè il

Delesse ([1]) venne alla conclusione che « chaque dépôt littoral dans la Méditerranée « tend à se localiser sur les côtes qui en ont fourni les matériaux ».

Anzi in altro punto dice perfino « Dans la Méditerranée le dépôt littoral est « essentiellement local ».

4. *L'agitazione del mare può essere grande anche a notevoli profondità.*

Il fatto che i materiali non superano certe punte, fece credere a molti che l'agitazione del mare, diminuendo rapidamente di mano in mano che si discende sotto la sua superficie, cessasse, anche nelle più forti burrasche, di essere sensibile ad una certa profondità; giacchè, vedendo che sulle spiaggie del Mediterraneo in generale, cioè in qualunque loro condizione di esposizione, di forma e di composizione, i materiali non vengono più alla riva quando si trovano ad una profondità di una decina di metri circa, dicevano essi che il mare non arrivasse più a farveli muovere.

Tale credenza è affatto erronea, giacchè anzi l'agitazione del mare può essere ben grande anche a notevoli profondità.

A provarlo basta citare alcuni fatti ([2]).

Un vascello passando sul banco della Caccia il quale si trova alla profondità di 23 metri fra le isole di Corsica e Minorca, ricevette a bordo varie ondate molto cariche di sabbia svelta dal fondo.

La fregata Teti andò a picco su profondità di 22 metri a Capo Frio nell'America meridionale. Dopo un certo tempo nel ricupero del suo prezioso carico si trovò che la fregata era ridotta in pezzi, e che questi erano sparsi qua e là sul fondo, e sepolti sotto grossi massi di pietra.

I bastimenti che passano sul banco di Terranova risentono dei forti colpi al di sotto prodotti dalla reazione del banco, quantunque esso si trovi da 80 a 160 metri di profondità sott'acqua.

In questo caso il movimento in ascesa che si determina nel liquido sulla scarpa del banco, produce nella direzione della scarpa stessa un getto, il quale, uscendo dal banco, attraversa tutta la massa liquida sovrastante ed arriva alla superficie con bastante forza da farne sentire i colpi ai bastimenti. Anzi nelle forti burrasche il getto arriva alla superficie del mare con tanta forza da produrre dei grandi frangenti.

Cose analoghe avvengono sul banco « dell'Avventura » che da Capo Granitola in Sicilia s'inoltra verso Capo Bon.

5. *I movimenti del liquido sul fondo crescono d'intensità avvicinandosi a terra.*

Per contro l'agitazione per quanto sia grande, cessa di farsí sentire a profondità abbastanza grandi; quantunque non cessi di esistere, come si vedrà in appresso quando si parlerà del modo in cui le onde agiscono (6).

([1]) *Lithologie des mers*, chapitre X.

([2]) Cialdi, *Del moto ondoso del mare*, § 647, 749, 620 e seguenti.

Le materie estratte colla sonda provano che le più terribili tempeste dell'Atlantico non hanno il potere di produrre sul fondo del cosidetto piano telegrafico un'agitazione sufficiente da corrodere gli organismi delicatissimi che vi sono deposti, nè da muoverli da posto, nè mescolarvi dei ben che menomi granelli di sabbia [1].

I movimenti quindi che le onde determinano nel liquido sul fondo vanno diminuendo d'intensità andando più distanti dalla riva ed in profondità maggiori, fino a rendersi non più sensibili.

Alla riva poi in certe circostanze essi producono degli effetti veramente formidabili; tanto da smuovere, e talora anche violentemente, massi d'un volume enorme; come avvenne ad esempio al molo occidentale di Napoli, dove la straordinaria tempesta del 3 dicembre 1872 spostò un masso in muratura del volume di 128 m.c., situato a m. 1,40 sul livello medio del mare. Tali effetti sono ben più grandi di quelli che il semplice movimento di traslazione delle onde potrebbe produrre.

Ed invero, la più grande velocità di traslazione delle onde, è quella di 20 metri al minuto secondo misurata a S. Giovanni di Luz in Gascogna.

Ora per produrre i getti verticali di liquido di 50 e più metri d'altezza che si osservano talvolta al faro di Eddystone, occorre una velocità iniziale molto maggiore; imperocchè, pur facendo astrazione dalle perdite prodotte negli urti e dalla resistenza del liquido ambiente e dell'aria esterna, la velocità dovuta a quell'altezza è di m. 31,3. I suddetti effetti alla riva sono pure ben più grandi di quelli che potrebbero essere prodotti dai movimenti orbitali sviluppati nelle molecole della massa liquida dal passaggio delle onde [2].

Difatti, per le onde di maggior potenza, come quelle osservate da Wilkes al sud di Capo Horn, per le quali fu misurata l'altezza di m. 9,7, l'ampiezza di m. 116, e la velocità di traslazione di m. 13,7 al minuto secondo; la massima velocità verticale che si sviluppa nel movimento orbitale alla superficie del liquido è di m. 3,6 circa; la quale è pure molto al di sotto dell'anzidetta velocità di m. 31,3.

In direzione orizzontale poi la massima velocità del movimento orbitale sarà anche minore, avvegnachè lo spostamento delle molecole in questa direzione è ben più piccolo di quello in direzione verticale, come lo mostra l'osservazione.

Nell'interno della massa liquida poi le sue velocità nel movimento orbitale saranno anche minori; perchè, qualunque sia la legge secondo cui varia, esso va senza dubbio scemando a misura che si discende sotto la superficie del liquido.

Del resto vi sono dei fatti i quali provano che l'agitazione della massa liquida diminuisce di mano in mano che si discende più basso, come si vedrà in seguito (7).

6. *Modo in cui le onde agiscono sul fondo.*

Da tutto ciò si deve conchiudere che i movimenti che le onde determinano sul fondo, non sono già l'effetto di una semplice propagazione dell'agitazione che si osserva alla superficie, ma bensì d'una causa ben più potente.

[1] Maury, *Geografia fisica del mare.*

[2] Circa i movimenti orbitali della massa liquida, vedasi l'opera del colonnello Emy sul movimento delle onde.

In proposito è da notarsi che da ogni onda della superficie si propaga una certa agitazione fin sul fondo (1), il quale, non essendo elastico, colla propria resistenza paralizza i movimenti che altrimenti le molecole al suo contatto prenderebbero in direzione normale al fondo, e loro lascia soltanto di strisciare sul fondo stesso.

In altri termini, nell'avanzarsi ogni onda produce nella direzione del proprio cammino lungo il fondo un certo movimento, il quale si propaga oltre secondo una certa legge. Nella sua posizione successiva l'onda produce un poco più avanti sul fondo un movimento analogo, il quale incalza quello che dal primo punto del fondo si sarà intanto trasmesso più o meno secondo le circostanze al secondo.

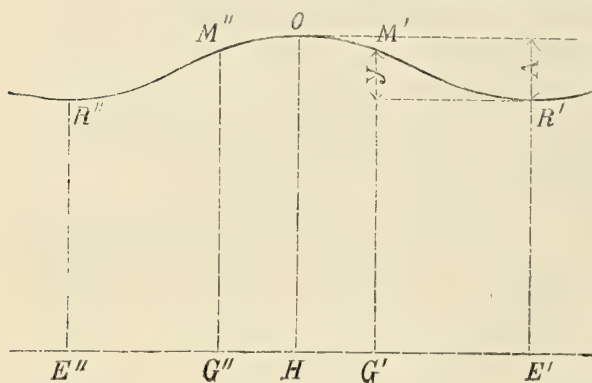
Così il movimento prodotto rasente il fondo, incominciando all'origine dell'agitazione al largo, a partire dal qual punto si mantiene insensibile per un certo tratto più o meno grande secondo le circostanze; va in generale aumentando successivamente d'energia di mano in mano che si va avanti; sinchè finisce per scoppiare alla riva colla massima sua veemenza.

Tanto è vero, che secondo l'esperienza dei marini le burrasche sono tanto più violenti, che il mare è più lungo e più profondo.

Anche *più profondo*, come lo prova il fatto che, per quanto gagliardo sia il vento e l'agitazione provenga da lontano, il mare non è mai grosso quande viene lungo il litorale.

In generale va aumentando d'energia, imperocchè possono intervenire delle cause speciali per cui il detto movimento diminuisca invece più o meno e più o meno rapidamente sovra certi tratti, come si vedrà in seguito (7).

La circostanza poi delle burrasche le quali, a parità delle altre condizioni, sono tanto più violenti che il mare è più profondo, dimostra ancora che la reazione del

(1) Per dimostrarlo basta la considerazione seguente:

$$(OH - G'M') - (M'G' - E'R') = A - 2Y$$
$$(OH - G'M') + (G'M' - E'R') = + A$$

Sia A l'altezza dell'onda visibile; Y l'ordinata della curva che rappresenta la sua sezione retta, riferita ad un sistema di assi ortogonali coll'origine nel punto più depresso dell'onda e coll'asse delle ascisse orizzontale.

Se si suppone che l'onda non si muova, ogni molecola di liquido, qualunque ne sia la distanza e la profondità, trovasi soggetta all'eccesso di pressione idrostatica; A — 2Y in direzione verticale; ± A in direzione orizzontale, secondochè si trova da una parte o dall'altra della verticale condotta pel culmine dell'onda fino alla verticale pel suo punto più depresso.

Ben inteso nel movimento tali eccessi di pressione si modificheranno; ma intanto mostrano che ogni molecola si muoverà: solamente si muoverà più difficilmente a misura che si trova più basso, perchè il suo movimento vien contrastato dalla resistenza di una colonna liquida di maggiore altezza.

fondo è tanto maggiore che esso è più ripido; giacchè in caso contrario, vale a dire quando il fondo è poco ripido, le colonne liquide avendo minor altezza, la propagazione dell'agitazione dalla superficie si farebbe anzi sentire maggiormente sul fondo.

Al riguardo non puossi ammettere l'idea espressa dal De Tessan colle seguenti parole sul modo d'agire delle onde [1]: « L'énorme demi-force vive d'une grande « onde doit donc se concentrer ainsi dans une masse d'eau de plus en plus décrois- « sante, et la rendre capable de produire des grands effets mécaniques ».

Ed a provare che quest'idea non è ammissibile, basta citare il fatto [2] che nei grossi tempi i bastimenti trovano sopra il banco di Terranova una calma relativa quasi come in un porto; benchè quivi le profondità sieno molto minori che al di fuori. La linea dei frangenti che si determinano sull'orlo del banco, segna il confine tra il mare placido e quello in tempesta.

Del resto è noto che, a parità delle altre condizioni, su spiaggie sottili il mare relativamente non è mai così furioso come sui litorali di acque profonde.

7. *I movimenti rasente il fondo cessano ad una certa altezza dal fondo stesso.*

I movimenti che le onde determinano così sul fondo, devono propagarsi alla massa liquida sovrastante; ma però in guisa da rendersi insensibili ad una certa altezza dal fondo, in rapporto coll'energia dei movimenti stessi e dell'altezza della colonna liquida.

Lo prova l'esperienza che non lungi dalle coste, e per conseguenza sovra profondità medie, ma ancora abbastanza grandi da non poter gettare l'àncora, i bastimenti durante un'intera notte di grosso tempo possono reggere abbastanza bene sovra un'àncora fluttuante discesa ad un centinaio di braccia.

L'àncora fluttuante è formata da una croce di S. Andrea sulla quale si distende fortemente una vela; e vien sospesa ad un gherlino attaccato alle quattro estremità della croce.

Questo modo di ancoraggio non tiene più se si discende l'àncora a pochi metri soltanto.

La differenza di pressione sulle due faccie dell'àncora è sempre uguale al peso dell'acqua spostata, qualunque sia la profondità a cui essa vien discesa.

D'altra parte la resistenza del bastimento e dell'àncora fluttuante nella direzione del loro cavo d'unione sono opposte l'una all'altra, e rispettivamente proporzionali al quadrato della loro velocità relativa rispetto al liquido in contatto in questa stessa direzione.

Da ciò si deve concludere che in queste condizioni, cioè a quella profondità e ad una certa distanza dal fondo, l'àncora si deve trovare in un liquido ambiente abbastanza tranquillo da poter tenere.

Questa cosa, la quale prova che l'àncora fluttuante si trova in un sito dove da una parte l'agitazione propagantesi dalla superficie è ben più poco sensibile, e dall'altra non vi arrivano i potenti movimenti che le onde producono sul fondo; concorre

[1] Delesse già citato, capitolo VII.
[2] Cialdi già citato, § 620.

pure a provare che l'anzidetta agitazione propagantesi dalla superficie, perde molto di vigore scendendo ad una certa profondità, sicchè non è capace di produrre direttamente gli anzidetti potenti movimenti sul fondo.

Del resto un'altra prova che i potenti movimenti che si determinano sul fondo non si estendono molto alto sul medesimo, lo si ha nel fatto di certe rade sicurissime per l'ancoraggio, quantunque apparentemente sieno scoperte alla traversìa.

Ciò avviene quando il fondo presenta una parete a picco, una cresta di scogli, od altre simili accidentalità di sufficiente estensione; le quali, avendo la virtù d'intercettare bastantemente quei movimenti, coprono la rada in quella direzione; cosa che può aver luogo soltanto nel caso in cui i detti movimenti si tengano presso il fondo.

Intanto importa tener nota che i movimenti stessi cessando di farsi sentire ad una certa altezza sul fondo, vanno in tale senso diminuendo d'intensità secondo una certa legge, ma rapidamente dietro quanto s'è visto.

8. *I movimenti sul fondo al largo sono alternati come alla riva.*

I movimenti che le onde determinano sul fondo al largo sono anche alternati, ossia di va e vieni, come quelli che si osservano alla riva. Se ne ha la prova nel seguente brano di rapporto pubblicato dal *Nautical magazine and naval chronicle*, Londra 1832, sul già accennato ricupero della fregata Teti. « Anche in tempo favo-
« revole havvi gran difficoltà e pericolo nel discendere sul fondo della baia, poichè
« la campana spesso riceve un movimento oscillatorio, cioè spazza per quattro o cinque
« piedi (*the bell frequently taking a swing or sweep of four or five feet*); ed
« allora urta contro gli scogli con forza sì grande che sarebbe riuscita funesta se ci
« avesse colpiti, ed alla quale veruna campana di ferro fuso avrebbe potuto resistere ».

Un'altra prova la fornisce lo stesso banco di Terranova con quel movimento delle acque il quale porta i bastimenti a *sbancare*, cioè tende a farli uscire fuori del banco quando se ne trovano presso al ciglio.

In proposito si è visto che il movimento in ascesa che si determina sulla scarpa del banco, produce un getto il quale in certe circostanze arriva fino alla superficie del mare, ed anzi talvolta emerge più o meno. Quel getto avrebbe invece per effetto di sospingere i bastimenti in avanti sul banco; epperò gli deve succedere un altro effetto in senso contrario. Quest'altro effetto è dovuto al movimento in discesa che si determina sulla scarpa stessa del banco, e produce nel liquido sovrastante una specie di chiamata, la quale si fa sempre sentire fino alla superficie del mare, perchè il liquido della massa sovrastante al banco entro un certo settore si trova tutto più o meno aspirato in quella direzione.

E siccome il getto penetra nella massa liquida sovrastante con movimenti diversi da quelli che la massa stessa possiede, mentre nella chiamata non vi ha intromissione di altro liquido; così nel primo vi devono essere delle perdite di forza viva che non succedono nella seconda; epperò a parità delle altre condizioni gli effetti della chiamata devono essere ben più sensibili di quelli del getto; ed è appunto ciò che porta i bastimenti ad uscire dal banco.

I movimenti quindi che si determinano sul fondo sono dei veri flutti con movimento alternato, ora diretto nel senso del cammino delle onde, ed ora nel senso inverso; epperò loro si conserverà il nome già dato di *flutti di fondo* o semplicemente *flutti* (1).

9. *Senso del movimento del flutto in rapporto colle fasi delle onde.*

Dal momento che i flutti possiedono un movimento alternato, ne viene che ad ogni cambiare di senso essi hanno per un istante una velocità nulla. Inoltre tanto il loro movimento diretto come l'inverso presentano a dati istanti un massimo di velocità.

Qualunque sieno gli istanti in cui hanno precisamente luogo le velocità nulla e massima diretta od inversa; è notevole il fatto che in generale il movimento diretto del flutto corrisponde verticalmente al dorso dell'onda, e l'inverso al cavo; ossia che il flutto ha un movimento nello stesso senso del cammino delle onde sotto il dorso di queste, ed in senso contrario sotto il loro cavo.

Bastano a provarlo i fatti seguenti.

Allorquando è sabbioso, il fondo assume un aspetto raggrinzato con tante piccole sporgenze a guisa di porche più o meno regolari, ma all'incirca parallele nel loro andamento generale. Or bene in acque poco profonde ed abbastanza chiare da poter vedere il fondo, se questo è terroso ed il mare è sufficientemente agitato; si osserva che quando passa il culmine di un'onda, contemporaneamente il fondo al di sotto s'intorbida smussandosi le sommità di dette sporgenze; e che le diverse torbide successivamente seguono il cammino dell'onda sotto il suo dorso, e ritornano poi indietro al passaggio del suo cavo.

Qualunque sia poi lo stato e la profondità del mare, si osserva che il getto il quale si slancia fuori della massa liquida alla riva, ne esce sensibilmente allo stesso momento in cui giunge e nello stesso senso in cui procede il culmine dell'onda.

Parimenti, se più o meno al largo esiste un rialzamento ripido del fondo, se tale rialzamento si trova a poca profondità, e se l'agitazione del mare è sufficiente; si osserva che quando il dorso di un'onda passa al di sopra del ciglio di quel basso fondo, vi si manifesta un frangente il quale accompagna per un tratto più o meno

(1) Comunemente s'intendono per flutti quelle onde di forma speciale che si osservano fra il punto in cui incominciano a frangersi e la riva, cioè dove perdono la forma normale che possiedono al largo. Perciò si usa pure chiamarli frangenti; quantunque più propriamente il vocabolo « frangenti » significhi i siti dove il mare frange. Essi non sono che un caso speciale del flutto di fondo; quello in cui per difetto di profondità e per la ripidità del fondo, il flutto di fondo comparisce alla superficie, travolge l'onda e la fa infrangere, come si vedrà in seguito (9 e 14).

A questa forma speciale di onde in francese si dà altresì il nome di *lame*, a motivo che quivi si rende apparente un certo movimento di traslazione di liquido verso la riva sotto forma di lame.

In mezzo a queste varie denominazioni, ad evitare ogni confusione tra flutti alla superficie e quelli sul fondo e per maggior concisione, nei presenti scritti si adotterà esclusivamente per dette onde di forma speciale il nome di *frangenti*; per riservare quello di *flutto* semplicemente al flutto di fondo il quale include in sè una certa idea di oscillazione.

lungo secondo le circostanze l'onda nel suo cammino. È l'effetto del getto prodotto dal flutto diretto; quale getto spiccandosi dalla scarpata ripida del rialzo, va a colpire l'onda nel suo dorso, la rialza e la fa infrangere più o meno travolgendola. In quelle condizioni il getto si distacca dal fondo in un punto abbastanza vicino alla superficie del liquido ed in una direzione abbastanza prossima alla verticale, da colpire l'onda in prossimità del punto che sovrasta verticalmente a quello di dove si spicca il getto.

10. *I flutti diretti prevalgono sugli inversi.*

Si è già visto (2) che vicino alla riva i flutti in ascesa ossia diretti prevalgono su quelli in discesa ossia inversi.

Un'altra prova di ciò, oltre al protendersi di talune spiaggie, la si ha nel fatto che quando le navi si avvicinano troppo a terra, vengono gettate alla costa; perchè là, come dicono i marini, il mare *insacca*, cioè porta alla riva. Con quelle tenui profondità e con mare burrascoso, il flutto di fondo arriva a toccare la carena di esse navi, e la sua prevalenza in ascesa le sospinge alla riva.

Ma la prevalenza dei flutti diretti sugli inversi, non ha luogo soltanto vicino alla riva, bensì anche al largo. Lo prova incontrastabilmente il fatto che le materie il cui peso specifico supera di poco quello dell'acqua, come certi resti animali o vegetali, vengono rigettati alla riva anche da grandi profondità; ed essi soli vengono così rigettati da quelle profondità, e non mai i detriti delle roccie il cui peso specifico è molto superiore a quello dell'acqua.

Or bene, quando il peso specifico delle materie è di poco superiore a quello dell'acqua, la componente del loro peso assoluto (diminuito ben inteso del peso dell'acqua da esse spostata) parallela al fondo ha un valore molto debole, ancorchè la pendenza del fondo sia grande.

Quindi, ciò che si toglie dall'impulso dei flutti in ascesa e si aggiunge all'impulso dei flutti in discesa, è così poca cosa, da non modificarli quasi e lasciare che la prevalenza dei primi sui secondi si manifesti ancora in modo ben sensibile, benchè non più in tutta la sua pienezza.

Del resto la prevalenza dei flutti in ascesa su quelli in discesa, è una cosa ben naturale se si considera che le onde, propagandosi fin sul fondo, devono in certo qual modo nel loro movimento di traslazione incalzare il liquido su per la rampa che costituisce il fondo.

A tale prevalenza deve pure essere in parte dovuto quel rigonfiamento delle acque, ossia innalzamento del loro pelo, che si osserva nei tempi cattivi; giacchè nel movimento apparente delle onde non verificandosi trasporto di liquido verso la riva; ve ne devono però trasportare più o meno i flutti di fondo colla loro prevalenza in ascesa, come si è già accennato parlando del significato comunemente attribuito ai flutti (8).

La prevalenza dei flutti diretti sugli inversi deve, come i flutti stessi, andar crescendo a misura che si va avanti verso la riva. Lo prova il fatto che quantunque alla riva stessa la pendenza del fondo generalmente sia maggiore, ed anche notevolmente;

tuttavia la componente del peso dei materiali parallela al fondo, non ha quivi il potere di soggiogare la detta prevalenza, sicchè i materiali si trovano cacciati verso la riva.

11. *I materiali camminano lungo i litorali.*

Tale prevalenza dimostra che come succede alla riva, anche al largo nella direzione parallela al litorale i materiali devono dappertutto camminare verso quella parte verso cui le onde camminano; giacchè sui movimenti prodotti dalle onde parallelamente alle linee di livello del fondo non influisce la componente del peso dei materiali ad esso fondo parallela.

Di tal guisa i materiali camminano ora in un senso ed ora nell'opposto secondo la direzione dei flutti; ma in definitivo si trasportano principalmente verso la parte opposta a quella da cui provengono i flutti prevalenti; *prevalenti* non solo per la loro energia, ma ancora per la loro durata e frequenza, nonchè per la loro inclinazione rispetto alle linee isobate, dalla quale appunto dipende la propria componente secondo le linee stesse.

I materiali si trasportano *principalmente* e non già interamente nel senso dei flutti prevalenti; imperocchè secondo l'energia e la frequenza dei flutti dalle due parti, e secondo le circostanze locali (pendenza del fondo in direzione longitudinale ossia parallela alla riva, esposizione del litorale secondo cui varia l'inclinazione dei flutti, ecc.) essi materiali possono anche avanzare di molto nel senso contrario ai flutti prevalenti, come si vedrà nell'esempio di Bari (12).

Sulla riviera ligure di ponente ad esempio sono prevalenti i flutti di libeccio, benchè avvengano più di rado degli altri di scirocco ben più deboli.

Ed in generale si può dire che i materiali lungo i litorali finiscono per trasportarsi principalmente nel senso della traversìa.

In ogni caso il movimento dei materiali parallelamente al litorale viene più o meno moderato dal fatto che le onde, le quali al largo hanno una direzione inclinata rispetto alla riva, non camminano già in linea retta; ma nell'avvicinarsi alla detta riva si vanno piegando in una direzione la quale si accosta vieppiù alla normale alla riva stessa. È questa una naturale loro tendenza ben pronunziata.

12. *Linea neutrale.*

Intanto che cosa vuol dire che i materiali delle spiaggie oltrepassano certe sporgenze come quella di Loano ed il promontorio di Ventimiglia; e non certe altre più pronunziate come Capo S. Ampeglio, Capo Noli, molo di Bergeggi e Pria Pula?

Vuol dire puramente che nel primo caso quei materiali devono passare sovra certe profondità dalle quali possono ancora essere sospinti alla riva: nel secondo caso invece, in cui le profondità sulle quali sono obbligati a passare sono maggiori, essi non possono più essere rigettati alla riva.

Lo stesso ripetasi per le insenature, o meglio ancora per le brusche rientranze: se sono di acque abbastanza profonde come all'imboccatura del porto di Savona, i materiali che vi transitano davanti non compariscono più alla riva.

La cosa succede poi tanto meglio davanti alle sporgenze le quali presentano al mare una fronte estesa ed a picco come Capo Noli; perchè allora si aggiunge la risacca per respingere verso il largo i materiali che passano colà davanti. Senza sporgenze o rientranze abbastanza pronunciate, i materiali delle spiaggie possono comparire lungo i litorali a distanze grandissime; come se ne ha la prova a Bari, nel cui porto nuovo ben abbondanti si rinvengono le sabbie vulcaniche del Vulture in valle d'Ofanto, la quale sbocca in mare a kilm. 60 circa a ponente di Bari. Ed è rimarchevole che la traversìa, la quale colà pure prevale sugli altri flutti nel far camminare le materie, le fa invece muovere in senso inverso, cioè da Bari verso l'Ofanto.

Vi deve dunque essere un punto, che si denominerà *neutrale*, dove il flutto in ascesa meno la componente del peso dei materiali parallela al fondo, ed il flutto in discesa più la componente stessa, si equilibrano tra loro perfettamente.

Il seguito di siffatti punti costituirà lungo il litorale una *linea neutrale*, a terra della quale i materiali trovansi sospinti verso la riva, ed a mare si trovano invece trascinati verso il largo.

Ben inteso la posizione della linea neutrale varia con tutte le cause che intervengono a determinarla, ed in primo rango colla violenza dei flutti.

Lo prova il fatto che i flutti provenienti dalla parte di levante sulla riviera ligure di ponente, non hanno potere di far passare sulla spiaggia di Pegli i materiali di calcare dolomitico che si trovano abbondantissimi sulla spiaggia di Sestriponente, abbenchè le due spiaggie sieno attigue fra loro e non separate da vere sporgenze, e la linea di livello dei 10 m. di profondità passi quivi ancora a quasi 800 m. dalla riva.

Così ancora i materiali di calcare compatto del secondario della spiaggia d'Albenga, non superano la piccola punta che si trova immediatamente a ponente del delta del Centa, quantunque essa disti meno di chilometri due dalla foce di quel corso d'acqua, e la linea di livello del fondo di 10 m. vi si tenga ancora a 460 m. dalla costa.

I materiali dunque che sotto l'impulso della traversìa di libeccio si trovano ancora rigettati alla riva da certe profondità; non lo sono più da profondità minori sotto l'azione del scirocco il quale colà ha molto minor vigore.

La posizione della linea neutrale varia anche grandemente colla pendenza del fondo e col peso specifico dei materiali, come s'è visto.

Varia pure colla grossezza dei materiali stessi. Al riguardo è da ricordarsi che l'intensità del flutto sovra un dato punto del fondo diminuisce rapidamente col crescere della distanza dal fondo stesso; sicchè il flutto colpisce meno intensamente la parte superiore dei materiali, i quali anzi, se sono abbastanza grossi, possono anche in parte trovarsi fuori dello strato d'azione del flutto di fondo.

Ora, per corpi di figura simile e similmente disposti, il loro peso cresce in proporzione più rapida dell'impulso che ricevono dai flutti; perchè il primo cresce come il cubo delle linee omologhe, ed il secondo in ragione anche meno rapida del quadrato delle linee stesse, non avendo il flutto la stessa intensità su tutta la sua altezza.

A parità quindi delle altre condizioni, mentre i materiali più grossi hanno una stabilità maggiore, avranno poi, dietro quanto si è detto più sopra, una linea neutrale più elevata.

In poche parole, la linea neutrale discende tanto più basso che la violenza dei flutti

è più grande e che la pendenza del fondo, il peso specifico ed il volume dei materiali sono più piccoli.

Eppertanto vicino alla riva gli stessi materiali che sotto l'azione di flutti d'una data intensità si trovano trascinati al largo; possono invece essere sospinti alla riva da altri flutti d'intensità maggiore, perchè i primi hanno una linea neutrale più elevata dei secondi.

Pel Mediterraneo, nelle sue più forti burrasche e sulle sue spiaggie aperte, la linea neutrale pei materiali di cui tali spiaggie sono ordinariamente costituite, non discende forse più basso di una diecina di metri; ritenendosi di fatto generalmente che *a detta profondità l'azione del mare non sia più molto sensibile*: ma acciocchè l'enunciato di tale massima sia esatto, bisogna completarlo colle parole «*per gli interrimenti*».

Inoltre, come si disse, *i materiali rimangono nei bacini di loro origine*, ma soltanto finchè si trovano al di sopra della propria linea neutrale; imperocchè al di sotto essi, col scendere verso il largo, possono transitare davanti le sporgenze le più pronunziate scansandole, e per tal modo possono trasportarsi molto lontano lungo i litorali.

Infine i flutti di traversìa essendo i più energici, ed avendo perciò la linea neutrale più bassa; sospingono alla riva i materiali da profondità maggiori, accumulandoveli talvolta a rilevanti altezze. Se quindi la traversìa non prevale sempre sugli altri flutti nel far camminare i materiali lungo i litorali; vi prevale però nell'accumulare gli interrimenti alla riva, salvo quanto si dirà in seguito (13 e 14) circa le spiaggie soggette a corrosione.

13. *Pianure e terrazzi sottomarini.*

Insomma i flutti di fondo, mediante il loro movimento alternato e col concorso della componente del peso dei materiali parallela al fondo da essi messa in giuoco nel movimento, trascinano giù i materiali che arrivano al mare.

Colla loro prevalenza in ascesa i flutti medesimi tengono indietro per quanto possono i detti materiali verso la riva, e li distribuiscono e sistemano lungo il litorale. Se le circostanze sono tali che in mare arrivi una quantità di materiali minore di quella che esso esporta, la spiaggia si corrode; perchè quantunque alla riva vi sia una certa zona dove i materiali si trovano sospinti verso terra, tuttavia la spiaggia scoscende perchè le viene a mancare il piede.

Nel caso contrario il mare lascia alla riva una parte dei materiali; ed essa avanzandosi fa aumentare la pendenza del fondo e con tal mezzo aiuta il mare ad esportare al largo il resto dei materiali.

Naturalmente i materiali più grossi si depositano sempre alla riva, perchè diminuendo l'energia dei flutti a misura che si va verso il largo, vi sarà un punto dove essi non saranno più mossi; e solo i più piccoli discenderanno più basso per andare a trovare il sito dove i flutti non li muovono più da posto, e là fermarsi.

In qualunque sito poi si trovino, i materiali tendono a presentarsi di punta ai flutti, perchè così ne vengono meno disturbati.

Di tal guisa si formano quelle pianure sottomarine, a pendenza sempre dolce più o meno, che si osservano davanti le coste dove sovrabbondano le materie d'interrimento, e che sono in sostanza la continuazione sott'acqua delle spiaggie.

Ben inteso tali pianure si estendono più o meno in ragione della copia dei materiali che vi arrivano e del tempo della loro formazione; ma ad un certo punto precipitano sempre, vale a dire che la loro pendenza diviene ripida più o meno, sicchè esse vengono a presentare la forma di veri *terrazzi.*

Così, come risulta dall'infrascritta tabella, mentre la pianura sottomarina a Capo Noli in Liguria precipita alla distanza di m. 95 dalla riva, ed a Carlovassi nell'isola di Samos a m. 210; davanti Falmouth sull'Atlantico invece non precipita che a chilometri 260 (2).

Pianura sottomarina	Profondità	Distanza
	a cui comincia a precipitare	
	m.	m.
Capo Noli	10	95
Carlovassi (davanti la dogana)	10	210
Porto Maurizio	110	5000
Foce del Tevere	170	15000
Litorale belga ed ollandese [1]	5	20000
Litorale francese sull'Atlantico [2] al golfo di Gascogna	200	60000
Litorale francese sull'Atlantico [2] attraverso l'isola di Yeu	200	165000
Id. inglese davanti Falmouth	200	260000

Si disse che le pianure sottomarine ad un certo punto precipitano dopo essersi tenute a pendenza dolce sovra una certa estensione, per guisa da presentare la forma di veri terrazzi.

Valga l'esempio di quanto si osserva davanti l'anzidetta isola di Yeu in Francia, dove la pianura sottomarina rappresenta come una media su quel litorale. Quivi bisogna andare alla distanza di 165 chilometri dalla riva per trovare la profondità di m. 200; mentre poi a 55 chilometri più oltre si precipita in profondità di m. 4000. Nella prima tratta la pendenza media del fondo è del 1,2 e nella seconda del 69,1 per mille.

A partire dal punto in cui la pianura sottomarina precipita, essa forma una scarpa dove la maggior pendenza del fondo supplisce non solo alla minor intensità del flutto nel tirar giù le materie; ma ne favorisce lo scarico, essendochè su quella scarpa basta un piccolo movimento dell'acqua per farle discendere.

A parità poi di pendenza del terrazzo e delle altre condizioni, le materie arrivano tanto più facilmente a scaricarsi sulla sua scarpata, e quindi se ne scaricano in maggior abbondanza, che esso è meno largo.

[1] Belpaire, *De la plaine maritime depuis Boulogne jusqu'au Danemark,* § 1.

[2] Delesse già citato.

La larghezza quindi del terrazzo influisce pure sulla rapidità del protendimento o della corrosione della spiaggia fuori acqua secondo le circostanze; salvo ben inteso quanto si dirà in appresso (14) a proposito dei flutti che non arrivano più liberamente alla riva, vale a dire che non vi arrivano più con tutta l'energia che possiedono al largo.

Esaminando la composizione della suddetta pianura sottomarina attraverso l'isola di Yeu, si hanno i risultati seguenti.

Distanza a partire dalla riva	Composizione
Fino a kilm. 30	Roccie, pietre e sabbie
Da kilm. 30 a 50	Sabbia e ghiaja
Da kilm. 50 a 105	Melma
Da kilm. 105 a 120	Sabbia melmosa
Da kilm. 120 a 175	Sabbia
Oltre kilm. 175	Melma

Il fondo quivi precipita a kilm. 165 come si disse; ma incomincia a kilm. 105 ad aumentare di pendenza per precipitare. Perciò a partire da quest'ultimo punto il fondo è di sabbia melmosa, cioè è la transizione fra la melma che s'incontra prima sul terrazzo, e la sabbia che si presenta dopo sulla scarpa, perchè la melma precipita al piede della scarpa medesima.

Intanto ciò prova che le sabbie camminano fino a quella considerevole distanza. Esse vengono a sovrapporsi per strati successivi sulla detta scarpa in modo analogo a quanto si pratica nel formare i rilevati delle strade, dove successivamente si scaricano le materie all'orlo sulle scarpate del rilevato già eseguito.

Mentre la pianura sott'acqua avanza verso il largo, la spiaggia fuori acqua può pure avanzare come si disse, ed il fondo rialzarsi per successivi strati.

Può avanzare, perchè, come si vedrà in seguito (14), non di rado la spiaggia fuori acqua assume una certa stabilità di posizione, se non di materiali i quali possono invece sostituirsi.

Avanzando la spiaggia fuori acqua, il suo profilo con quello della pianura subacquea, fino ad un certo segno si trasporta parallelamente a se stesso verso il largo.

Fino ad un certo segno soltanto, perchè la forma di tale profilo dipende dalla violenza del mare, dalla natura, grossezza e copia dei materiali, e dall'estensione della pianura sottomarina; cose tutte le quali possono cambiare col tempo.

Anzi non solo la pianura sottomarina avanzerà sicuramente, ma avanzerà sempre di più che la spiaggia fuori acqua (dato che questa avanzi); perchè il campo in cui i movimenti in discesa prevalgono, è di gran lunga più vasto, benchè d'azione meno potente, dell'altro dove prevalgono invece i movimenti in ascesa.

14. *Scanni e cordoni litorali, e controdune subacquee.*

Allorquando la spiaggia subacquea è così sottile, vale a dire così poco profonda, che i flutti non possano più arrivare liberamente sino alla riva [1]; in tal caso, giunti ad un certo punto, essi perdono più o meno d'intensità, e la perdono più o meno rapidamente.

In allora il flutto al largo ed a terra del punto dove perde rapidamente d'intensità, si comporta come due flutti distinti; ciascuno dei quali, stante la diversa loro intensità, ha la propria linea neutrale differente da quella dell'altro.

In altre parole, il flutto ha allora due linee neutrali; delle quali quella che corrisponde al flutto dalla parte di terra trovasi più elevata e vicino alla riva dell'altra che corrisponde al flutto dalla parte verso il largo.

E se il punto dove il flutto perde d'energia, si trova, come ordinariamente succede, a poca profondità; ne avviene che le materie al largo di quel punto fino alla linea neutrale più bassa, si trovano sospinte verso la riva in causa di questa linea neutrale più bassa; e quelle a terra del punto medesimo fino alla linea neutrale più alta, si trovano invece trascinate verso il largo in causa di quest'altra linea neutrale più alta.

Ciò posto, se il flutto dalla parte di terra conserva sufficiente energia, spiana le materie su cui agisce, e l'altro flutto dalla parte del largo non fa per così dire che sostenerle. In allora verso la riva, sulla suddescritta pianura sottomarina se ne forma un'altra simile ma più piccola, con una certa scarpata verso il largo. È il caso di molte spiaggie calabresi del Tirreno [2].

A questa pianura più piccola che corre lungo la riva e che presenta la forma di gradino più o meno grande a spigoli arrotondati, si darà il nome di *scanno litorale*, per distinguerlo dagli altri scanni di forma e giacitura diverse.

Se invece il flutto dalla parte di terra è debole in confronto dell'altro verso il largo; in tal caso quest'ultimo flutto incalza le materie respinte dal primo, ed al loro punto d'incontro si forma un rialzo del fondo a guisa di porca, ossia una *controduna subacquea* [3]. È ciò che si verifica nella spiaggia di Tortoli in Sardegna, di Alassio in Liguria, ed in molte altre delle Marche. Alla superficie del liquido poi, e quasi verticalmente al di sopra del ciglio della scarpata tanto dello scanno litorale come della controduna subacquea verso il largo, se il mare è abbastanza forte si manifestano dei frangenti. È il flutto che nella direzione di quelle scarpate produce un getto

[1] Le onde hanno bisogno di una sufficiente profondità d'acqua per potersi svolgere. L'osservazione mostra che esse s'infrangono quando arrivano sovra profondità all'incirca uguali alla propria altezza.

[2] Un'altra simile pianura, ma di pochi decimetri soltanto di larghezza colla relativa scarpa sul davanti, si osserva lungo la riva quando spira una leggiera brezza da lasciar scorgere come le sabbie del fondo sieno quivi mosse da quei deboli flutti; i quali sulla detta scarpata determinano dei getti di alcuni centimetri d'altezza soltanto.

[3] Per siffatti rialzi si adotta la denominazione di controduna subacquea, quantunque si formino dove spesso manca la duna a terra; e si adotta tale denominazione per distinguerli dagli altri scanni in genere, ed esprimere che i rialzi in parola corrono lungo i litorali come le dune, e davanti alle medesime quando esistono.

ed una successiva chiamata, analogamente a quanto si è già notato circa il banco di Terranova; getto il quale colpendo l'onda sotto un certo angolo, la fa poi travolgere in volùta ed infrangersi, come si è già notato (9). Quivi, ossia nel punto in cui il getto si distacca dalle suddette scarpate, i flutti diminuiscono bruscamente d'intensità.

Quando poi le circostanze sono tali che il flutto del largo accumula altri materiali sulla controduna; in allora questa va elevandosi ed estendendosi per guisa da sorgere talvolta fuori del pelo delle acque. È così che si formano i cosidetti *cordoni litorali* con lagune, stagni e paludi alle spalle, come se ne hanno tanti esempî.

In ogni caso quando per le mutate condizioni del fondo, il flutto che prima giungeva alla riva con tutta la sua energia, vi arriva invece stracco; in allora la spiaggia che prima avanzava, dopo indietreggia, almeno per qualche tempo; come si è accennato in principio per le spiaggie a levante del porto di Porto Maurizio e del vecchio porto di Pesaro. Ma indietreggia per così dire solo a fior d'acqua, perchè lascia davanti a sè un certo spazio d'acqua sempre poco profonda.

Verso il largo poi la pianura sottomarina si protende e si rialza ancora come nel caso generale.

Così si spiega l'osservazione molto giusta del Belpaire [1]: « Il est rémarquable « que presque partout où la côte est basse et sablonneuse, la lisiére extrême du pays « est formée par des marais. C'est ce que l'on remarque depuis Bayonne jusqu' à Bor- « deaux, et au bord méridional de la mer Baltique, principalement entre Dantzig et « Kœnigsberg ».

15. *Le medesime osservazioni si applicano ai laghi.*

Siccome poi le leggi della natura sono dappertutto le stesse; così ciò che si è detto pel mare, si può ripetere pei laghi, salvo le debite proporzioni negli effetti.

16. *Conclusioni.*

Riassumendo si perviene alle conclusioni seguenti:

1. Il movimento delle onde nei liquidi genera rasente il fondo un movimento alternato, ora diretto secondo il cammino stesso delle onde ed ora nel senso inverso.

Questo movimento alternato è appunto ciò che denominasi *Flutto di fondo* o semplicemento *Flutto*.

Sui corpi situati sul fondo tali flutti agiscono a colpi intermittenti.

2. In generale verticalmente sotto il dorso delle onde il movimento del flutto di fondo è diretto, e sotto il loro cavo è inverso.

3. L'intensità del flutto di fondo è tanto più grande che le onde che lo generano provengono da più lontano e da profondità più grandi.

L'energia del flutto può essere grande anche a notevoli profondità.

In ogni caso il flutto, diminuendo rapidamente d'energia col crescere della distanza a partire dal fondo, si fa sentire soltanto sovra uno strato liquido d'un certo spessore variabile secondo le circostanze.

[1] Belpaire già citato, nota E.

4. Su fondo acclive verso terra il flutto diretto od ascendente prevale sul flutto inverso o discendente; e prevale ognor più che si va avanti verso la riva.

5. La componente del peso dei corpi esposti ai flutti parallela al fondo smorza od anche soggioga la prevalenza del flutto diretto sull'inverso.

6. Il seguito dei punti dove col concorso di detta componente i due flutti si bilanciano esattamente secondo la linea di massima pendenza del fondo, costituisce sul fondo stesso una *linea neutrale.*

A parità delle altre condizioni la linea neutrale discende più basso a misura che l'agitazione cresce, e che la pendenza del fondo, la grossezza ed il peso specifico dei corpi diminuisce.

Nel Mediterraneo la linea neutrale discende raramente più basso di una diecina di metri.

7. A terra della linea neutrale i materiali del fondo vengono rigettati verso la riva; a mare invece vengono trascinati verso il largo.

8. Parallelamente al litorale i materiali camminano dappertutto verso la parte opposta a quella di dove provengono le onde.

Così essi camminano ora in un senso ed ora nell'opposto; ma in definitivo si trasportano principalmente nel senso dei flutti prevalenti, che in generale corrispondono alla traversia.

9. Col loro moto di va e vieni e coll'aiuto di detta componente, i flutti spianano i materiali che arrivano al mare, tirandoli giù.

La prevalenza del flutto diretto sull'inverso li distende lungo il litorale, tenendoli sù raccolti verso terra, ed addossandoli in parte alla riva secondo le circostanze.

Di tal guisa i flutti sistemano i materiali; e per successivi strati sovrapposti, specialmente sul davanti, si formano i terreni sedimentari in seno al mare ed ai laghi.

Ulteriori osservazioni sui giacimenti minerali di Val d'Ala in Piemonte.
II. L'idocrasio del banco d'idocrasio nel serpentino della Testa Ciarva al Piano della Mussa.

Memoria del Socio GIOVANNI STRUEVER

letta nella seduta del 6 maggio 1888.

(Con una tavola).

L'idocrasio del banco d'idocrasio.

L'idocrasio verde, proveniente dalla Mussa, è noto a tutti i mineralisti. Esso fu già argomento speciale a numerosi studî, e sovrattutto da parte dello Zepharovich, onde potrebbe sembrare quasi superfluo di tornare ora sulla descrizione di questa bella e importante varietà. Spero però, che le poche parole dette in principio della prima parte di questo lavoro, relativamente alla confusione che tuttora regna nelle pubblicazioni mineralogiche sui giacimenti di Val d'Ala, non che il contenuto delle pagine seguenti, giustificheranno la mia impresa. Il materiale che servì per la descrizione dettagliata, ammonta a 13 gruppi e 85 cristalli isolati, tutti conservati nel Museo Mineralogico della R. Università di Roma. Di questi, 8 risp.te 53, furono da me stesso riuniti, gli altri provengono dall'antica collezione del Medici-Spada, cui furono inviati dal Sismonda, dal Caselli, dal Barelli, dal Banchieri, dal Motta e dal conte Ingelsheim, donde risulta ch'essi furono raccolti almeno una quarantina d'anni addietro.

Do anzitutto le dimensioni degli 85 cristalli isolati della nostra collezione. I primi 32 cristalli sono quelli antichi della collezione Spada, gli ultimi 53 quelli da me raccolti. I numeri d'ordine segnati con asterisco, corrispondono ai cristalli terminati alle due estremità. Del resto, valgono, per il quadro che segue, le stesse osservazioni che ho premesse al quadro relativo all'idocrasio del banco di granato della stessa Testa Ciarva.

N.º	Dimensioni	N.º	Dimensioni	N.º	Dimensioni	N.º	Dimensioni
1	2 — 2.5 — 5	7	4 — 5 — 10.5	13	5.5 — 6 — 5.5	19	7 — 8 — 7
2	2 — 3.5 — 8	8	4.5 — 4.5 — 12	14	6 — 6.5 — 8	20	7 — 8 — 13
3	3 — 4 — 11	9	4.5 — 5 — 7	15	6 — 6.5 — 11.5	21	7.5 — 10 — 13.5
4	3.5 — 3.5 — 7	10*	4.5 — 6.5 — 13	16	6 — 7 — 8	22	8 — 8 — 8
5	3.5 — 3.5 — 12	11	5 — 6 — 12.5	17	6.5 — 8 — 14	23	8 — 8 — 13.5
6	3.5 — 5 — 11	12	5 — 9 — 12.5	18	6.5 — 11 — 17	24	8 — 8 — 14.5

N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni
25	8 — 8.5 — 17	41	4.5 — 5.5 — 16.5	56	6 — 7.5 — 18.5	71	8 — 9.5 — 14
26	8 — 9 — 17	42	4.5 — 7.5 — 9	57	6 — 8 — 13	72	8 — 10 — 24
27	9 — 12 — 20	43*	5 — 5.5 — 7	58	6.5 — 6.5 — 13.5	73	8 — 12 — 12
28	10 — 11.5 — 15	44*	5 — 6 — 10	59	6.5 — 6.5 — 14	74	8.5 — 8.5 — 15
29	11 — 12.5 — 15	45	5 — 6 — 10	60	6.5 — 7 — 11	75	8.5 — 9.5 — 6
30	11.5 — 11.5 — 9	46	5 — 6 — 12.5	61	6.5 — 8 — 13	76*	8.5 — 10.5 — 11
31	16 — 16.5 — 16.5	47	5 — 7 — 19	62*	6.5 — 9.5 — 5.5	77	9 — 10 — 15.5
32	20 — 24 — 23	48	5 — 7.5 — 7.5	63*	6.5 — 9.5 — 17.5	78	9 — 11 — 27
33	2.5 — 2.5 — 3.5	49	5.5 — 5.5 — 9.5	64	7 — 8 — 13	79	10 — 10 — 13
34*	4 — 4 — 7	50	5.5 — 6 — 9.5	65	7 — 9 — 9	80	10 — 10 — 19
35	4 — 4 — 11.5	51*	5.5 — 7 — 18	66	7 — 11 — 10	81	10 — 10 — 23
36	4 — 6 — 9.5	52*	5.5 — 8 — 11.5	67*	7.5 — 8 — 11	82	11 — 11 — 22
37	4 — 6 — 17.5	53	6 — 6 — 13.5	68	7.5 — 8 — 14	83	13 — 17 — 16
38	4.5 — 5 — 7.5	54	6 — 7 — 11	69	7.5 — 12 — 19	84	14.5 — 16 — 21.5
39	4.5 — 5 — 10.5	55	6 — 7 — 15	70*	8 — 8 — 14	85*	25 — 27 — 36
40	4.5 — 5 — 12						

Da questo quadro risulta che la media larghezza dei cristalli sta alla loro media lunghezza come 1:1.72 quando si prendano tutti gli 85 cristalli. Tenendo conto dei soli 32 primi cristalli antichi si trova il rapporto 1:1.62. Scegliendo invece gli ultimi 53 cristalli da me riuniti, lo stesso rapporto risulterebbe di 1:1.78, e limitandoci ai soli 12 cristalli terminati alle due estremità, di 1:1.61.

Ho profittato ancora, durante un breve soggiorno a Torino, della gentilezza del prof. Uzielli, attuale direttore delle collezioni mineralogiche della R. Scuola degli ingegneri al Valentino, per sottoporre ad analoghe misure i cristalli d'idocrasio verde ivi conservati, e ho trovato i seguenti risultati sopra 38 cristalli che sono precisamente fra quelli comunicati dal Sella e dal Gastaldi allo Zepharovich. Ecco le dimensioni di tali cristalli.

N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni
1	2 — 2 — 11	11	4 — 4 — 9.5	21	5 — 5 — 6.5	30*	6 — 9.5 — 16.5
2*	2.5 — 4.5 — 11	12*	4 — 4.5 — 4	22*	5 — 5 — 9	31	6 — 12 — 20
3	3 — 5 — 8	13	4 — 4.5 — 7.5	23	5 — 5.5 — 8	32*	6.5 — 8 — 14
4	3.5 — 3.5 — 8	14	4 — 4.5 — 7.5	24	5 — 6.5 — 15	33	7 — 8 — 8.5
5	3.5 — 4 — 5	15	4 — 4.5 — 11	25	5.5 — 5.5 — 4.5	34	7.5 — 8.5 — 11
6	3.5 — 4 — 6.5	16	4 — 4.5 — 13.5	26	5.5 — 5.5 — 7.5	35	7.5 — 10.5 — 19
7*	3.5 — 4 — 10	17	4 — 5 — 7	27	5.5 — 8 — 10.5	36	9.5 — 10.5 — 15
8	3.5 — 4 — 15	18	4.5 — 4.5 — 5	28	6 — 6 — 5	37	14 — 21 — 41
9*	3.5 — 4.5 — 6.5	19*	4.5 — 5 — 10	29	6 — 6 — 15	38	17 — 19 — 24
10	3.5 — 5 — 8	20	4.5 — 7 — 9				

Questi 38 cristalli darebbero il rapporto 1:1.87, e se ci limitiamo ai soli 8 cristalli terminati alle due estremità e segnati nel quadro con asterisco, 1:2.01. Combinando poscia tutti i 123 cristalli misurati, il rapporto sarebbe come 1:1.76, e tenendo conto dei soli 20 individui terminati alle due estremità, come 1:1.72. Quindi, comunque si riuniscano a gruppi, i cristalli dell'idocrasio verde mostrano, in media, una lunghezza relativa assai minore di quella dei cristalli del banco di granato, per i quali avevamo trovato il rapporto tra la media grossezza e la media lunghezza come 1:5.89, cioè una lunghezza relativa più che tripla.

Segue poscia dalle cifre suindicate che questo rapporto tra media grossezza e media lunghezza non varia notevolmente e quindi sembra caratteristico dell'intero giacimento, poichè prossimamente rimane lo stesso per i cristalli raccolti in varî tempi e quindi in varie parti del banco.

Veniamo ora ai cosidetti tipi. Dei tre tipi stabiliti dal Zepharovich per i cristalli verdi della Mussa, qui, nel banco d'idocrasio, non si troverebbero che due soli, poichè mancano affatto cristalli privi di base. Ma, astrazione fatta dal passaggio insensibile da un tipo all'altro, la nessuna importanza di una tale distinzione per il nostro giacimento è dimostrata all'evidenza dai critalli terminati alle due estremità. Di fatti, fra i 12 cristalli suindicati della nostra collezione, non vi ha nemmeno uno che alle due estremità si comporti egualmente, e la maggior parte di essi mostra da un lato la base larghissima, colle faccie piramidali strettissime, e dall'altro invece predominanti assolutamente le faccie di }111{ e la base ridotta a faccia piccolissima, talchè apparterrebbero contemporaneamente a due tipi diversi. Mi pare quindi evidente che simili differenze geometriche non possono considerarsi che come provocate da circostanze variabili anche a brevissima distanza, e che esse sono affatto prive d'importanza per la storia generale del nostro giacimento, non dipendendo menomamente dalle condizioni paragenetiche comuni all'intero deposito.

Per quanto riguarda lo sviluppo generale dei cristalli, aggiungerò ancora al sopra detto, che, d'ordinario, per il prossimamente uniforme e quasi sempre predominante sviluppo delle faccie del prisma a sezione quadrata di primo ordine, le sezioni trasversali si avvicinano a quadrati in cui i quattro angoli sono troncati simmetricamente dalle faccie in generale assai più strette del prisma a sezione quadrata di secondo ordine. È bensì vero che, in un numero anche cospicuo di individui, questa regolarità è minore, ora per maggiore sviluppo di due faccie parallele di }110{, ora per allargamento di qualcuna delle faccie di }100{, ora per combinazione oscillatoria di faccie prismatiche, talchè nascono sezioni rettangolari o triangolari od anche sezioni a qualche lato apparentemente curvo; ma è certo che le sezioni trasversali dei cristalli del banco d'idocrasio non arrivano mai a quello straordinario grado di irregolarità che ho indicato, nella prima parte di questo lavoro, per i cristalli del banco di granato. Ciò è evidentemente in stretto rapporto colla natura generalmente assai meno polisintetica dei primi cristalli di fronte a questi ultimi. Si vede, è vero, in molti casi, come nemmeno questi cristalli del banco d'idocrasio sono da considerarsi sempre come individui semplici, e Zepharovich ha di già richiamato l'attenzione sopra questo fenomeno, aggiungendo che poteva forse spiegare le anomalie ottiche in essi cristalli osservate,

ma ciò non ostante sta il fatto che, sotto questo aspetto, i cristalli del banco di granato si lasciano di molto indietro quelli del banco d'idocrasio. Non di rado la regolarità dei cristalli è ancora diminuita per il disuguale sviluppo delle faccie della piramide }111{. Così, ad esempio, si trovano dei cristalli che, per maggiore estensione di due faccie piramidali diagonalmente poste l'una rispetto all'altra, lo che è generalmente accompagnato da maggiore sviluppo delle due faccie di }110{ che si trovano in zona con esse, assumono abito apparentemente trimetrico; altri cristalli, per preponderanza di due faccie contigue della piramide, od anche per maggiore sviluppo di una sola delle faccie della piramide, essendo contemporaneamente più estese le due faccie di }110{ normali ad essa, presentano abito apparentemente monoclino; in altri casi ancora le quattro faccie della piramide sono tutte disuguali fra loro. Di rado soltanto qualche altra forma, più estesa del solito, contribuisce all'abito particolare dei cristalli: sono sovrattutto le forme }312{ }311{ }331{ }101{ che sotto questo aspetto meriterebbero qualche parola, ma parmi di poter a tal riguardo rimandare il lettore ai bei disegni dello Zepharovich (tav. III-V).

Menzionerò però, anche in questo luogo, benchè vi debba poscia tornare sopra, due fenomeni che riguardano tanto l'abito dei cristalli d'idocrasio in sè, quanto la storia dell'intero giacimento. Il primo consiste nella ripetuta frantumazione che l'idocrasio ha subito. Il fenomeno si mostra sovrattutto nella massa dell'idocrasio compatto che costituisce essenzialmente il banco, e si osserva assai meglio sul posto che sovra i campioni conservati nelle collezioni. Numerose fessure l'attraversano in tutti i sensi, accompagnate non di rado da piccoli spostamenti di una parete della screpolatura rispetto all'altra. Sovente le fessure furono più tardi di nuovo riempite da altro idocrasio in modo da saldare solidamente assieme le due pareti; in altri casi le screpolature sono rimaste aperte, e sovra le pareti si sono depositati piccoli e sottili cristalli di idocrasio cristallograficamente orientati coll'idocrasio delle diverse parti della parete, ricordando così, colla differenza che nel nostro caso la massa cristallina sottostante e i cristallini impiantati sono della medesima natura, la sovrapposizione regolare di cristalli di albite anche sovra le fratture irregolari dell'ortoclasio nel granito di Baveno e di tanti altri luoghi. Ora, questa medesima frantumazione, che è, del resto, comune al banco d'idocrasio e al banco di granato, si osserva sovente anche nei cristalli delle geodi. Talora questi si trovano già staccati nelle geodi, e assai comune è il caso in cui i cristalli sono, in senso più o meno obbliquo all'asse, più volte screpolati e poscia risanati, direi quasi, ricementati da altro idocrasio od anche da una sostanza terrosa, bianco-grigiastra o giallastra. Ordinariamente le screpolature e i susseguenti risanamenti hanno interessato le sole faccie prismatiche, ma qualche volta ancora i cristalli sono rotti all'estremità, e le lesioni sono anche qui in parte risanate per sovrapposizione di altro idocrasio di orientazione perfettamente, o quasi, parallela al cristallo leso sottostante. Tali fenomeni si osservano a preferenza, a quanto pare, nei cristalli più voluminosi che hanno forse messo più tempo a formarsi, ma non mancano in modo assoluto nei cristalli piccoli.

È poscia un carattere molto comune dei nostri cristalli, ch'essi da un lato, cioè, in generale, o sovra due faccie contigue del prisma }110{ e le due faccie adiacenti

della piramide }111{ od anche sovra una sola faccia del prisma e quella adiacente della piramide, portano irregolarmente sovrapposti piccoli cristalli di idocrasio, che non di rado penetrano più o meno profondamente nel cristallo sottostante ([1]). Parmi fuor di dubbio che ciò accenni anzitutto all'ultimo stadio della cristallizzazione dell'idocrasio. Di fatti, se lasciamo evaporare lentamente, all'aria libera, la soluzione di una sostanza vediamo formarsi prima relativamente pochi cristalli che continuano a crescere finchè restano interamente coperti dalla soluzione non ancora troppo satura; ma, continuando sino a completa evaporazione del liquido, in ultimo la cristallizzazione si fa rapida, direi quasi, tumultuaria, e numerosi piccoli cristallini si sovrappongono, senza alcuna regolarità, ai cristalli grossi formati in precedenza. Dall'altra parte poi, il fatto che tali cristallini, nel nostro caso, sono limitati ad un lato del grosso cristallo sottostante, accennerebbe forse a correnti avvenute quando la soluzione era diventata scarsa. E che il fenomeno non si limitasse proprio all'ultimo momento della cristallizzazione, sarebbe, a parer mio, dimostrato da ciò che i cristallini, come di già sopra fu detto, non di rado penetrano più o meno profondamente nel cristallo predominante. Sembrerebbe quindi che la formazione dei cristalli ora sia proceduta lentamente e regolarmente, ora, e sovrattutto verso la fine, con maggiore rapidità e perciò con maggiore irregolarità, in relazione forse ai movimenti subiti dal giacimento e dimostrati all'evidenza dalle screpolature e frantumazioni sopra menzionate.

Non farebbe ostacolo a ciò il fatto, che vi sono delle geodi in cui non si vede nulla di tutto ciò, nè frantumazione nè sovrapposizione di cristallini, poichè sarebbero precisamente quelle non interessate dalle screpolature e rimaste intatte e chiuse dopo essersi formate.

Queste inclusioni così frequenti di piccoli cristallini in ogni possibile posizione spiegherebbero poi assai bene i fenomeni ottici anomali osservati da Haidinger, Descloizeaux ed altri nell'idocrasio verde della Mussa.

Rivolgiamo ora la nostra attenzione alle forme semplici e alle loro combinazioni.

Dopo l'estesa opera di Zepharovich, fondata sopra ricchissimo materiale, sarebbe stato poco indicato il voler andare in cerca di forme nuove, benchè il grande numero di cristalli che ebbi in mano, rendesse *a priori* probabile di poter aggiungere alla già lunga serie delle forme date dal suddetto autore qualche altra nuova. Noto ancora che anche parecchie delle forme osservate dallo Zepharovich sono così rare che hanno una importanza assai limitata, massime per le ricerche sulla frequenza relativa delle forme.

Le forme semplici date da Zepharovich per i cristalli verdi della Mussa, e qui possiamo senz'altro dire per i cristalli del banco d'idocrasio, sono in numero di 18, cioè:

}001{ }1.1.20{ }1.1.10{ }119{ }118{ }116{ }115{ }114{ }113{ }112{ }335{ }111{ }221{ }331{
}102{ }101{ }211{ }833{ }311{ }411{ }711{ }312{ }629{ }319{ }110{ }530{ }210{ }100{.

([1]) Questo fenomeno si osserva altresì, ma forse meno sovente e meno spiccato, sui cristalli d'idocrasio del banco di granato.

Di queste forme sono per noi in prima linea importanti le seguenti:

}001{ }110{ }100{ }111{ }331{ }221{ }101{ }211{ }311{ }312{.

Le piramidi di primo ordine e di simbolo generale }11m{ ove $m > 1$, non mi sembrano, prese isolatamente, determinate con assoluta certezza. Ciò non risulta soltanto dalle parole stesse del testo, ma forse più ancora dal quadro degli angoli misurati nel quale accanto ai valori dati si trova quasi costantemente la nota che essi sono soltanto approssimativi. Anche dalle mie osservazioni segue lo stesso, colla sola eccezione forse di }112{, ma ancora questa forma, come tutte le altre analoghe è così rara, tanto nei cristalli studiati dal Zepharovich, quanto nei miei, che, presa isolatamente, non ha alcuna importanza per la ricerca della relativa frequenza delle forme semplici. Invece, come gruppo di forme, le piramidi di primo ordine, più appiattite di }111{, hanno un certo interesse, benchè vedremo che nella maggior parte dei cristalli esse mancano affatto.

La forma }102{ non sembra assolutamente certa, benchè ancora io avessi trovato, una sola volta, una faccia in zona tra (001) e (101) che almeno si avvicina molto ad una faccia di }102{. Indicherò nel quadro questa forma con }10m{, $m > 1$.

Nel quadro dato da Zepharovich troviamo anche qui accanto all'angolo misurato con (001) la nota « approssimativo ».

Non diversamente la cosa procede per le due forme }629{ e }319{ che si trovano in zona tra la base e }312{. Ciascuna di esse è data da Zepharovich come osservata una sola volta, e il valore dell'angolo con (001) è indicato come approssimativo. Anch'io ho osservato in due individui una faccia tra la base e }312{, una volta ruvida e piuttosto larga, l'altra volta lucente ma strettissima, talchè le misure istituite non meritano fiducia. Indicherò nel quadro l'esistenza di tali forme col simbolo generale }31m{, $m > 2$.

Di piramidi diottagone del simbolo generale }m11} ove $m > 1$, Zepharovich indica cinque. Di queste sono indubbiamente sicure, e anche frequentissime, le sole }311{ e }211{. Si potrebbe ancora aggiungere }411{ una sola volta determinata con certezza dal Zepharovich, ma preferisco di comprenderla colle }833{ e }711{, per le quali non vi sono che misure approssimate, nel simbolo generale }m11{.

Riguardo poi ai prismi ottagoni, non ne tengo alcun conto nel quadro, e a questo modo di procedere m'inducono le seguenti considerazioni. È ovvio che la combinazione oscillatoria di }110{ e }100{ che si osserva quasi sempre assai pronunciata nei nostri cristalli, può condurre alla formazione di faccie pseudocristalline che poi in qualche singolo caso si avvicinino molto alla posizione di una forma prismatica a simbolo semplice. Mi pare che questo fenomeno, tanto frequente e tanto noto ai cristallografi, ci debba rendere assai cauti nell'ammettere certi simboli come sicuri. Per quanto si riferisce alla forma }530{ citerò per maggiore chiarezza le stesse indicazioni dello Zepharovich a pag. 54-55.

« 3. Fig. 16. Tre faccie della }110{ sono assai densamente e profondamente rigate nel senso verticale; al posto della quarta compajono due faccie ugualmente striate,

inclinate fra di loro sotto un angolo molto ottuso. Undici misure col goniometro ad applicazione diedero in media:

$$(110):(530) = 76^\circ\,28' \text{ (suppl.)}$$

donde segue:

$$(100):(530) = 31^\circ\,28'.$$

La differenza di 30′ dal valore calcolato di (100):(530) = 30°58′, ove la scelta del simbolo }530{ è raccomandata per semplicità, non è sorprendente, vista l'incertezza della misura.

Assai simile era un cristallo inviato dal prof. Kenngott.

4. Fig. 17. (100):(530) = 30° 30′ da quattro misure. Come media di questa e della precedente determinazione segue:

$$(100):(530) = 31^\circ\,{}^3/_4 \text{ « da quindici misure ».}$$

Nel quadro degli angoli, a pag. 63, troviamo poi l'aggiunta $:n = 15$, sa, ossia molto approssimativo. Sarebbe da notare anzitutto che era meglio scrivere $n = 2$, poichè l'angolo non fu misurato che sovra due soli spigoli, ma astrazione fatta da ciò, mi sembra evidente, dalle parole dello stesso Zepharovich, che per ora quel simbolo }530{ non ha pieno diritto al riconoscimento, tanto più che non vi esiste nemmeno un semplice legame di zone colle altre forme dei nostri cristalli.

Riguardo poscia alla forma }210{, la sua esistenza sui nostri cristalli è messa fuori di dubbio dal trovarsi essa in zona con }001{ e }211{ e dalle misure fatte, benchè siano pochine; ma la prima prova è resa impossibile nella maggior parte dei casi dalle strie di }211{ obblique alla zona [$\bar{1}$20], e la seconda dalla striatura delle faccie prismatiche o dalla strettezza generale di quelle che si potrebbero prendere per faccie della }210{. Ciò risulta anche dal quadro degli angoli dato da Zepharovich, il quale non vi ammise che due volte l'angolo (210):(100) e una sola volta l'angolo (210):(110). Mi sembrò quindi miglior partito di escludere anche }210{ dal numero delle forme da considerarsi nelle ricerche sulla relativa frequenza delle forme semplici, risultandomi dalle mie osservazioni essere perfino impossibile nella maggior parte dei casi, di decidere con qualche sicurezza, se quel prisma esiste o no, e perciò se sia frequente o raro.

Del resto, questa mancanza di prismi ottagoni od almeno questa spiccata incertezza sulla loro esistenza e sulla razionalità dei loro eventuali simboli, costituisce uno dei principali fenomeni per cui i cristalli d'idocrasio del banco d'idocrasio, come quelli del banco di granato, della Testa Ciarva, differiscono da quelli dei giacimenti nelle regioni vulcaniche, come Monte Somma, Monti Albani, Lago di Bracciano, Pitigliano, talchè equivarrebbe quasi ad occultare un sì spiccato carattere, se si ammettessero quei simboli come indubbiamente determinati sui cristalli della Mussa.

Dopo questi schiarimenti necessarî, ecco il quadro delle combinazioni in cui i cristalli raccolti da me, e perciò più recentemente, sono separati da quelli più antichi della collezione Spada, e ciò per vedere se vi siano notevoli divergenze secondo le diverse parti del banco. La prima colonna contiene i simboli delle forme combinate

fra loro, la seconda il numero di queste forme, la terza indica il numero di volte in cui ciascuna combinazione fu osservata.

A. *Cristalli nuovi.*

}110{	}100{	}001{	}111{									4	1	
"	"	"	"	}311{	}312{							6	1	
"	"	"	"	"	"	}331{						7	3	4
"	"	"	"	"	}211{	"						7	1	
"	"	"	"	"	"	"	}312{					8	16	17
"	"	"	"	"	}331{	}101{	}11 *m*{					8	1	
"	"	"	"	"	}211{	}312{	}331{	}*m* 11{				9	3	12
"	"	"	"	"	"	"	"	}221{				9	7	
"	"	"	"	"	"	"	"	}31 *m*{				9	1	
"	"	"	"	"	"	"	"	}11 *m*{				9	1	
"	"	"	"	"	"	"	"	}221{	}101{			10	2	8
"	"	"	"	"	"	"	"	"	}11 *m*{			10	2	
"	"	"	"	"	"	"	"	}11 *m*{	}101{			10	2	
"	"	"	"	"	"	"	"	"	}*m* 11{			10	1	
"	"	"	"	"	}331{	}221{	}101{	}10 *m*{	}11 *m*{			10	1	
"	"	"	"	"	}211{	}312{	}331{	}221{	}11 *m*{	}101{		11	8	
"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	}*m* 11{	12	1	2
"	"	"	"	"	"	"	"	}31 *m*{	"	"	"	12	1	

Disponendo le combinazioni ad ugual numero di forme semplici nell'ordine della loro relativa frequenza, abbiamo quindi fra questi 53 cristalli:

17	a	8	forme	semplici
12	"	9	"	"
8	"	10	"	"
8	"	11	"	"
4	"	7	"	"
2	"	12	"	"
1	"	6	"	"
1	"	4	"	"

cioè, la maggior parte degli individui mostra un numero medio di forme semplici; vengono poscia le combinazioni più ricche, mentre sono assai rare le combinazioni a poche forme semplici.

Considerando le diverse combinazioni una ad una, risulta che la combinazione delle otto forme semplici }110{ }100{ }001{ }111{ }331{ }211{ }311{ }312{ è la più frequente, trovandosi in 16 individui, cioè in quasi un terzo dei cristalli; viene poscia per frequenza una combinazione di undici forme, nella quale cioè alle otto forme sopra

indicate si aggiungono }221{ }101{ }11 *m*{, e un'altra a nove forme, nella quale alle stesse otto forme si aggiunge la }221{. Separando le forme del gruppo }11 *m*{, l'ultima combinazione diventerebbe naturalmente più frequente della seconda. Le altre combinazioni sono relativamente assai rare.

Passando ora alla relativa frequenza delle singole forme semplici, abbiamo:

}110{ in 53 ind.	}311{ in 52 ind.	}221{ in 21 ind.	}*m* 11{ in 6 ind.
}100{ " 53 "	}331{ " 51 "	}11 *m*{ " 18 "	}31 *m*{ " 2 "
}001{ " 53 "	}312{ " 49 "	}101{ " 16 "	}10 *m*{ " 1 "
}111{ " 53 "	}211{ " 46 "		

Talchè risultano, si può dire, quattro gruppi di forme semplici: le quattro forme del primo gruppo sono presenti in tutti i cristalli; le quattro forme del secondo gruppo s'incontrano in quasi tutti i cristalli, la meno frequente di esse ancora in 46 sopra 53, cioè nell'87 per cento; viene poscia un terzo gruppo, che comprende due forme semplici osservate in circa un terzo dei cristalli e l'assieme delle piramidi }11 *m*{ di cui l'una o l'altra, od anche più insieme, si trovano ancora in un terzo circa degli individui; finalmente abbiamo la serie dei gruppi di forme rare, la cui frequenza relativa diminuirebbe ancora prendendole isolatamente.

Le prime otto forme sono quindi nel nostro giacimento le vere caratteristiche.

Riguardo alle altre aggiungo che la }221{ si trova sempre in compagnia della }331{, e che la }101{ e le forme del gruppo }11 *m*{ s'incontrano unite in 14 cristalli, sopra 20 in cui compare almeno una delle due, locchè si potrebbe interpretare come indizio di dipendenza reciproca.

B. *Cristalli antichi.*

}110{ }100{ }001{ }111{ }101{	5	1	
" " " " }331{ }311{	6	1	
" " " " " }101{ }11 *m*{	7	3	6
" " " " " }311{ }11 *m*{	7	1	
" " " " }211{ }101{ }312{	7	1	
" " " " }311{ }101{ }312{	7	1	
" " " " }331{ }311{ }101{ }11 *m*{	8	5	8
" " " " " " " }312{	8	1	
" " " " " " }211{ }312{	8	2	
" " " " " " }101{ }11 *m*{ }312{	9	4	7
" " " " " " }211{ }11 *m*{ }312{	9	1	
" " " " " " " }101{ }312{	9	1	
" " " " }311{ }211{ }101{ }11 *m*{ }312{	9	1	
" " " " " " " " " }331{	10	5	6
" " " " " " }331{ }221{ }312{ }*m* 11{	10	1	
" " " " " " " " " " }11 *m*{	11	1	
" " " " " " " " " }101{ }11 *m*{ }112{	12	1	

Fra questi 31 cristalli abbiamo quindi:

8	a	8	forme	semplici
7	»	9	»	»
6	»	10	»	»
6	»	7	»	»
1	»	5	»	»
1	»	6	»	»
1	»	11	»	»
1	»	12	»	»

Quindi in generale lo stesso risultato come per i primi 53 cristalli; di fatti, anche qui predominano di molto le combinazioni ad un numero medio di forme semplici.

Considerando le diverse combinazioni una ad una, troviamo invece sensibili differenze fra questi ultimi 31 cristalli e i primi 53. Difatti, le combinazioni predominanti sono:

}110{	}100{	}001{	}111{	}331{	}311{	}101{	}11 m{	—	—	, 5 volte	osservata,
»	»	»	»	»	»	»	»	}312{	}211{	, 5 »	»
»	»	»	»	»	»	»	»	»	—	, 4 »	»
»	»	»	»	»	—	»	»	—	—	, 3 »	»

cioè tutte combinazioni in cui esistono }101{ e }11 m{, le quali fra i primi 53 cristalli erano meno frequenti. Ciò accenna forse, provenendo evidentemente le due serie di cristalli da diverse parti del giacimento, a leggeri cambiamenti nel carattere delle combinazioni.

Riguardo alla relativa frequenza delle singole forme semplici, abbiamo:

}110{	in	31	ind.,	}331{	in	27	ind.,	}312{	in	20	ind.,
}100{	»	31	» ,	}311{	»	26	» ,	}211{	»	14	» ,
}001{	»	31	» ,	}101{	»	24	» ,	}221{	»	3	» ,
}111{	»	31	» ,	}11 m{	»	23	» ,	}m 11{	»	2	» ,

Confrontando l'ordine della frequenza delle singole forme in questi 31 cristalli con quello trovato per i primi 53, troviamo notevoli differenze. Mentre le prime quattro forme si trovano, in ambedue i gruppi, in tutti i cristalli, e }311{ e }331{ in quasi tutti, la cosa cambia assai per le forme }101{ }11 m{ }312{ }211{ }221{. Le forme }101{ e }11 m{ che, nella prima serie, si trovavano in circa un terzo degli individui, nella seconda compaiono in quattro quinti degli individui; le forme }312{ e }211{, nella prima serie osservate 49, rispettivamente 46 volte su 53, qui non furono trovate che 20, rispettivamente 14 volte su 31; e la forma }221{ trovata in due quinti dei primi cristalli, negli ultimi non fu riscontrata che in un solo decimo. Non vale la pena di occuparsi delle altre forme tutte rarissime.

Notiamo ancora che qui fra 28 cristalli, in cui si osserva o l'una o l'altra delle forme }101{ }11 m{ vi sono 19 in cui esistono assieme.

Riunendo finalmente le due serie di cristalli, troviamo che fu osservata negli 84 cristalli che si poterono studiare al goniometro:

{110}	in 84,	{311}	in 78,	{11 m}	in 41,	{31 m}	in 2
{100}	„ 84,	{331}	„ 78,	{101}	„ 40,	{10 m}	„ 1
{001}	„ 84,	{312}	„ 69,	{221}	„ 24,		
{111}	„ 84,	{211}	„ 60,	{m 11}	„ 8,		

L'aspetto fisico delle singole forme fu di già estesamente descritto da Zepharovich, il quale dedicò ben cinque pagine di stampa all'argomento, talchè potrebbe sembrare del tutto superfluo il tornare ora sulla questione. Se non che, non essendovi in tutti i dettagli accordo completo tra le nostre osservazioni, stimo opportuno di comunicare senz'altro i miei risultati, tanto più che essi si riferiscono unicamente a cristalli con certezza provenienti dal banco d'idocrasio.

La base {001}, sempre lucentissima, fu trovata, d'accordo con Zepharovich, solo in qualche rarissimo caso affatto liscia. Anche laddove a prima vista non si scorge alcuna ineguaglianza, con qualche attenzione, e massime con un ingrandimento nemmeno tanto forte, si rileva come alla base si sostituiscano una o più piramidi di primo ordine, assai schiacciate, le cui faccie sono finamente striate nel senso degli spigoli con {110}; qualche volta tali piramidi sono troncate simmetricamente al vertice, e più o meno largamente (fig. 4). Talora queste faccie vicinali alla base permettono esatte misure e trovai in alcuni cristalli l'angolo tra due faccie diagonalmente poste, come p. e. $(11\,m):(\bar{1}\bar{1}\,m)$, compreso tra 7′ e 10′. Quando il vertice della piramide coincide con un angolo della base (fig. 1), non si vedono che due sue faccie e conseguentemente due sistemi di strie; quando invece il vertice della piramide cade in un punto di uno spigolo della base colla piramide {111}, se ne trovano tre faccie e quindi tre sistemi di strie (fig. 2); negli altri casi si vedono sempre le quattro faccie coi quattro sistemi di strie, due a due paralleli (fig. 3). Solo una volta mi fu dato di vedere un solo sistema di strie sopra la base ridotta a rettangolo a due lati diversissimi e allora nel senso normale ai lati più lunghi (fig. 11). Questo ultimo caso fu già osservato sull'idocrasio della Mussa dal Kenngott, ma pure una sola volta. Talora la base larga dei cristalli più grossi, mostra parecchie di queste piramidi schiacciate, senza alcun ordine apparente distribuite (fig. 5).

Altre volte, in una dozzina di cristalli, si vedono sulla base piramidi ottagone assai schiacciate, ora in piccolo numero, ora numerosissime. I contorni ottagonali sono ad angoli alternativamente uguali e volgono i quattro angoli più ottusi verso gli spigoli della base colla piramide {111}, e quindi corrispondono ad una piramide diottagona che ha i suoi spigoli terminali più ottusi orientati come le faccie di {111}, e forse ad una piramide ottagona della zona [001, 211]. Ciò è abbastanza singolare, inquantochè si sarebbe piuttosto ritenuta probabile una relazione degli ottagoni colle piramidi diottagone {312} e {311} che sono più frequenti, e nella cui zona furono osservate, tanto da Zepharovich quanto da me, tra {001} e {312} piramidi diottagone schiacciate nel senso dell'asse di simmetria. Queste piramidi ottagone che compaiono sulla base, hanno le loro faccie finissimamente striate nel senso degli spigoli colla base, e non di rado sono più o meno troncate al vertice da faccia parallela alla base.

Esse si presentano ora isolate e sparse, ora a gruppi, ora allineate. Quando i loro contorni sono meno netti, passano a essere quasi circolari od anche più irregolari. Zepharovich non parla di questi disegni ottagonali, di modo che sembra siano più rari ancora di quello che risulterebbe dalle mie osservazioni (fig. 15 e 16).

Il fenomeno più frequente che ci presenta la base, è la sovrapposizione di laminette quadratiche o rettangolari, formate dalla base larghissima e da quattro faccette strettissime, densamente striate, secondo gli spigoli colla base, e orientate come quelle di una piramide tetragonale di primo ordine assai schiacciata (fig. 6-13, 15, 28). Tali tavole sono ora appena visibili coll'aiuto della lente semplice, ora discernibili ad occhio nudo, sino ad avere qualche millimetro di lato. E non di rado a queste ultime tavole più larghe si sovrappongono ancora altre più piccole della stessa specie. Sovente queste tavolette sono anche sovrapposte a quelle larghe piramidi ottagonali sopra descritte (fig. 10 e 13). Tutti questi casi furono già descritti dal Zepharovich.

In alcuni casi rari, le tavolette quadratiche più larghe portano una depressione, a contorno quasi circolare, che si direbbe una impronta lasciata da una goccia, come ciò si osserva assai più frequentemente in quegli stupendi cristalli di solfo, tutto intorno terminati, e ancora qua e là coperti di bitume, provenienti dalle solfare della Romagna (fig. 8).

In fondo, vi ha un intimo nesso tra queste tavolette e quelle piramidi schiacciate, ma la notevole differenza nelle dimensioni, la quasi assoluta costanza dello spiccato predominio della base nelle tavolette, a differenza di ciò che si osserva nei cristalli a piramidi larghe sulla base, la stessa sovrapposizione delle tavolette, non solo alle larghe piramidi tetragonali schiacciate (fig. 10 e 13), ma anche alla base che presenta disegni ottagonali (fig. 15), m'hanno indotto a tenere, nella descrizione, i due fenomeni separati, non ostante la grande loro analogia geometrica. Sembra, a prima vista, che le faccette laterali delle tavole tetragonali, siano, sopra la medesima base, tutte ugualmente inclinate, ma un più attento esame dimostra che ciò non è esattamente verificato. Feci molti tentativi di misurare l'angolo di queste faccette colla base, ma in tutti i casi esse riflettevano tutta una serie di immagini, comprese generalmente tra i limiti 2°-4° colla base. Ciò dimostra, unitamente colla striatura, che abbiamo da fare con faccette apparenti di variabile posizione, prodotte evidentemente dalla sovrapposizione di sottilissime laminette che man mano che s'innalzano, si restringono, ma in misura alquanto variabile di cristallo in cristallo, come anche di tavoletta in tavoletta. I riflessi si complicano e si moltiplicano naturalmente ancora per causa della striatura.

Un bellissimo cristallo (15992/245) mostra finalmente sulla base poco sviluppata un disegno affatto diverso dagli altri. Come si vede dalla fig. 14, predominano in esso le direzioni parallele agli spigoli della base col prisma di secondo ordine, mentre sono relativamente rare le strie parallele agli spigoli della base col prisma di primo ordine. Il caso è tanto più notevole che non vi ha traccia di faccie tra }001{ e }100{, e le faccie di quest'ultima forma sono, come di solito, pochissimo sviluppate.

Non meno notevoli sono le particolarità che presentano le faccie della piramide }111{. Forse mai si trovano assolutamente liscie, ma quasi sempre vi sono sovrapposte delle lamelle a figure variabilissime. Nella maggior parte dei casi in cui le

lamelle sono nettamente contornate, esse presentano la figura di un pentagono, il cui lato superiore è parallelo allo spigolo della faccia colla base, i due lati laterali sono paralleli all'intersezione colle due faccie adiacenti di $\{312\}$, e i due lati inferiori paralleli agli spigoli colle due faccie adiacenti di $\{100\}$. I due angoli superiori del pentagono sono quindi retti, quello inferiore è di circa 77°, e i due laterali di circa 141° $^1/_2$ [1].

Ma ora avviene che dei quattro sistemi di strie che dànno origine a tali pentagoni, e che, sulla faccia (111) p. e., sono nei sensi $[1\bar{1}0]$, $[11\bar{2}]$, $[01\bar{1}]$ e $[\bar{1}01]$, sovente manca l'uno o l'altro, o non ve ne ha che due soli od anche uno solo, e allora vediamo sopra (111) o pentagoni in cui il lato superiore è parallelo a $[1\bar{1}0]$, e degli altri quattro, due paralleli a $[01\bar{1}]$ e due paralleli a $[\bar{1}01]$, ovvero triangoli i cui lati sono paralleli alle stesse tre direzioni, ovvero rettangoli e quadrati a lati diretti nei sensi $[1\bar{1}0]$ e $[11\bar{2}]$, ovvero due soli sistemi di strie parallele a $[01\bar{1}]$ e $[\bar{1}01]$, ovvero semplici strie parallele allo spigolo colla base, ovvero finalmente strie soltanto normali a questo spigolo (fig. 17-25).

Assai sovente le lamelle pentagonali, a due angoli retti, si sovrappongono le une alle altre restringendosi, man mano che s'innalzano, a salti od anche continuamente, in modo che risultano piramidi a cinque faccie di cui quella superiore è nella posizione d'una faccia di una piramide $\{11\,m\}$ ove $m > 1$; le due faccie laterali sono orientate come due faccie di una piramide diottagona di simbolo $\{mnp\}$ ove $m + n = 2p$; e le due faccie inferiori trovansi nella posizione di faccie appartenenti ad una piramide diottagona $\{mpp\}$. Generalmente, benchè non sempre, questa piramide pentagona è troncata al vertice da una faccia larga parallela a quella di $\{111\}$ sulla quale la piramide si trova collocata. Le cinque faccie sono più o meno finamente striate e talora a superficie cilindrica cava; esse permettono di determinare solo approssimativamente la loro posizione nella rispettiva zona di cui fanno parte, posizione che del resto,

(1) Zepharovich dice (a pag. 51): « Den Ausgangspunkt gibt die einzelne pentagonale Lamelle mit drei Winkeln von 90° und zweien von 135°, die, in idealer Regelmässigkeit gedacht, entweder eine in ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck zerlegbare Figur bildet (s. fig. 24), oder auch in einigen Fällen ein Quadrat darstellt, in welchem ein Winkel durch eine einzelne Seite ersetzt ist (s. fig. 15). Immer sind nun die Pentagone so auf den Flächen von $\{111\}$ anzutreffen, dass ihre einzelne Seite mit der Kante [001 : 111] parallel liegt, und bei jenen der ersten Art, die beiden gegenüberliegenden Seiten, den Kanten von (111) mit (132) und (312), das Seitenpaar aber den Kanten von (111) mit (010) und (100) gleichlaufend sind; während bei den Pentagonen der zweiten Art die beiden Seitenpaare den Kanten von (111) mit den vier Flächen von (100) parallel liegen ». Ciò non è esatto. Forse l'autore, redigendo la descrizione dell'aspetto fisico delle faccie di $\{111\}$, si è servito dei suoi disegni proiettati sulla base, nel qual caso gli angoli compaiono quali egli li indica, ma è ovvio vedere, che questi angoli proiettati non presentano nulla di caratteristico per l'idocrasio, poichè, *caeteris paribus*, sarebbero gli stessi per tutte le sostanze dimetriche. Del resto, i pentagoni di prima specie, dell'autore, non si possono scomporre, nè proiettati sulla base, nè considerati sulle faccie stesse di $\{111\}$, in un quadrato e un triangolo equilatero, bensì in un quadrato o rettangolo che sia, e in un triangolo isoscele; e i pentagoni di seconda specie sono in realtà rombi ad angoli di 77° e 103° circa, in cui l'angolo acuto superiore è sostituito da un lato parallelo allo spigolo colla base. Di più, nei pentagoni di prima specie, non già i due lati laterali sono paralleli agli spigoli di (111) con (010) e (100) e i due lati, opposti a quello superiore, paralleli agli spigoli di (111) con (132) e (312), ma è precisamente l'opposto.

è variabilissima entro limiti piuttosto larghi, facendo il più sovente angoli da 2° a 6° colla faccia stessa di }111{. La stessa sovrapposizione, con modalità analoghe, si ripete per le lamelle a numero ridotto di lati.

Avviene poscia, e non raramente, che nel medesimo cristallo, e su faccie diverse non solo, ma anche sopra una stessa faccia, si osservano parecchi di quei varî disegni, contornati da linee parallele alle quattro zone summenzionate. Sarebbe troppo lungo entrare qui in maggiori dettagli; due dei casi forse più curiosi furono, del resto, raffigurati ai nn. 27 e 28 della tavola.

Dai disegni regolari, a lati rettilinei, si passa poi insensibilmente, per curvatura più o meno pronunciata dei lati stessi, e per arrotondamento degli angoli piani, a disegni affatto irregolari che dánno alla superficie della faccia un aspetto come ondeggiato, e rendono i riflessi slavati e affatto inservibili ad esatte misure.

Dai contorni delle lamelle sovrapposte dipendono naturalmente anche le figure delle depressioni che si vedono alternanti colle sporgenze, e forse anche il fenomeno che vidi una sola volta sopra qualche faccia di }111{, di solchi cioè che corrono nel senso $[11\bar{2}]$ restringendosi molto lentamente e terminando in punta verso lo spigolo di (111) con (001). Tali solchi si formerebbero evidentemente, qualora due sistemi di lamelle pentagone, molto allungate nel senso $[11\bar{2}]$ e quindi strette nel senso orizzontale, avessero i loro lati laterali e inferiori, per arrotondamento degli angoli piani laterali, trasformati in linee leggermente curve, e venissero poscia a contatto immediato nella loro parte superiore. Questo nesso tra quei singolari solchi e le lamelle pentagonali trasformate in triangoli a due lati curvi e convessi, sembra tanto più probabile che vi sono sulla stessa faccia di tali lamelle distintamente discernibili (fig. 26).

Le faccie dei prismi, come fu già detto sopra, e, del resto, è noto, sono costantemente striate nel senso verticale, ora più finamente, ora più grossolanamente; quelle di }100{ in generale meno fortemente di quelle di }110{. Tale striatura, dovuta a combinazione oscillatoria dei due prismi e forse anche di prismi ottagoni, produce sovente delle facce pseudocristalline o apparenti che si potrebbero prendere per vere faccie cristalline di prismi ottagoni. Però questo fenomeno non è mai tanto pronunciato quanto nella maggior parte dei cristalli d'idocrasio del banco di granato.

Le altre forme, benchè meno frequenti e d'ordinario meno sviluppate di }001{ }111{ }110{ }100{, presentano pure, ciascuna, qualche fenomeno degno di nota. La piramide di secondo ordine }101{ è forse quella che svela ancora maggiore varietà. In pochi casi soltanto essa è più largamente sviluppata, e in rarissimi casi dominante fra le faccie terminali, unitamente alla base e a piramidi appiattite }11 m{, in modo da ridurre le faccie di }111{ a strettissime striscie. Ora le sue faccie sono lucentissime e affatto liscie, ora invece appannate e scabre, e non di rado si vede come uno stato intermedio fra i due primi, cioè, sulla faccia generalmente ruvida e appannata, si osservano dei ridossi allungati e allineati parallelamente agli spigoli di }101{ con }111{ e terminanti sopra con faccette parallele a }101{ e lucenti (fig. 29). Non di rado poi vi sono delle lamelle ondeggiate a contorni poco netti, che ricordano sino ad un certo punto quelle sopra }111{ (fig. 30).

L'unica volta che vidi una faccia di piramide di secondo ordine }10 m{, $m > 1$, questa era scabra.

Riguardo alle piramidi di primo ordine $\{11m\}$ in cui $m > 1$, si può dire che esse sono in generale a faccie lucenti, ma quasi sempre a superficie alquanto cilindrica e convessa, e striate più o meno distintamente nel senso degli spigoli colla base. Forse la sola $\{112\}$ fa eccezione a questa regola, in quanto che la trovai, ma una sola volta, a faccie piane. Le piramidi $\{11m\}$ sono d'ordinario a faccie strette, ma talora anche larghe qualche millimetro nel senso normale agli spigoli con (001).

Fra le due piramidi $\{221\}$ e $\{331\}$, la prima presenta minore interesse; essa è sempre stretta e o liscia o striata nel senso delle sue intersezioni con $\{111\}$ e $\{131\}$. Quest'ultima invece presenta maggiore varietà nel suo aspetto.

Non tanto raramente essa è sviluppatissima e qualche volta anche più estesa di $\{111\}$, ma ordinariamente anch'essa è stretta. Sovente affatto liscie, le sue faccie, in altri casi, e forse nella maggior parte dei cristalli, sono striate nel senso orizzontale; ora poi sono lucenti, ora appannate.

Notevoli sono le sporgenze che vi si scorgono alcune volte distintamente; sono rialzi allungati e allineati nel senso orizzontale, terminati superiormente da faccette che sembra riflettano sempre in pari tempo come la faccia adiacente di $\{221\}$, mentre inferiormente presentano due faccette collocate simmetricamente riguardo all'altezza della faccia di $\{331\}$, alquanto curve, orientate come faccie di piramidi diottagone. Quando tali sporgenze sono assai regolari e numerose, esse producono, a prima vista, l'effetto di una grossolana striatura orizzontale (fig. 31).

Rispetto alle piramidi diottagone v'ha poco da dire.

La $\{312\}$ è forse fra tutte le forme la più liscia generalmente, ma è raro non vedervi qualche stria almeno nel senso della intersezione colla faccia adiacente di $\{111\}$ e in molti casi si aggiungono, a queste strie, altre parallele alla intersezione colla faccia adiacente di $\{211\}$ (fig. 32).

Delle piramidi $\{31m\}$ in cui $m > 2$, fu già detto incidentalmente, che una volta ne vidi una faccia larga ma affatto ruvida, l'altra volta una strettissima, ma lucente.

Le piramidi di simbolo generale $\{mpp\}$, cioè $\{311\}$, $\{211\}$ ecc., sono costantemente, ora in modo più distinto, ora in modo appena visibile ad occhio nudo, striate nel senso della zona $[111, 100]$ o di una analoga di cui fanno parte, e sempre lucentissime.

Gettando finalmente uno sguardo retrospettivo su tutto ciò che siamo venuti esponendo rispetto allo stato fisico delle faccie, possiamo dire che tutti i varî disegni regolari osservati sulle faccie, sono in rapporto colle più semplici direzioni cristallograficamente orientate della sostanza, sono cioè paralleli, o contornati da lati paralleli alle zone più semplici $[001]$, $[110]$, $[\bar{1}10]$, $[01\bar{1}]$, $[\bar{1}01]$, $[\bar{1}20]$ e analoghe, $[\bar{1}11]$ e analoghe, $[11\bar{2}]$ e analoghe, $[010]$ e $[100]$. Di più, confrontando i disegni particolari delle faccie dei nostri cristalli con quelli di cristalli provenienti da altri giacimenti, è facile notare, come nei nostri non manca quasi nessuno dei caratteri osservati altrove; laonde risulta che quei disegni devono ritenersi come essenzialmente inerenti all'edifizio cristallino dell'idocrasio e non come dipendenti in modo principale dalle condizioni paragenetiche variabili di luogo in luogo; locchè però non toglie che ora predomini nei cristalli l'uno, ora l'altro, e non solo secondo i varî giacimenti, ma anche nelle diverse parti di un medesimo giacimento. A conferma di quest'ultima

asserzione, noto soltanto, che p. e. quei cristalli da me raccolti, i quali presentano sulla base disegni ottagonali, li ebbi tutti insieme; o, in altri termini, questi cristalli provengono, se non dalla stessa geode, almeno dalla stessa limitatissima regione del banco.

Passo ora a dare i risultati delle misure goniometriche e dei calcoli istituiti per vedere se l'eventuale miscela di cristalli provenienti dai due giacimenti della Testa Ciarva abbia influito sensibilmente sulle costanti dedotte dallo Zepharovich da un numero assai grande di angoli (306).

Ho seguito un metodo che *a priori* mi parve il più adatto e che diede, come vedremo, risultati veramente soddisfacenti. Disgraziatamente il metodo richiede materiale eccellente, quale non si può sempre avere a disposizione. Scelsi tra il grande numero di cristalli che sono nelle mie mani, i sei soli in cui la base e le quattro faccie superiori della piramide (i cristalli non erano terminati che ad una sola estremità) riflettevano senza eccezione alcuna una sola e perfetta immagine, talchè tutti i valori ottenuti si potevano ritenere di ugual peso. Misurai, da una parte, i quattro angoli della base colle quattro faccie della piramide, e dall'altra, i quattro angoli degli spigoli terminali della piramide, nonchè, ove era possibile con esattezza, gli angoli tra le faccie di }111{ con quelle di }110{ e gli angoli di (001) colle faccie di {100}. Per ciascun angolo non fu fatta che una sola lettura, senza alcuna ripetizione e tenendo conto soltanto dei mezzi minuti.

Ecco anzitutto i valori trovati sovra i sei cristalli:

Cristallo 6904/130 (2).

(001):(111)	= 37° 15′ 30″	(111):(110)	= 52° 47′ 0″
" :$(1\bar{1}1)$	= 37 16 30	$(1\bar{1}1)$:$(1\bar{1}0)$	= 52 47 30
" :$(\bar{1}\bar{1}1)$	= 37 14 30	$(\bar{1}\bar{1}1)$:$(\bar{1}\bar{1}0)$	= 52 43 0
" :$(\bar{1}11)$	= 37 14 0	$(\bar{1}11)$:$(\bar{1}10)$	= 52 42 0
media	= 37 15 7″,5	media	= 52 44 52″,5

(111):$(1\bar{1}1)$	= 50° 40′ 30″
$(1\bar{1}1)$:$(\bar{1}\bar{1}1)$	= 50 41 0
$(\bar{1}\bar{1}1)$:$(\bar{1}11)$	= 50 40 0
$(\bar{1}11)$:(111)	= 50 42 30
media	= 50 41

La somma degli angoli misurati nelle zone [110] e [$\bar{1}$10] è esattamente = 180°.

Cristallo 15980/233.

(001):(111)	= 37° 15′ 30″	(111):$(1\bar{1}1)$	= 50° 38′ 0″
" :$(1\bar{1}1)$	= 37 12 30	$(1\bar{1}1)$:$(\bar{1}\bar{1}1)$	= 50 41 30
" :$(\bar{1}\bar{1}1)$	= 37 15 30	$(\bar{1}\bar{1}1)$:$(\bar{1}11)$	= 50 41
" :$(\bar{1}11)$	= 37 17 0	$(\bar{1}11)$:(111)	= 50 40
media	= 37 15 7″,5	media	= 50 40 7″,5

Gli angoli di }111{ con }110{ non furono misurati perchè le faccie del prisma non si prestavano a letture sufficientemente esatte.

Cristallo 15981/234.

$(001):(111)$	$= 37°\ 13'\ 30''$	$(111):(110)$	$= 52°\ 45'\ 0''$
" $:(1\bar{1}1)$	$= 37\ \ 13\ \ \ 0$	$(1\bar{1}1):(1\bar{1}0)$	$= 52\ \ 47\ \ 30$
" $:(\bar{1}\bar{1}1)$	$= 37\ \ 14\ \ \ 0$	$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}0)$	$= 52\ \ 47\ \ 30$
" $:(\bar{1}11)$	$= 37\ \ 15\ \ 30$	$(\bar{1}11):(\bar{1}10)$	$= 52\ \ 44\ \ 30$
media	$= 37\ \ 14$	media	$= 52\ \ 46\ \ 7'',5$

$(111):(1\bar{1}1)$	$= 50°\ 41'\ 0''$
$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1)$	$= 50\ \ 39\ \ 30$
$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11)$	$= 50\ \ 42\ \ \ 0$
$(\bar{1}11):(111)$	$= 50\ \ 40\ \ \ 0$
media	$= 50\ \ 40\ \ 37'',5$

La somma degli angoli nella zona $[110]$ è $= 180°\ 0'\ 30''$, quella corrispondente della zona $[\bar{1}10] = 180°$.

Cristallo 15982/235.

$(001):(111)$	$= 37°\ 17'\ \ 0''$	$(111):(110)$	$= 52°\ 46'\ \ 0''$
" $:(1\bar{1}1)$	$= 37\ \ 12\ \ \ 0$	$(1\bar{1}1):(1\bar{1}0)$	$= 52\ \ 49\ \ \ 0$
" $:(\bar{1}\bar{1}1)$	$= 37\ \ 13\ \ 30$	$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}0)$	$= 52\ \ 43\ \ 30$
" $:(\bar{1}11)$	$= 37\ \ 18\ \ \ 0$	$(\bar{1}11):(\bar{1}10)$	$= 52\ \ 41$
media	$= 37\ \ 15\ \ \ 7'',5$	media	$= 52\ \ 44\ \ 52'',5$

$(111):(1\bar{1}1)$	$= 50°\ 41'\ 30''$
$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1)$	$= 50\ \ 41\ \ 30$
$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11)$	$= 50\ \ 42\ \ \ 0$
$(\bar{1}11):(111)$	$= 50\ \ 41\ \ 30$
media	$= 50\ \ 41\ \ 37'',5$

La somma degli angoli nelle zone $[110]$ e $[\bar{1}10]$ è $= 180°$.

Cristallo 15985/238.

$(001):(111)$	$= 37°\ 13'\ 30''$	$(111):(110)$	$= 52°\ 46'\ 30''$
" $:(1\bar{1}1)$	$= 37\ \ 16\ \ \ 0$	$(1\bar{1}1):(1\bar{1}0)$	$= 52\ \ 46\ \ 30$
" $:(\bar{1}\bar{1}1)$	$= 37\ \ 15\ \ 30$	$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}0)$	$= 52\ \ 42$
" $:(\bar{1}11)$	$= 37\ \ 15\ \ \ 0$	$(\bar{1}11):(\bar{1}10)$	$= 52\ \ 41\ \ 30$
media	$= 37\ \ 15\ \ \ 0''$	media	$= 52\ \ 44\ \ \ 7'',5$

$(111):(1\bar{1}1)$	$= 50°\ 40'\ \ 0''$
$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1)$	$= 50\ \ 40\ \ \ 0$
$(\bar{1}\bar{1}1):(\bar{1}11)$	$= 50\ \ 41\ \ 30$
$(\bar{1}11):(111)$	$= 50\ \ 40\ \ \ 0$
media	$= 50\ \ 40\ \ 22'',5$

La somma degli angoli nella zona [110] è = 179° 59′, nella zona [$\bar{1}$10] = 179° 57′ 30″.

Cristallo 15992/245.

(001):(111)	= 37° 17′ 0″	(111):(110)	= 52° 47′ 30″
" :(1$\bar{1}$1)	= 37 13 30	(1$\bar{1}$1):(1$\bar{1}$0)	= 52 44 30
" :($\bar{1}\bar{1}$1)	= 37 14 0	($\bar{1}\bar{1}$1):($\bar{1}\bar{1}$0)	= 52 41 0
" :($\bar{1}$11)	= 37 17 0	($\bar{1}$11):($\bar{1}$10)	= 52 44 0
media	= 37 15 22″,5	media	= 52 44 15″
(111):(1$\bar{1}$1)	= 50° 42′ 30″	(001):(100)	= 90° 0′ 30″
(1$\bar{1}$1):($\bar{1}\bar{1}$1)	= 50 41 0	" :(0$\bar{1}$0)	= 89 53 0
($\bar{1}\bar{1}$1):($\bar{1}$11)	= 50 42 30	" :($\bar{1}$00)	= 90 2 30
($\bar{1}$11):(111)	= 50 41 0	" :(010)	= 90 5 30
media	= 50 41 45″	media	= 90 0 22″,5

La somma degli angoli nella zona [110] è = 179° 59′, in quella [$\bar{1}$10] = 179° 59′ 30″.

Se ora riuniamo i soli angoli che si poterono misurare in tutti i sei cristalli, abbiamo:

	(001):(111)	(111):(1$\bar{1}$1)
N. 6904	37° 15′ 7″,5	50° 41′ 0″
" 15980	37 15 7″,5	50 40 7″,5
" 15981	37 14 0	50 40 37″,5
" 15982	37 15 7″,5	50 41 37″,5
" 15985	37 15 0	50 40 22″,5
" 15992	37 15 22″,5	50 41 45
	media = 37 14 57″,5	media = 50 40 55

Considerando ora le due medie di ugual peso, e calcolando dal secondo angolo il primo, si trova 37° 14′ 58″,8; calcolando invece dal primo il secondo, si trova 50° 40′ 53″,4. Prendendo la media dell'angolo trovato 37° 14′ 57″,5, e dell'angolo dedotto 37° 14′ 58″,8, si ha:

(001):(111) = 37° 14′ 58″,15

e il seguente confronto tra calcolo e osservazione:

	calcolato	osservato	diff. tra calc. e oss.
(001):(111)	= 37° 14′ 58″,15	37° 14′ 57″,5	+ 0″,65
(111):(1$\bar{1}$1)	= 50 40 54″, 2	50 40 55	— 0″,80

Questi risultati sono certamente più che soddisfacenti.

Il rapporto degli assi diventerebbe:

$$a : a : c :: 1 : 1 : 0,53768644.$$

I risultati ottenuti da Zepharovich per le stesse quantità sono:

$$a:a:c::1:1:0{,}5375414$$

	calcolato	osservato	diff. tra calc. e oss.
(001):(111) =	37° 14′ 31″,3	37° 14′ 37″,7	— 6″,4
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 40 20″,6	50 40 4″,3	+ 16″,3

Applicando lo stesso metodo ai singoli cristalli misurati, si trova:

	calc.	oss.	diff.
	N. 6904.		
(001):(111) =	37° 15′ 5″,2	37° 15′ 7″,5	— 2″,3
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 41 2″,9	50 41	+ 2″,9
	N. 15980.		
(001):(111) =	37 14 44″, 1	37 15 7″,5	— 23″,4
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 40 36″,68	50 40 7″,5	+ 29″,18
	N. 15981.		
(001):(111) =	37 14 22″,37	37 14	+ 22″,4
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 40 9″,6	50 40 37″,5	— 27″,9
	N. 15982.		
(001):(111) =	37 15 20″,22	37 15 7″,5	+ 12″,7
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 41 21″,63	50 41 37″,5	— 15″,9
	N. 15985.		
(001):(111) =	37 14 46″,36	37 15	— 13″,6
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 40 39″,52	50 40 22″,5	+ 17″
	N. 15992.		
(001):(111) =	37 15 30″,73	37 15 22″,5	+ 8″,23
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 41 34″,74	50 41 45	— 10″,26

Nessuna differenza oltrepassa l'approssimazione colla quale furono fatte le letture (30″).

Il cristallo che, preso isolatamente, dà i migliori risultati, è il n. 6904, per il quale si hanno le seguenti differenze tra il calcolo fondato sopra tutti i 6 cristalli e l'osservazione:

	calc.	oss.	diff.
(001):(111) =	37° 14′ 58″,15	37° 15′ 7″,5	— 9″,35
(111):(1$\bar{1}$1) =	50 40 54″,2	50 41	— 5″,8

mentre per gli altri cristalli queste differenze sono rispettivamente:

15980	15981	15982	15985	15992
— 9″,35	+ 58″,15	— 9″,35	— 1″,85	— 24″,35
+ 46″,7	+ 16″,7	— 43″,3	+ 31″,7	— 50″,8

Fra i cristalli, per i quali Zepharovich indica i valori di singoli angoli, non ve ne ha alcuno che corrisponda alle suddette condizioni, nel quale cioè siano misurati,

o almeno indicati, tutti quattro gli angoli delle faccie superiori della piramide colla base, e, in pari tempo, i quattro angoli degli spigoli terminali della piramide. Zepharovich dà invece (p. 54-61) per ciascuno di 11 cristalli, i quattro primi angoli col peso di ciascun valore (1, 2, 3). Tenendo conto del peso si trovano le seguenti medie per l'angolo (111):(001). Indico in pari tempo il numero dato dall'autore a ciascuno di questi cristalli.

5. 37° 13′ 40″ (9).
9. 37 14 17 (7).
21. 37 14 58″,75 (8).
22. 37 14 26″,25 (8).
23. 37 15 6″,66 (9).
26. 37 11 25 (6).
27. 37 15 24″,55 (11).
28. 37 13 13″,33 (9).
31. 37 15 49 (8).
32. 37 15 30 (4).
33. 37 11 24″,29 (7).

Da questi valori si dedurrebbe la media 37° 14′ 11″.

Ma parecchi di questi cristalli svelano grandi irregolarità, e se ci limitiamo p. e. a quelli soli in cui l'angolo in questione varia entro gli stessi limiti come nei nostri 6 cristalli, cioè tra 37° 12′ e 37° 18′, troviamo per i nn. 21, 22, 23, 27 che soli corrispondono a questa condizione, la media 37° 15′ 1″,4. Il cristallo più regolare poi misurato da Zepharovich, cioè il n. 21, in cui i quattro angoli furono trovati uguali entro i limiti dell'osservazione, dà la media 37° 14′ 58″,75, la quale concorda esattamente colla media osservata sopra i nostri 6 cristalli. Aggiungo ancora che la media aritmetica dei limiti estremi nei nostri 6 cristalli è = 37° 15′, cioè esattamente quella dedotta da tutte le osservazioni, mentre dai risultati ottenuti da Zepharovich (p. 11) seguirebbe questa media = 37° 20′ e limitandoci ai 94 casi in cui l'angolo oscillava fra 37° 10′ e 37° 17′ si troverebbe la media aritmetica = 37° 13′ 30″. Queste ultime due medie aritmetiche deviano dalla media osservata in 139 casi di + 5′ 22″,3 rispettivamente — 1′ 7″,7, e dal valore più probabile, calcolato, di + 5′ 29″ rispettivamente — 1′1 ″.

Dunque anche sotto questo aspetto i risultati ottenuti sui nostri cristalli e sui 4 scelti fra quelli misurati da Zepharovich si presenterebbero migliori.

Ma non è già mio scopo di difendere le costanti da me calcolate contro quelle dedotte dal Zepharovich da un numero di gran lunga maggiore di misure, ma soltanto di far vedere, come il metodo da me adottato, dà risultati più che soddisfacenti, non solo per il completo accordo tra osservazione e calcolo che ottenni, ma anche per l'accordo assai soddisfacente tra i risultati dello Zepharovich e i miei, accordo che non si potrebbe aspettare maggiore, trattandosi di due osservatori diversi, di materiale diverso, di numero di osservazioni diverso, e di metodi di calcolo diversi. Parlerebbe a favore del metodo da me adottato l'economia di tempo e di fatica, ma sarebbe opportuno che si moltiplicassero simili confronti, prima di pronunciarsi. Ho cercato di utilizzare gli stessi cristalli miei di idocrasio per una verifica, fondando

il calcolo sopra qualche altra piramide, ma non fu possibile trovare tra il mio materiale un numero sufficiente di cristalli che si prestassero a questa verifica. In un solo cristallo (n. 6906/132) potei misurare esattamente i quattro angoli superiori di $\{101\}$ colla base. Ecco i risultati:

$(001):(101)$	$= 28^\circ\ 18'\ 0''$	$(100):(101)$	$= 61^\circ\ 50'\ 0''$
» $:(\bar{1}01)$	$= 28\ \ 14\ \ 0$	$(\bar{1}00):(\bar{1}01)$	$= 61\ \ 39\ \ 30$
» $:(011)$	$= 28\ \ 11\ \ 30$	$(010):(011)$	$= 61\ \ 46\ \ 0$
» $:(0\bar{1}1)$	$= 28\ \ 12\ \ 30$	$(0\bar{1}0):(0\bar{1}1)$	$= 61\ \ 43$
media	$= 28\ \ 14\ \ 0$	media	$= 61\ \ 44\ \ 37'',5$

dalle quali misure si deduce ancora:

$(001):(100)$	$= 90^\circ\ \ 8'\ \ 0''$	$= 180^\circ\ \ 1'\ 30''$
» $:(\bar{1}00)$	$= 89\ \ 53\ \ 30$	
» $:(010)$	$= 89\ \ 57\ \ 30$	$= 179\ \ 53$
» $:(0\bar{1}0)$	$= 89\ \ 55\ \ 30$	
media	$= 89\ \ 58\ \ 37'',5$	

L'angolo calcolato $(001):(101)$ sarebbe, per le nostre costanti, $= 28^\circ\ 15'\ 59''$
per quelle di Zepharovich, $= 28\ \ 15\ \ 36$
l'angolo $(101):(100)$ invece, per le nostre costanti, $= 61\ \ 44\ \ 1$
per quelle di Zepharovich, $= 61\ \ 44\ \ 24$

L'accordo, come era da aspettarsi, trattandosi di un solo cristallo, non è tutto ciò che si potrebbe desiderare, ma è già assai migliore di quello che si ha tra le misure di Zepharovich e il calcolo. Di fatti, questo autore trovò:

come media di 15 angoli, $(001):(101) = 28^\circ\ \ 9'\ 15''$
» 4 » $(101):(100) = 61\ \ 47\ \ 26$.

Si potrebbe cercare la causa del lieve divario tra il valore di c ottenuto da Zepharovich e il nostro, nell'avere egli utilizzato per il calcolo della costante anche un certo numero di angoli trovati sovra cristalli d'idocrasio del banco di granato. Di fatti, ricordo, che per gli interessanti prolungamenti che mostrano molti di tali cristalli, l'angolo tra la base e le faccie di $\{111\}$ fu trovato, sovra due cristalli, $= 37^\circ\ 7'\ 5''$ e $= 37^\circ\ 7'\ 52'',5$, cioè notevolmente minore che nei cristalli verdi del banco d'idocrasio, talchè l'aggiunta di tali angoli abbasserebbe il valore della media e quindi il valore di c. Ma devo osservare che, almeno fra i cristalli che il Zepharovich ebbe in comunicazione dal Gastaldi e dal Sella, e che ancora si conservano nella collezione del Valentino a Torino, non vidi che uno solo proveniente certamente dal banco di granato, locchè, unitamente a quello che ebbi già a dire nella prima parte di questo lavoro sulla relativa rarità di cristalli ben misurabili d'idocrasio nel banco di granato, mi sembra escludere quella ipotesi. Piuttosto si potrebbe pensare che il leggero divario fra i nostri risultati possa derivare da ciò che Zepharovich ha bensì preso le medie di assai maggior numero di angoli omologhi, ma scegliendoli in gran parte qua e là sovra i cristalli, e non limitandosi a quei cristalli in cui tutti gli angoli omologhi si prestavano ad esatte misure; modo di procedere questo che

forse non esclude interamente il pericolo di esagerare il valore medio degli angoli omologhi in un dato senso, a meno che si moltiplicassero ancora assai di più le misure. Forse da ciò dipende, che la media degli angoli omologhi osservati dal Zepharovich, differisce maggiormente dalla media aritmetica dei valori estremi, che non nelle nostre ricerche (vedi sopra).

Mi pare finalmente opportuno di richiamare l'attenzione sul fatto, che nei nostri cristalli non si svela alcuna tendenza delle forme prismatiche a diventare piramidi assai allungate, cioè tendenza dei cristalli ad assottigliarsi verso l'estremità libera. Ciò risulterebbe tanto dalle mie misure, quanto da quelle di Zepharovich. Di fatti, nel caso di un tale assottigliamento, la somma degli angoli delle mezze zone [110], [$\bar{1}$10], [100] e [010] dovrebbe essere minore di 180°, ossia gli angoli tra la base }001{ e le faccie dei prismi }110{ e }100{ dovrebbero essere minori di 90°. Ora io ho trovato:

nel cristallo n. 6906:	(001):(100) = 90° 8′ 0″	= 180° 1′ 30″
	„ :($\bar{1}$00) = 89 53 30	
	„ :(010) = 89 57 30	= 179 53 0
	„ :(0$\bar{1}$0) = 89 55 30	
	media = 89 58 37″,5	
nel cristallo n. 15992:	(001):(100) = 90° 0′ 30″	= 180° 3′
	„ :($\bar{1}$00) = 90 2 30	
	„ :(010) = 90 5 30	= 179 58 30
	„ :(0$\bar{1}$0) = 89 53 0	
	media = 90 0 22″,5	

nel crist. n. 6904,	per la mezza zona	[110]	la somma degli angoli	= 180°	
	„ „	[$\bar{1}$10]	„ „	= 180	
nel crist. n. 15981,	„ „	[110]	„ „	= 180	0′ 30″
	„ „	[$\bar{1}$10]	„ „	= 180	
nel crist. n. 15982,	„ „	[110]	„ „	= 180	
	„ „	[$\bar{1}$10]	„ „	= 180	
nel crist. n. 15985,	„ „	[110]	„ „	= 179	59
	„ „	[$\bar{1}$10]	„ „	= 179	57 30
nel crist. n. 15992,	„ „	[110]	„ „	= 179	59
	„ „	[$\bar{1}$10]	„ „	= 179	59 30.

Zepharovich dà poscia, per l'angolo (100):(001) 90° 0′ 57″ come media di nove misure fatte sovra spigoli omologhi diversi, e per l'angolo (110):(001) 89° 59′ 45″ come media di undici misure fatte sovra spigoli omologhi diversi. Da tali valori risulta evidente, che vi sono delle zone che nei limiti della osservazione stanno perfettamente a posto, altre che dànno valori accennanti ad un leggero assottigliamento del cristallo verso l'estremità libera, ed altre ancora che indicano un leggero ingrossamento del cristallo verso l'estremità libera. La coesistenza di zone delle tre specie, o delle ultime due specie, in un medesimo cristallo sembrerebbe sufficiente per escludere,

almeno per i nostri cristalli, quella supposta tendenza all'assottigliamento verso l'estremità libera. E si noti bene che qui abbiamo precisamente considerato le zone in cui questa tendenza dovrebbe palesarsi nel massimo grado.

Ma anche guardando p. e. i risultati ottenuti dal Sansoni sulla Baritina di Vernasca ([1]) non mi pare così senz'altro dimostrato in modo indubbio quella certa tendenza. Anzitutto mi sembra evidente, che in simili ricerche non sia più permesso di prendere delle medie di angoli omologhi scelti qua e là sovra relativamente pochi cristalli, ma che si debbano considerare i cristalli ad uno ad uno, e solo quelli in cui o intere zone o almeno mezze zone siano tutte misurabili con sufficiente esattezza, a meno di moltiplicare talmente il numero delle misure sovra angoli omologhi, da potere, almeno con grande probabilità, supporre che le medie prese siano attendibili e esprimano qualche fatto reale e generale. L'importanza dell'argomento richiede una qualche discussione delle cifre date dal Sansoni. Devo in primo luogo notare che le deviazioni medie dedotte dall'autore subiscono leggieri cambiamenti qualora si prendano, *non* le medie delle medie ottenute sopra i singoli cristalli, senza curarsi se queste singole medie provengano da 1, 2 o 4 spigoli omologhi, misurati nello stesso cristallo, *ma invece* le medie di tutti gli angoli omologhi misurati. Che il metodo adottato dal Sansoni, e forse anche da altri, non è corretto, è stato detto tante volte che può sembrare superfluo tornarci sopra. Ma gli stessi risultati del Sansoni lo dimostrano poi luminosamente.

Di fatti, dalle misure dell'autore, si deduce:

		massima diff. gen.	massima diff. sul med. crist.
Zona [100] —	(010):(011)	25′ 50″	25′ 50″
	(011):(001)	7 15	4 50
Zona [001] —	(100):(110)	8 20	5
	(110):(010)	30 40	27 50
Zona [010] —	(100):(102)	9 10	7 20
	(102):(001)	33 40	30 50

Da questo confronto segue ad evidenza, che gli angoli omologhi variano, poco su poco giù, negli stessi limiti sopra un medesimo cristallo che sopra tutta la serie dei cristalli, e che quindi si ottengono delle medie assai più attendibili dividendo la somma di tutti gli angoli omologhi per il numero totale di essi.

Se procediamo così, gli angoli medî diventerebbero:

			differenza da 90°
(010):(011) = 37° 18′ 39″	(30)	89° 59′	— 1′
(011):(001) = 52 40 21	(26)		
(100):(110) = 39 7 40″,5	(18)	89 48 34″,5	— 11′ 25″,5
(110):(010) = 50 40 54	(22)		
(100):(102) = 51 7 40″,6	(17)	89 48 12	— 11 45
(102):(001) = 38 40 31″,66	(12)		

([1]) Mem. R. Accad. d. Sc. di Bologna, Ser. 4 tomo VI, 1885, 4°; e Groth, Zeitschrift für Kryst. XI, p. 355, 1886, 8°.

Queste medie però dei 6 angoli, quale fiducia meritano? Vediamo, per farcene un concetto, come si comportano di fronte ai valori estremi trovati per ciascuno dei 6 angoli.

angolo	(010):(011)	(011):(001)	
limiti estremi	37° 11′ — 37° 36′ 50″	52° 35′ 55″ — 52° 43′ 10″	Zona [100]
diff. dalla media	+ 7′ 39″ ; — 18′ 11″	+ 4′ 26″ ; — 2′ 49″	
angolo	(100):(110)	(110):(010)	
limiti estremi	39° 3′ 30″ — 39° 11′ 50″	50° 22′ 30″ — 50° 53′	Zona [001]
diff. dalla media	+ 4′ 10″ 5 ; — 4′ 9″ 5	+ 18′ 34″ ; — 12′ 6″	
angolo	(100):(102)	(102):(001)	
limiti estremi	51° 4′ 40″ — 51° 13′ 50″	38° 18′ 50″ — 38° 52′ 30″	Zona [010]
diff. dalla media	+ 3′ 0″ 6 ; — 6′ 9″ 4	+ 21′ 41″ 66 ; — 11′ 58″ 33	

Da questo quadro risulta evidente, che nessuna delle tre zone dà delle medie anche mediocremente soddisfacenti, come, del resto, era da aspettarsi. Non mi pare poscia che si possano sommare così senz'altro le medie dei diversi angoli misurati nella stessa zona, e la cui somma, secondo la teoria, dovrebbe essere uguale a 90°. Quei valori non sono equivalenti fra di loro per nessuna zona, nè vi ha mezzo di rimediare a questo difetto, perchè una compensazione sarebbe solo possibile se si volessero utilizzare quelle medie per il calcolo delle costanti, ritenendo i valori teorici delle tre somme rispettive come di 90°; ma qui si tratterebbe appunto di dimostrare che ciò non è.

Sarebbe da aggiungere che, perchè gli angoli tra le pinakoidi }010{ e }001{ fossero tutti i quattro di 89° 59′, gli angoli di esse colla pinakoide }100{ dovrebbero deviare dal retto di — 58′ 40″ ciascuno, mentre noi troviamo questa deviazione di soli — 11′ $^1/_2$ circa.

Ma andiamo un passo più avanti e discutiamo le sole zone in cui si poterono misurare o tutti gli angoli o almeno la metà.

In tre cristalli sopra quattordici, cioè nei nn. 3, 4, 6, furono potuti misurare tutti gli angoli della zona [100]. Orbene questi tre cristalli dànno i seguenti valori medî fra loro equivalenti:

	(010):(011)	(011):(001)	somma
N. 3.	37° 19′ 50″ (4)	52° 41′ 5″ (4)	90° 0′ 55″
" 4.	37 19 47 (4)	52 40 0 (4)	89 59 47
" 6.	37 18 47 (4)	52 40 55 (4)	89 59 42
media =	37 19 28 (12)	52 40 40 (12)	90 0 8

Quindi in questi tre cristalli la zona [100], più o meno normale alla matrice sottostante, e per ciò la meno influenzata dalla sopra detta tendenza, pare stia assai bene a posto. In ogni caso, se si volessero assolutamente tirare delle conclusioni dalle

piccole divergenze tra gli angoli trovati e quello teorico di 90°, si potrebbe dire che vi sono tanto cristalli che si assottigliano verso l'estremità libera, quanto cristalli che s'ingrossano nel medesimo senso, e che quest'ultima tendenza, quasi quasi, predomina.

Ma passiamo alle altre zone in cui l'assottigliamento dovrebbe produrre il massimo effetto.

La zona [001] fu, per una metà completa, misurata nei tre cristalli 1, 7, 9. Essi dànno:

	(100):(110)	(110):(010)	somma
N. 1.	39° 8′ 25″ (2)	50° 50′ 35″ (2)	89° 59′
» 7.	39 7 30 (2)	50 41 (2)	89 48 30
» 9.	39 6 50 (2)	50 40 20 (2)	89 47 10
media =	39 7 35 (6)	50 43 58″,33 (6)	89 51 33″,33

Un cristallo adunque sta prossimamente a posto anche in questa zona, gli altri deviano nel senso richiesto dall'ipotesi.

Finalmente la terza zona [010] non fu potuta misurare per metà che nel solo cristallo n. 2 il quale diede:

(100):(102)	(102):(001)	somma
51° 6′ 25″ (2)	38° 38′ (2)	89° 44′ 25″.

Anche questo cristallo devia dalla teoria nel senso richiesto dall'ipotesi. Ma tutto sommato, abbiamo solo tre cristalli in cui, *una zona per ciascuno*, corrisponderebbe all'ipotesi sostenuta dal Sansoni.

Sembrerebbe quindi, da tutto ciò che abbiamo esposto, che occorrerebbe uno studio ulteriore, sopra materiale assai più ricco, o più adatto, per poter ritenere dimostrata, in modo indubbio, e anche per la stessa Baritina di Vernasca, la ipotesi, secondo la quale questi cristalli avrebbero la tendenza di assottigliarsi verso l'estremità libera. Certamente, i risultati del Sansoni, se non autorizzano a rigettare l'ipotesi, non autorizzano nemmeno ad ammetterla come sicura.

E mi sembra che ancora meno la dimostrino le misure dello Sjögren istituite sulla Allactite (Groth, Zeitschrift f. Kryst. X, 1885, p. 116-118) e citate dal Sansoni, in una nota, come conferma dei suoi risultati. Per convincersi che il materiale studiato da Sjögren non era molto adatto a servire di base ad una simile ricerca, basta leggere ciò che dice l'autore stesso.

Lit. Bruno e Salomone. Rom

RELAZIONE

letta dal Socio C. Tommasi-Crudeli, relatore, a nome anche del Socio S. Trinchese nella seduta del 3 giugno 1888 sulla Memoria dei dott. E. Bonardi e G. G. Gerosa, intitolata: *Nuove ricerche intorno all'azione di alcune condizioni fisiche sulla vita dei microorganismi.*

« I due autori han fatto precedere la esposizione delle loro ricerche sperimentali da uno studio storico-critico molto accurato di tutti i lavori che hanno avuto per iscopo di determinare l'influenza esercitata sullo sviluppo dei microorganismi dalla temperatura, dalla elettricità, dalla luce, da' diversi ambienti gassosi e dalla pressione. Essi rilevano come si sia data sin qui troppo poca importanza alla influenza della densità delle soluzioni nelle quali lo sviluppo di questi esseri avviene, e nelle loro ricerche hanno avuto principalmente in mira lo studio di questa influenza, della quale hanno saputo dimostrare l'efficacia nelle varie modalità di sviluppo dei microorganismi. I loro sperimenti sono stati condotti con molto rigore di metodo, ed applicati che siano allo studio biologico dei singoli microorganismi essi promettono dei risultati importanti. La Commissione quindi propone la stampa di questo scritto negli Atti dell'Accademia ».

Nuove ricerche intorno all'azione di alcune condizioni fisiche sulla vita dei microorganismi.

Memoria dei dottori E. BONARDI e G. G. GEROSA.

I.

1. Ormai tutti i naturalisti coscienziosi e spregiudicati ammettono come una cosa razionalmente necessaria che la vita sia il fenomeno ultimo e più complesso dell'evoluzione del nostro sistema solare, e che i fatti biologici si possano in ultima analisi ridurre a semplici fenomeni meccanici.

E poichè la forma, come disse Gegenbaur, è una funzione della materia eternamente mobile, si comprende quanto lo studio delle condizioni, in cui si trova un organismo, sia importante per spiegare la sua architettura e la sua biologia, nonchè la mutazione che nell'una e nell'altra si manifestano col cambiare delle condizioni stesse. Perciò abbiamo creduto non del tutto privo di interesse il riferire i risultati conseguiti nella presente ricerca, tanto più oggigiorno, che i microorganismi e specialmente gli schizomiceti, hanno assunto un grande significato patogenetico, e che le ricerche numerose intorno alle loro condizioni biologiche sembrano non di rado rigorose per quanto riguarda la pompa degli apparecchi, ma difettose nel metodo e nel concetto scientifico.

2. Alla densità delle soluzioni, entro le quali debbono svilupparsi i microorganismi, si è dato finora troppo poca importanza, se si fa astrazione dei lavori dei prof. Cantoni e Maggi dell'Università di Pavia. Noi abbiamo eseguito le esperienze appunto su soluzioni organiche di densità differenti, assoggettandole isolatamente e simultaneamente all'azione di diverse temperature, di correnti elettriche continue ed indotte, del magnetismo, di varî gas e di varie luci.

Durarono le nostre esperienze parte dello scorso anno ed il corrente fino all'aprile incluso. L'indole loro dice già che furono eseguite per la maggior parte in un laboratorio di fisica (quello dell'Università di Pavia). È quasi superfluo il dire che abbiamo usato rigorosamente le cautele necessarie per un ordine di ricerche tanto delicate, cautele riguardanti non solo le preparazioni delle soluzioni, la perfetta pulizia loro e degli oggetti, ma anche la misura e la durata delle influenze fisiche messe in azione.

Abbiamo osservati i fatti e dedotte spassionatamente le conclusioni, senza preoccupazioni eterogenistiche o panspermistiche.

II.

Cenni storico-critici.

A. *Influenza della temperatura superiore allo zero termometrico.*

1. Intorno all'influenza della temperatura sui germi e sui microorganismi sono celebri le esperienze dello Spallanzani. Egli poneva la soluzione organica in bottigliette di vetro a collo lungo ed affilato, che poi chiudeva ermeticamente, adoperando qualche volta anche la fusione del vetro (esperienze sulle muffe). Afferma che in dicianove bottiglie, così preparate e tenute per un'ora nell'acqua bollente, non ottenne poi alcun infusorio (1). Dimostrò che i semi dei legumi non si svolgono dopo l'ebollizione e che i germi degli infusorî, malgrado la loro piccolezza, non possono sottrarsi all'azione del fuoco (2). Dimostrò inoltre che le spore bollite delle muffe possono germinare ancora (3).

2. Dutrochet (4) sostenne sperimentalmente che le *Characee* poste nell'acqua conservano la vita ed il moto rotatorio fino ad una temperatura di 45° C.

3. Descloiseaux (5) ha presentato all'Accademia di Parigi delle *Conferve*, raccolte in Islanda nella terma di Gröf, ad una temperatura di 98° C.

4. Milne Edwards (6) ripetè l'esperienza di Spallanzani tenendo l'infusione, chiusa a fuoco in un palloncino di vetro, entro un bagno bollente di acqua per alcuni minuti. Non ottenne sviluppo di microorganismi.

5. Ehrenberg (7) trovò nelle sorgenti termali di Ischia ad una temperatura di 80°-85° C., oscillarie ed eunotie viventi e mobili; nell'acqua di Sinigaglia, ad una temperatura di 81° C. osservò quattro specie di rotiferi celeremente moventisi e parecchi infusori dei generi *Nassula*, *Enchelys* ed *Amphyleptus*, nonchè la *Eunotia Sancti Antonii* delle isole del Capo Verde.

6. Max Schultze (8) mantenne vivo l'*Actinophrys Eichornii* per 12-14 ore nell'acqua alla temperatura di 42° C. A questa temperatura non vivono invece la *Difflugie* e le *Amebe*; le *Vorticelle* morrebbero a 41°; le *Anguillule*, le *Turbellarie*, le *Naidi*, gli *Ostracodi* resisterebbero ad una temperatura di 43°-45° C. Il movimento protoplasmatico e la vita dei peli della *Tradescantia virginica*, della *Vallisneria spiralis*, della *Urtica urens* cesserebbero ad una temperatura di 47°-48° C.

7. Nella sua celebre Memoria *Sui corpuscoli organizzati, che esistono nell'atmosfera* (9) Pasteur dimostra che, mentre nelle infusioni acide lo sviluppo dei

(1) Opere di Lazzaro Spallanzani. Milano, 1826, tom. V, p. 351 e seguenti.
(2) Lazzaro Spallanzani, loc. cit.; tom. V, p. 340.
(3) Lazzaro Spallanzani, *Opuscoli di fisica animale e vegetale.* Modena, 1776, tom. II, p. 257.
(4) Comp. Rend. 1837, tom. V, p. 777.
(5) Comp. Rend. 1846, tom. XXIII, p. 934.
(6) Ann. des sciences naturelles. 5, 4a, tom. IX, p. 350, 1858.
(7) Monatsbericht der konigl. Akademie der Wissenschaften ecc. Berlin, 21 ottobre 1858.
(8) Max Schultze, *Das Protoplasma der Rhyzopoden und der Pflanzenzellen,* 1860.
(9) Annales de chemie, vol. 64°, 1862.

germi è impedito da una temperatura di 100°, nelle infusioni alcaline invece per produrre il medesimo effetto è necessaria una temperatura più elevata.

8. Cohn (1863) (1) afferma che oltre i 53° C. le *alghe* non possono più vivere.

9. Pouchet (2) assegna agli infusorî un limite massimo di temperatura di 55° C.

10. Cavalleri (3) sperimentando sulle soluzioni organiche ermeticamente chiuse in tubetti di vetro e scaldate per 15 minuti a 100° C. od anche solamente a 80°-90° C. non potè constatare lo sviluppo di vibrioni.

11. Mantegazza e Cantoni (4) eseguirono parecchie esperienze, introducendo varie infusioni organiche in palloncini a collo lungo ed affilato, facendole lungamente bollire e poi chiudendo il collo del recipiente coll'eolipila, quando il vapor d'acqua aveva scacciato tutta l'aria. Aprivano poi i palloncini sotto una campana, dapprima riempita con acqua bollente e nella quale introducevano successivamente aria arroventata. Durante le esperienze i recipienti si trovarono in un ambiente la cui temperatura oscillò fra 24° e 27° C., e tutti diedero, in uno spazio di tempo variabile da 10 a 17 giorni, numerosi microorganismi (bacilli, bacteri, vibrioni).

12. Di considerevole importanza sono le esperienze di Cantoni ed Oehl (5) sullo sviluppo degli infusorî.

Un infuso di farina di fave filtrato veniva chiuso, con un volume d'aria triplo o quadruplo entro palloncini di vetro, col fonderne il collo affilato. Codesti palloncini venivano gradatamente riscaldati entro una pentola fino a 100° C. e mantenuti poi a questa temperatura per circa 10 minuti. In parecchi casi ottennero vibrioni, in altri no; ed il risultato fu sempre negativo quando i palloncini venivano scaldati a 115-130° C. entro la pentola di Papin.

Questa prima serie di esperienze venne eseguita nell'autunno 1865, in una stagione quindi poco adatta. Nell'estate del 1866 gli illustri sperimentatori ricominciarono le ricerche, adoperando brodo preparato con buon muscolo di bue. Ebbero cura di adoperare palloncini più capaci dei precedenti e di introdurvi meno liquido; cosicchè ciascuno di essi conteneva circa 4 cc. di brodo a contatto con altri 90 cc. di aria. Chiusi a fusione di vetro furono mantenuti a 100°, alcuni per 10, altri per 30 ed altri per 60 minuti. Lasciati poi in un ambiente di temperatura non inferiore a 26° C. tutti diedero in un giorno o poco più una grande quantità di vibrioni. Diluendo il brodo osservarono che lo sviluppo dei microorganismi diminuiva rapidamente fino a ridursi minimo quando la diluizione raggiungeva un dato limite. Perciò il Cantoni (6) in una sua nota speciale deduce che la scarsezza delle sostanze organiche, nei liquidi

(1) Cohn, *Ueber die Algen des Karlsbaden-Sprudels, mit Rücksicht auf die Bildung des Sprüdelinters.* Breslau, 1863.

(2) Pouchet, *Nouvelles expériences sur la génération spontanée.* Paris, 1864.

(3) Rend. dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere. Dicembre 1865.

(4) Rend. dell'Istituto lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze mat. e nat. f. 7 e 8, vol. 2°, 1865.

(5) Annali universali di medicina. Vol. 194, fascicoli di maggio e giugno, 1866.

(6) *Esperienze sulla produzione dei vibrioni in liquidi bolliti.* Rend. Ist. lomb., classe di scienze mat. e nat., fasc. 8°, vol. 3°.

assoggettati alle anzidette prove, è la causa principale dei risultati negativi dello Spallanzani, del Cavalleri e di alcune prove del Pasteur.

Successivamente sottoposero ad osservazione palloncini di capacità più grande ancora e contenenti infusi organici pure più densi (brodo, decotto di zucca) alle temperature di 108°, 110°, 112°, 115° C. entro la pentola di Papin. Fino a 110° ottennero vibrioni, a temperature superiori no. Pertanto il Cantoni deduce che aumentando la densità degli infusi organici e la quantità d'aria a contatto con essi si possono portare i medesimi a 110° e mantenerli a questa temperatura per 15 minuti senza che venga in essi impedito lo sviluppo di forme (Nota citata).

13. Wyman pubblicò nel 1867 i risultati di numerose sue esperienze sugli infusi di carne bolliti e difesi dall'aria [1]. Afferma che il brodo e la carne di bue tagliuzzata, posti con acqua zuccherata in vasi di vetro chiusi a fuoco e tenuti per un'ora e mezzo a 100°, diedero ancora bacteri, vibrioni e monadi. L'estratto di Liebig nella medesima soluzione zuccherata, tenuto per 4 ore a 100°, diede pure vibrioni. In una altra serie di esperienze ottenne bacteri e vibrioni in infusi organici bolliti per 25 minuti e poi lasciati in contatto dell'aria passante per tubi arroventati.

14. Una lunga serie di esperienze analoghe eseguì il dott. Bennet [2] durante gli anni 1864, 1865 e 1867. Faceva bollire infusi molto diluiti di varie sostanze vegetali entro matracci capovolti, col collo immerso nello stesso liquido, contenuto in capsule di porcellana.

Vi introduceva poi aria per circa 3/4 della loro capacità, aria filtrata attraverso una serie di tubi contenenti cotone fioccoso, soluzione di potassa e pietra pomice con acido solforico. Faceva entrare nel collo del vaso un tappo di sughero a lungo bollito nello stesso liquido, poi tuffava il collo nella ceralacca liquida per suggellarlo. Lo sviluppo di vibrioni si verificò sempre, ma in un periodo di tempo assai lungo, attesa la tenue densità degli infusi adoperati.

15. Il Cohn [3] sperimentò l'azione delle diverse temperature su decotti vegetali seminati con una goccia di bacteri.

Decotti di fagioli in acqua distillata, bolliti per un quarto d'ora, seminati con una goccia di bacteri, chiusi ermeticamente e tenuti a 45°, 55°, 60°, entrano in putrefazione dopo tre giorni. Innalzando la temperatura a 65° la putrefazione viene alquanto ritardata. A 75° una vera putrefazione non avviene più, ma il decotto diventa opalino e si forma un sedimento costituito da bacteri. A 80° ottenne ancora pochi bacteri ed un *penicillium*. Però l'autore fa notare che le temperature alte (da 60° ad 80°) durarono troppo poco, perchè i risultati sieno attendibili. Osserva ch'è specialmente il *Bacillus subtilis* che si sviluppa ad alta temperatura, determinando la fermentazione butirrica. Questa forma allungandosi assai, darebbe poi i filamenti del *leptothrix*. Il *Bacterium termo* si formerebbe solo a temperature relativamente basse.

16. Dalle ricerche di Horvath [4] risulta che nelle soluzioni normali di sali

(1) Siliman's Amer. journ. 1877, settembre, p. 152 e seguenti.

(2) Edimburgh medical Journal. Marzo 1868.

(3) *Untersuchungen über Bacterien.* B. zur Biol. der Pflanzen, Zweites Heft, 1872.

(4) Beit. zur Biol. der Pflanzen, Zweites Heft, 1879.

minerali seminate di bacteri lo sviluppo cessa al di sopra dei 60° C. Tenendo le soluzioni ad una temperatura di 40°-50° lo sviluppo comincia entro 2-3 giorni.

17. Il dott. Eidam [1] studiò nel laboratorio di Cohn il modo di comportarsi del *Bacterium termo* alle diverse temperature, seminato nella comune soluzione di sali minerali (fosfato acido di potassa, solfato di magnesio, tartrato neutro di ammoniaca, cloruro di calcio). Le sue conclusioni sono le seguenti: a temperature inferiori a 50° C. il *Bacterium termo* non muore, ma è paralizzato: la moltiplicazione comincia a 5°,5, mantenendosi debole fino a 10°: da 10° a 35° si fa sempre più abbondante: al di sopra di 35° cessa rapidamente: a 40° il *Bacterium* è paralizzato: a 60° morto. L'autore insiste sull'importanza della durata della temperatura e dimostra sperimentalmente che il *Bacterium termo* resiste per 14 ore ad una temperatura di 45° e per tre ore solo a quella di 50°.

18. In un'altra serie di ricerche sui bacteri [2] il Cohn ripete con qualche modificazione le esperienze di Roberts [3] e viene ai medesimi risultati di quest'ultimo; che cioè, adoperando diverse infusioni di fieno, se l'ebollizione non si protrae oltre i 15 minuti, i microorganismi si sviluppano costantemente. Ottanta ed anche cento minuti di ebollizione non sono sufficienti, secondo Cohn, per impedire lo sviluppo dei bacteri nelle infusioni di fieno. La divergenza fra Cohn e Roberts sta in ciò che il secondo sostiene essere sufficiente 5 minuti di ebollizione per sterilizzare una infusione naturale di fieno (acida), ed essere insufficiente una, due ed anche tre ore di ebollizione per sterilizzarne una neutralizzata, mentre il primo afferma che gli infusi acidi e neutri sono egualmente resistenti.

19. Tyndall [4] ha pure ripetuto le prove di Roberts e di Cohn conseguendo risultati ora in accordo ed ora in disaccordo con quelli dei due citati sperimentatori. Sostenne inoltre che le infusioni vegetali sono realmente sterili solo quando l'ebollizione dura da 240 a 350 minuti.

20. Sebbene eseguite allo scopo di contribuire alla risoluzione del problema dell'eterogenesi, pure dal nostro punto di vista, hanno grande importanza le numerose ed accurate esperienze di Cantoni, Balsamo Crivelli e Maggi, esposte in ben 14 Memorie nei Rend. dell'Ist. lomb. dal 1867 al 1878.

Il modo di sperimentare col ben noto palloncino a collo affilato di Spallanzani fu quello stesso precedentemente descritto nei cenni intorno alle ricerche di Mantegazza, Cantoni ed Oehl.

Le infusioni organiche adoperate, erano di farina, zucca, rapa, gelatina pura, sugo di carne, brodo Liebig, tuorlo d'uovo di pollo, latte, orina, latte acido neutralizzato, latte con soluzione di potassa, tuorlo d'ovo di pollo con acqua salata. Ciascuno di questi infusi veniva posto nel palloncino in quantità tale da occuparne circa $^1/_{10}$ del volume. Si teneva rigoroso conto del rapporto fra la sostanza organica e l'acqua distillata.

(1) *Die Einwirkung verschiedener Temperaturen und des Eintrocknes auf die Entwikelung von Bacterium termo.* Beit zur Biol. der Pflanzen, Drittes Heft, 1875.

(2) Beit. zur Biol. der Pflanzen. Band II, 1877 (Beiträge zur Biologie der Bacillen).

(3) *Studies on Biogenesis.* Phisiol. Trans. of the Society of London, vol. 164, II, p. 477, 1874.

(4) Tyndall, *Les microbes,* 1882.

Le temperature di scaldamento dei palloncini furono di 100°, 105°, 107°, 108°, 109°, 110°, 111°, 112°, 113°, 114°, 115°, 116°, 117°, 118°, 120°, 121°, 125°, 130°, 150°. La temperatura di 100°, veniva raggiunta coll'acqua bollente o coll'apparecchio di Regnault per la dilatazione dei gas. Le temperature superiori ai 100° furono conseguite o colla pentola di Papin o collo scaldamento nell'olio d'olive.

La durata della temperatura di scaldamento fu di 5', 10', 15', 20', 25', 40', 60', 65'.

La temperatura dell'ambiente nel quale si lasciavano i palloncini dopo lo scaldamento variò gradatamente da 11° a 50°, e si esaminavano dopo un tempo più o meno lungo, variabile da 22 ore a 30 giorni.

21. I risultati di queste esperienze furono ultimamente riassunti in una pregevolissima Nota comparativa del prof. Maggi (1).

Le condizioni favorevoli allo sviluppo dei microbi, nelle infusioni organiche, scaldate in palloncini chiusi da 100° a 150° C., sono:

1° che l'infusione organica sia fatta con sostanza di elevata costituzione organica e di composizione chimica quaternaria;

2° che l'infusione sia densa;

3° che il volume d'aria contenuto nel palloncino sia relativamente grande, cioè all'incirca dieci volte quello dell'infuso;

4° che lo scaldamento non sia superiore all'alta temperatura limite dell'infusione;

5° che la durata dello scaldamento sia minore per le infusioni diluite;

6° che la temperatura dell'ambiente in cui si conserva il palloncino dopo lo scaldamento sia non minore di un quarto o di un terzo del numero dei gradi della temperatura dello scaldamento stesso;

7° che la durata della temperatura ambiente sia maggiore per le infusioni diluite;

8° che le condizioni termiche non mutino lo stato fisico-chimico dell'infusione organica;

9° che la quantità di liquido menstruo per l'infusione organica non induca, sotto l'influenza delle condizioni termiche, nè trasformazione, nè disposizione della sostanza organica.

Trattando dell'azione del calore sui microorganismi ci si presenterebbero le questioni delle cosidette sterilizzazioni, tanto usate specialmente nella bacteriologia patologica, e di cui la sterilizzazione discontinua è la più accreditata e generalmente usata. È noto che il grado di temperatura che uccide i microbi varia assai secondo che si tratta della forma vegetativa degli stessi, oppure dei loro organi di riproduzione (spore), i quali sono sempre molto più resistenti; è pure noto che il *calore umido* è assai più attivo dell'*asciutto*, per cui di quest'ultimo è necessario un grado di temperatura molto maggiore per distruggere i microbi.

Su questi fatti è fondata la sterilizzazione discontinua la quale consiste nel lasciar per due ore a 100° in bagno maria, il substrato nutritivo dei bacteri, ripetendo l'operazione da 5 ad 8 volte con intervalli di 24 ore; in tal modo verrebbero uccisi i bacteri esistenti nella materia organica e quelli che successivamente potrebbero derivare dalle spore non uccise dalla temperatura di 100°.

(1) *Sull'influenza d'alte temperature nello sviluppo dei microbi.* Boll. scient. n. 3, 4, 1884.

Noi non ci siamo occupati di sterilizzazioni per due principali ragioni: I. A noi non importava, in una ricerca di biologia generale, di studiare questa o quella forma bacterica, seminandola nella sostanza di coltura; volevamo invece studiare le mutazioni che una data forma, comunque comparsa nelle nostre soluzioni, subisce col mutare delle condizioni fisiche delle medesime. II. La spiegazione, comunemente data, della sterilizzazione discontinua è ipotetica, perchè l'essere sterile una sostanza organica complessa sottoposta replicatamente ad una temperatura di 100°, potrebbe anche dipendere dal fatto che essa sostanza subisca, per quell'alta temperatura, tali disgregazioni in sistemi atomici più semplici da servire bensì di nutrimento alle forme seminate, ma da non potersi organizzare.

È una obbiezione vecchia, ma non si può eliminarla.

B. *Influenza delle temperature inferiori allo zero termometrico.*

22. Già Valentin e Purkinje avevano notato che l'epitelio vibratile della mucosa nasale e boccale della rana riprende la sua vivace vibralità quando l'animale, che fu congelato, sia sottoposto al disgelo.

Prevost (1) dimostrò che gli spermatozoi della rana riacquistano la loro mobilità quando l'animale sia sottoposto al medesimo trattamento sopraccennato.

23. Kühne (2) trovò che le amebe ed i globuli bianchi del sangue sospendono i loro movimenti nell'acqua ghiacciata: ma li ripigliano se questa viene riscaldata alquanto.

24. Roth (3), studiando l'epitelio vibratile, dedusse che si può portarlo ad una temperatura di — 4° C. senza che perda la sua caratteristica proprietà.

25. Engelmann (4) venne alle medesime conclusioni di Roth.

26. Schenk nelle sue ricerche sull'influenza dei bassi gradi di temperatura sopra alcuni organismi elementari (5) sperimentò sul sangue, sulle uova e sullo sperma di varî animali.

Portando il sangue dei tritoni a — 3°, — 5°, e — 7° C., poi scaldandolo lentamente col tavolino di Schultze, osservò che i globuli bianchi riprendono i loro moti amiboidi. Ciò per altro solamente quando il raffreddamento dura un tempo relativamente breve: protraendolo, ad esempio per 8 ore, i moti amiboidi cessano. Pel sangue di coniglio, basta una temperatura di 3° C. che duri 10-15 minuti per estinguere i movimenti dei leucociti.

Le uova fecondate di rana, tenute per breve tempo a — 3° C., si sviluppano ancora. Se però la temperatura discende a — 7° lo sviluppo si arresta. Le uova di *Bufo cinereus*

(1) Comp. Rend. Novembre 1840.

(2) *Das Protoplasma.* Leipzig, 1864.

(3) *Ueber einige Beziehungen des Flimmerepitels zum contractilen Protoplasma.* Virchow's Archiw, B. 37, 1866.

(4) *Ueber Flimmelbewegung.* Leipzig, 1868.

(5) Sitzungsberichte der kaiserlichen Akad. der Wissenschaften in Wien. 1869. Mathem. naturvissenschaftliche Classe, B. 60, Zweite Abtheilung.

non fecondate, tolte dal corpo della madre, furono assoggettate per un'ora ad una temperatura di — 4° C. ed in seguito fecondate con sperma spremuto da un maschio. Poste nella incubatrice si svilupparono, sebbene più lentamente di altre che non furono raffreddate e sottoposte, nel resto, al medesimo trattamento. Lo sperma invece del medesimo animale, raffreddato a — 3° e — 7° C., perde la proprietà fecondante; riscaldato poi anche fino a — 40° C. riacquista i movimenti, ma non la proprietà fecondante.

27. Horwath [1] trovò che i bacteri coltivati sopra sostanze solide non muoiono portandoli gradatamente, con miscele frigorifere, fino a — 18° C.

28. Pasteur [2] sottopose il bacillo del carbonchio e quello del colera dei polli ad una temperatura di — 40° C. senza che ne risentisse danni considerevoli.

29. Pictet ed E. Yung [3] assoggettarono varie speciè di microbi per 20 ore ad una temperatura di — 70° C. data dall'evaporizzazione dell'acido solforoso liquido. Surrogato questo dall'acido carbonico solido, la temperatura durò per altre 88 ore a — 70°, — 76° C. Successivamente, per 20 ore, praticando la rarefazione sulla neve carbonica, la temperatura stette a — 138°. Infine i tubi contenenti i microbi furono aperti ed abbandonati a se stessi perchè la temperatura si elevasse lentamente. Orbene, dopo un raffreddamento tanto intenso il *Bacillus anthracis* conservava completamente la sua virulenza, ed erano ancora integri e perfettamente viventi il *Bacillus subtilis*, il *Bacillus ulna*, il *Saccharomicès cerevisiae*, ed il *vaccino*.

30. Riandando i precedenti cenni storici è facile rilevare come principalmente nelle esperienze di Cantoni, Oehl, Balsamo Crivelli e Maggi venga data la dovuta importanza, nello sviluppo dei microorganismi, ad alcune fondamentali condizioni fisiche, agenti, non isolatamente, ma contemporaneamente.

I chiarissimi autori stabilirono in modo netto e preciso che le soluzioni e le infusioni organiche, per essere fertili, devono avere una considerevole densità. Abbiamo già veduto come Cantoni attribuiva i risultati negativi delle prove di Spallanzani, Cavalleri e di alcune di Pasteur alla troppo tenue densità delle soluzioni organiche impiegate. Dimostrarono la stretta relazione che esiste fra la fertilità delle infusioni e la differenza fra la temperatura di scaldamento e quella dell'ambiente: dimostrarono inoltre l'importanza dell'elevatezza della temperatura di scaldamento, della durata della medesima e di quella dell'ambiente.

Chiarirono il modo di agire del calore sulla sostanza organica delle infusioni. Quando predomina la sostanza organica sull'acqua si ha mutazione dello stato fisico-chimico di quella; quando predomina invece l'acqua sulla sostanza organica, questa si dissocia.

L'azione del calore si esercita però specialmente sull'acqua, di cui la tensione del vapore che non solo si solleva dal liquido, ma ne riempe gli spazî intermolecolari, da 115° a 120° è più che tripla di quella verificantesi fra 80° e 85°, e quasi doppia di quella che si manifesta fra 95° e 100°. Per un sì rapido crescere delle forze

(1) Beit. zur Biol. der Pflanzen. Zweites Heft, 1872 (*Untersuchungen über Bacterien*).
(2) Comp. Rend., vol. 89, p. 1015, 1879.
(3) *De l'action du froid sur les microbes*. Comp. Rend., vol. 98, p. 717, 1884.

tensive, dice il Cantoni, le particelle delle sostanze grasse e delle proteiche, nuotanti nell'acqua, si ridurranno più facilmente in particelle minori e giungeranno a quella tenuità di mole, per la successiva disgregazione, ed a quella sentita differenza di ritmo vibratorio, per cui può sorgere il moto browniano più spiegato, ed aversi pure quello stato di estremo disgregamento delle sostanze organiche chiamato da noi dissociazione, e che segna il limite di sviluppo dei microbi in ciascuna infusione organica.

I sullodati autori attribuirono molta importanza anche alla considerevole quantità d'aria, che nei palloncini è contenuta, a contatto della sostanza organica. Ma i panspermisti qui potrebbero obbiettare che il maggiore sviluppo dei microorganismi non è già dovuto al volume relativamente grande dell'aria, considerato dal punto di vista fisico-chimico, ma alla maggior quantità di germi, che in quell'aria si trovano e che non sono uccisi, perchè il calore sufficiente per distruggere le materie in sospensione in un liquido probabilmente non basta, quando i germi sono diluiti in un gas od in un vapore [1].

C. *Influenza dell'elettricità.*

31. Già sulla fine del secolo scorso il Beccaria [2] aveva dimostrato sperimentalmente che la scintilla elettrica non uccide gli infusorî.

32. M. Schultze [3], facendo agire le correnti continue sui peli della *Tradescantia,* osservò che nelle cellule pilifere, disponentisi sulla direzione della corrente, il movimento del protoplasma si arresta immediatamente, mentre in quelle, che si dispongono perpendicolarmente alla direzione della corrente, il movimento protoplasmatico si mantiene. Questi effetti si otterrebbero però solamente colle correnti elettriche molto forti; le deboli sarebbero inefficaci.

33. Yürgensen [4], sperimentando sui peli della *Vallisneria,* venne ai medesimi risultati di Schultze.

34. Secondo Brücke [5], il quale sperimentò sui peli dell' *Urtica urens,* il primo fatto che si osserva, appena chiuso il circuito, è la formazione di una più o meno grande quantità di fili, che fanno comunicare il corpo cellulare colla sostanza intercellulare; fatto questo non constatato dallo Schultze [6].

35. Schiel [7] eseguì pure una serie di ricerche intorno all'influenza delle correnti elettriche sulle soluzioni contenenti schizomiceti. I suoi risultati sono i seguenti: *a*) i funghi fermenti sono insensibili alle correnti anche forti; *b*) I bacteri di un'infusione

(1) Tyndall, *Les microbes,* 1882, p. 206.

(2) Spallanzani, *Opuscolo di fisica animale e vegetale.*

(3) Op. cit. p. 43, 44.

(4) Studien des physiol. Inst. zu Breslau, herausgegeben v. Heidenheim, Erstes Heft, pag. 99, 1861.

(5) *Das Veralten der sogenannten Protoplasmaströme in den Brennhaare von Urtica urens gegen die Schläge des Magnetelectromotor.* Sitzungsber. der Ak. der Wiss. zu Wien, 1862, B. 46, 5, 1.

(6) Op. cit. p. 45.

(7) *Electrotherapeutische Studien.* Deutsches Archiv für klinische Medizin, B. 15, pag. 190-194.

di tuorlo d'uovo, sottoposti ad una corrente energica, perdono dopo mezz'ora il movimento e non lo riprendono nemmeno dopo 24 ore dalla cessazione della corrente; *c*) i bacteri della putrefazione della carne sono indifferenti ad una forte corrente d'induzione, che duri solo 5 minuti; però una corrente indotta, mantenuta da 6 elementi Bunsen e che duri 10 ore, sospende ogni movimento delle cellule bacteriche; *d*) i bacteri coltivati nella soluzione di Pasteur hanno rallentato il movimento, ed anche sospeso, per una forte corrente d'induzione; rimangono invece quasi insensibili alla corrente continua; *e*) sottoponendo una miscela bacterica di carne e liquido Pasteur per 24 ore alla corrente di 2 Bunsen il movimento viene sospeso, e non si riprende nemmeno dopo 24 ore dalla cessazione della corrente.

Quanto allo sviluppo dei germi Schiel ammette che una debole corrente sia sufficiente per impedirlo.

36. Ma le esperienze finora più complete sull'azione dell'elettricità nello sviluppo dei microorganismi sono quelle di Cohn e Mendelsohn [1]. In un ordinario tubo di assaggio di 15 mm. di diametro ponevano 10 cc. di liquido nutritivo minerale seminato con una goccia di bacteri. Nel liquido erano immersi i due elettrodi, costituiti da due laminette di platino giungenti fino sul fondo del tubo, il quale veniva poi tenuto alla temperatura presso che costante di 30° C. insieme con un altro contenente un' identica soluzione non elettrizzata, che serviva di paragone. Adoperarono dapprima una corrente debole, data da un solo elemento Daniell. Dopo 24 ore entrambe le soluzioni erano torbide e formicolavano di bacteri. Sostituirono all'elemento Daniell un elemento Marié-Davy, ma il risultato fu quasi identico. Colla corrente di 2 elementi Marié-Davy la sterilizzazione è completa, quanto a bacteri, al polo positivo, incompleta al negativo. I bacteri sono immobili, ma non uccisi, perchè portati in una soluzione normale si moltiplicano rapidamente. S'intende che la durata dell'azione elettrica fu pure di 24 ore e la temperatura dell' ambiente 30° C. Adoperarono in seguito 5 elementi Marié-Davy per 24 ore, e, restando la temperatura quasi costante a 30 c., ottennero completa sterilizzazione ad ambo i poli con morte dei bacteri, perchè portati nella soluzione normale non si svilupparono più; inoltre, seminando altri bacteri nel liquido elettrizzato, vi perirono. Fecero poi agire sulla stessa soluzione minerale normale seminata di bacteri le correnti d'induzione, ma l'effetto fu nullo.

Dedussero quindi Cohn e Mendelsohn: 1° che le correnti continue possono arrestare lo sviluppo dei bacteri ed anche ucciderli, quando abbiano una considerevole intensità; 2° che le correnti d'induzione non hanno alcun potere sterilizzante sulle soluzioni bacteriche.

37. Dal punto di vista critico notiamo come della densità delle soluzioni elettrizzate non si sia tenuto calcolo da nessuno. L'intensità della corrente non fu rigorosamente misurata, sapendosi che non si può dedurla dal numero degli elementi impiegati. Anche la temperatura dell'ambiente, nel quale si eseguirono le esperienze, fu troppo trascurata, se si fa eccezione delle ricerche di Cohn e Mendelsohn.

(1) *Ueber Einwirkung des electrischen Stromes auf die Vermehrung von Bacterien.* Beit. zur Biologie d. Pflanzen, B. 3, Erstes Heft, 1879.

D. *Influenza della luce.*

38. Sono noti i lavori di Strasburger e di Engelmann sui movimenti, sugli scambî gasosi e sulle elaborazioni pigmentali che presentano gli organismi semplici nei raggi dello spettro.

39. Van Tieghem nello sviluppo del *Penicillium glaucum* e Zopf in quello della *Beggiatoa alba* dimostrarono pure la notevole influenza della luce su questi organismi.

40. Schroeter [1] sostenne che la luce non è necessaria per la vita degli schizomiceti cromogeni ammettendo però che l'elaborazione dei pigmenti sia più copiosa nella luce che nell'oscurità.

41. A. Downes e P. Blunt dimostrarono che i raggi solari esercitano un' azione ritardatrice sullo sviluppo dei bacteri della putrefazione e che i germi di questi bacteri sono distrutti in un liquido esposto al sole per un certo tempo [2].

42. Duclaux [3] ha cercato di determinare sperimentalmente quale sia l'influenza propizia del sole nella distruzione dei germi dei microbi. Studiò specialmente il *Tirothrix scaber* che vegeta bene nel latte e meglio nel brodo Liebig. Una gocciolina di una coltura di questo microbio, presa al momento della formazione delle spore, veniva posta sul fondo di un matraccio, chiuso poi con un tappo di cotone. Evaporata la goccia, il matraccio veniva esposto al sole d'estate per 15 giorni ed altri matracci, egualmente preparati, per uno e due mesi. Orbene! mentre le spore conservate a secco nella stufa, ad una temperatura eguale alla massima ottenuta al sole, rimangono attive anche dopo tre anni, quelle esposte al sole sono uccise quasi completamente dopo due mesi d'azione. Le spore ottenute colla coltura nel brodo Liebig sono uccise da un'insolazione di solo 15 giorni in un matraccio su tre preparati, da un' insolazione di un mese in due matracci su tre, da un' insolazione di due mesi in tre matracci su tre.

43. Le esperienze di Arloing [4] intorno all'azione della luce artificiale sul *Bacillus anthracis* furono eseguite in una camera oscura colla luce fornita da forti lampade a gas a doppia corrente. Le colture del bacillo in brodo di pollo scolorito venivano collocate in una stufa di Gay-Lussac, opportunamente modificata, ed assoggettate all'oscurità, alla luce bianca, alle luci colorate, in serie distinte, per modo da poter istituire gli opportuni raffronti. Arloing concluse che l'assenza o la presenza della luce artificiale bianca o colorata non determina una differenza profonda nella vegetazione del *Bacillus anthracis;* però la sporificazione è più rapida ed abbondante nell'oscurità e nei raggi più rifrangibili dello spettro.

44. Duclaux [5] ha determinato anche l'influenza della luce solare sulla vitalità di

[1] *Ueber einige durch Bacterien gebildete Pigmente.* Beit. z. Biol. der Pflanzen, Zweites Heft, 1872.

[2] Proceedings of the royal Society, 1877.

[3] *Influence de la lumière du soleil sur la vitalité des germes des microbes.* Comp. Rend. 1° sem., p. 119, 1885.

[4] *Influence de la lumière sur la végétation et les propriétés pathogènes* du bacillus anthracis, Comp. Rend. 1° sem., pag. 450, 1885.

[5] *Influence de la lumière du soleil sur la vitalité des micrococcus,* C. R. 2° sem., p. 395, 1885.

alcuni micrococchi tolti da prodotti patologici (foruncolo, follicolite agminata, ecc. ecc.). Le colture in brodo neutro di vitello sarebbero uccise da un'insolazione di 15 giorni di luglio. Se sono a secco bastano ad ucciderli tre giorni, due giorni, e spesso anche poche ore d'insolazione.

Sulla vegetazione, la vegetabilità e la virulenza del *Bacillus anthracis*, esposto all'azione della luce solare, Arloing eseguì due nuove serie di esperienze. I raggi del sole venivano mandati da un eliostato sui matracci contenenti le colture: al tramonto del sole i matracci erano posti in una ghiacciaja, per esporli nuovamente al levare dell'astro. L'autore dedusse da queste osservazioni: che la vegetazione del microbio del carbonchio è rallentata, ma non impedita, dalle radiazioni solari; che la vegetabilità venne gradatamente scemando fino a cessare per l'azione di 25-30 ore del sole di luglio ad una temperatura di 30°-36° C.: che dopo 30 ore di insolazione l'attenuazione è completa, e le colture sono diventate vacciniche (1).

45. A proposito delle accennate ricerche sull'influenza della luce, e specialmente della solare, nello sviluppo dei microorganismi sembra a noi che i risultati non sieno del tutto attendibili, perchè non si sono distinte ed isolate in modo rigoroso le vibrazioni luminose dalle termiche. Due matracci contenenti la medesima coltura vengono posti, l'uno sotto le radiazioni termo-luminose del sole ad una temperatura di 30°-36 C., l'altra nella stufa, al bujo ed alla medesima temperatura. La differenza nello stato delle due colture, dopo un dato tempo, rappresenterà l'azione delle radiazioni luminose, perchè la temperatura era identica. Su questo ragionamento, solo apparentemente esatto, sono fondate le esperienze e le conclusioni precedentemente esposte.

E. *Influenza dei diversi ambienti gasosi.*

46. È nota a tutti la distinzione degli schizomiceti in aerobi ed in anaerobi a seconda che vivono in presenza dell'aria o fuori del contatto di questa. Degli elementi dell'aria è incomparabilmente più importante, dal punto di vista biologico, l'ossigeno. Tyndall ha dimostrato che le soluzioni organiche, a cui si è sottratto l'ossigeno coll'ebollizione o colla rarefazione, sono assai più facilmente sterilizzate col calore. Ha dimostrato inoltre che i microorganismi, in presenza di un eccesso di ossigeno, devono perire (2).

Pasteur ammette che i bacteri delle fermentazioni sieno indeboliti, nelle loro attitudini, dalla presenza di ossigeno libero.

Però Schützenberger prima, poi Naegeli (1879), Nenky (1880) ed Hoppe-Seyler (1881) dimostrarono che l'asserto di Pasteur è inesatto. Assodarono però anche il

(1) Altre ricerche di Arloing (*Les spores du bacillus anthracis sont réellement tuées par la lumière solaire.* Comp. Rend. de l'Académie des Sciences, 1887. 1° sem., p. 701) dimostrarono che le spore del bacillus anthracis dopo 4 a 5 ore di insolazione muoiono anche se la temperatura, come nelle esperienze fatte in febbraio, non supera gli 11° C. Arloing ribatte quindi l'asserzione di Nocard (*Recueil de Médecine vétérinaire,* 1885), di Duclaux (*Microbes et maladies*) e di Strauss (Société de Biologie, 1886) che l'insolazione uccide i giovani micelii e non le spore.

(2) Tyndall, *Les microbes,* p. 237, 250, 1882.

fatto che parecchie specie di schizomiceti vivono e si sviluppano senza ossigeno. D'altra parte fin dal 1877 Jeanneret, in un lavoro fatto nel laboratorio di Nenky provò in modo assoluto che la presenza dell'ossigeno libero rende molto più attivo il processo di putrefazione. Provò inoltre che l'acido carbonico e l'azoto arrestano, almeno per qualche tempo, questo processo [1].

Brieger ne'suoi recenti lavori sui prodotti aromatici della putrefazione dell'albumina confermò le osservazioni di Jeanneret [2].

F. *Influenza della pressione.*

47. Non abbiamo potuto eseguire ricerche sull'influenza della pressione, essendoci mancati i mezzi; epperò ci dispensiamo dal ricordare i risultati ottenuti per tale riguardo da illustri sperimentatori, quali Paul Bert, Certes, Regnard ecc. ecc.

III.

Ricerche sperimentali.

A. *Materiale impiegato e precauzioni generiche.*

1. Le sostanze da noi adoperate, per preparare le soluzioni da sottoporre alle diverse influenze fisiche, furono: il comune estratto di carne del Liebig, la gelatina purissima, il peptone ed il tuorlo d'uovo.

2. Queste sostanze non le abbiamo mai mescolate. Di ciascuna di esse abbiamo preparato una serie di soluzioni di diversa densità ed ogni serie poi serviva per una data ricerca.

Le soluzioni erano contenute in tubi d'assaggio della lunghezza di 15 cm. e del diametro di 2 cm.

La quantità di soluzione posta in ciascun tubo era di 25 cc.

L'acqua impiegata veniva distillata sul permanganato di potassa e tenuta in bottiglie perfettamente pulite ed ermeticamente chiuse.

I tubi d'assaggio, dapprima lavati con acido solforico, venivano ripetutamente sciacquati coll'acqua distillata, e quindi asciugati ed arroventati alla lampada. Dopo averli poi risciacquati di bel nuovo con acqua distillata, eravi versata la soluzione, che veniva fatta bollire a lungo mentre il tubo era tappato con cotone purissimo.

(1) Liborius (Zeitschr. f. Hygiene, Vol. 1°) ha resa più completa la conoscenza relativa al bisogno che gli organismi inferiori hanno di ossigeno, dimostrando specialmente che i funghi anaerobii possono esistere e svilupparsi senza produrre fermentazioni. Queste ricerche permettono di riunire gli schizomiceti in tre gruppi: 1° *anaerobii obbligati* che non si sviluppano in presenza di ossigeno; 2° *anaerobii facoltativi* il cui sviluppo è ritardato, ma non impedito dalla presenza di ossigeno; 3° *anaerobii obbligati* che si sviluppano solo in contatto coll'ossigeno.

(2) *Bacterien, Ptomaïnen und Krankheiten,* Berlin 1877.

B. *Densità delle soluzioni.*

3. Non abbiamo creduto opportuno di determinare il peso specifico delle soluzioni impiegate, poichè, precipitando nel corso delle esperienze parte della sostanza organica, la densità veniva continuamente variando. Abbiamo quindi preferito di riferirne il rapporto ponderale fra l'acqua distillata e la materia organica adoperata.

In sette provette, cioè, distinte coi numeri progressivi dall' 1 al 7, ponevamo, sovra 25 cc. di acqua distillata, rispettivamente grammi 0,125, 0,25, 0,50, 1,00, 2,50, 5,00, e 12,00 di sostanza organica. Sicchè la ricchezza procentica delle soluzioni, contenute ordinatamente nella 1ª, 2ª ......, 7ª provetta, era rispettivamente di $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4, 10, 20, 48. Però, convinti poi, dalle prime serie di esperienze, che le soluzioni n. 6 e 7, erano eccessivamente ricche di sostanza organica, le abbiamo abbandonate.

C. *Ricerche sull'influenza della temperatura.*

a) Metodi impiegati per conseguire le varie temperature e mantenerle costanti.

4. Per ottenere una data temperatura costante per molto tempo, ebbimo dapprima ricorso a quegli apparecchi, destinati alle colture dei microorganismi, che con nome poco veritiero, chiamansi *termostati*. Ma per le temperature alquanto elevate li abbiamo abbandonati, imperocchè la variazione di temperatura in tali strumenti eccede sempre di gran tratto i limiti imposti ad una buona ricerca. Cosicchè per le temperature comprese fra 0° e 50° ci servimmo di un grande vaso calorimetrico di rame, della capacità di circa 12 litri (altezza 40 cm., diametro 20 cm.) e ben terso all'esterno. Esso fu ripieno di acqua, sulla quale venne versato uno strato di olio di ulive per l'altezza di circa un centimetro, e fu posto in una grande sala, dove la temperatura non variava di molto lungo il dì. L'irradiazione del vaso calorimetrico era così ridotta minima e presso che costante; di guisa che con una fiammella a gas, regolata due o tre volte in un'intera giornata (per compensare le variazioni di temperatura della sala), si potè mantenere nel bagno una voluta temperatura, compresa fra i detti limiti, la quale ben di rado assai giunse a variare di un grado.

Le temperature poi erano date da alcuni termometri a mercurio, divisi in quinti di grado, di cui ci assicurammo, mediante opportuni confronti con un termometro campione, che l'errore non eccedesse un decimo di grado, da che un'approssimazione maggiore sarebbe stata inutile.

5. Per le temperature comprese fra 50° e 100°, usammo di un apparecchio consimile a quello adoperato da Wiedemann, come apparecchio riscaldante, nelle ricerche calorimetriche (fig. 1).

È un vaso cilindrico di rame a triplice parete, di cui l'altezza è circa 25 cm. ed il diametro esterno di 18 cm.

Nello spazio interno *a* (diam. 8 cm.) sono riposte le provette colle soluzioni organiche, e vengono appoggiate sovra un disco di sughero *e*. Lo spazio *a* è chiuso da un coperchio *d*, pure di rame, che entra per breve tratto, a mo' di tubo da canocchiale,

in *a*. In esso è impegnato un cilindro di sughero, che si protende all'infuori del coperchio stesso e chiude per bene lo spazio *a*. Il coperchio poi porta un foro nel quale è impegnato, con un tappo di sughero, un termometro *t*.

Lo spazio *bb*, largo 6 cm., è ripieno d'acqua, che vi è versata dal tubo *f* e può essere spillata dal rubinetto *g*. Finalmente nello spazio *cc*, largo 4 cm., vien fatto circolare il vapore di un liquido bollente a quella temperatura, cui si desidera portare e mantenere le soluzioni organiche. Il vapore è generato nella caldaja di rame *h*, e mediante il tubo *l*, è condotto nello spazio *cc*; donde, dopo avervi circolato, passa a condensarsi nel refrigerante *m*, intorno al quale è mantenuta una corrente d'acqua fredda, che entra nel manicotto *n* pel tubo *p* ed esce poi per *q*. Il vapore liquefatto ritorna quindi lungo il tubo *r* nella caldaja, la quale è munita di un livello a sifone *S* per rilevare a quale altezza vi si trova il liquido; imperocchè, dovendo l'apparecchio funzionare per molti giorni di seguito ed essendo inevitabile qualche piccola perdita di vapore, è prudente cosa il poter constatare di giorno in giorno il livello del liquido nella caldaja.

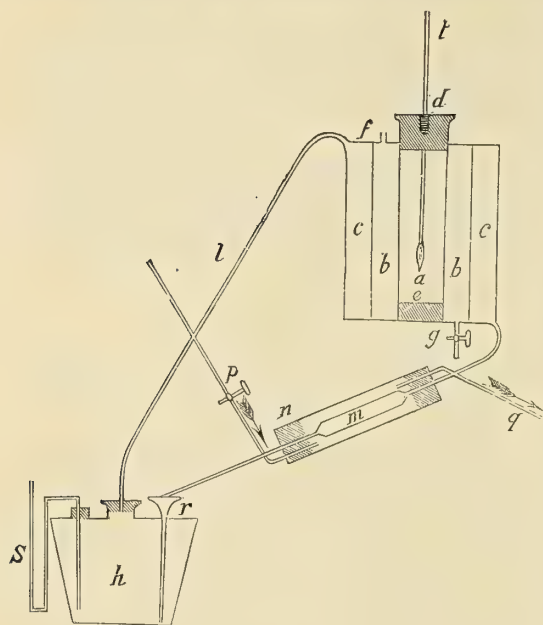



Fig. 1.

Così, una volta riscaldata alla temperatura d'ebollizione del liquido la massa d'acqua riposta in *bb*, essa è mantenuta continuamente a quella temperatura del vapore circolante in *cc*, e per tal via si può eziandio mantenere nello spazio *a* una temperatura perfettamente costante, la quale, anche per quindici dì, non varii che di qualche decimo di grado.

6. Per le temperature superiori a 100°, non essendosi prolungato il riscaldamento per una data temperatura al di là di tre o quattro ore, si seguirono due vie. Dapprima le soluzioni organiche vennero riscaldate nella pentola di Papin; ma questa richiede una continua sorveglianza, se non si vuole che la temperatura varii più di un grado. Per questo riscaldammo in seguito le soluzioni in tubi capillari di vetro, suggellati alla fiamma, che erano della lunghezza di 25 cm., del diametro interno di 3 mm. e dello spessore pure di 3 mm. e contenevano le soluzioni medesime per l'altezza di circa 6 cm. Essi stavano sospesi in una cestella metallica *c* nell'ebollitore *e* dell'apparecchio di Meyer, destinato alla determinazione delle densità dei vapori (fig. 2). Un po' di glicerina acquosa, convenientemente preparata, veniva mantenuta in ebollizione da una lampada a gas; e perchè non variasse il titolo della soluzione glicerica, l'ebollitore era coperto con una lastra *v* di vetro.

Con questo metodo fu assai più facile e comodo di mantenere costante ad una temperatura elevata le soluzioni organiche in esame, senza che esse entrassero in ebollizione.

7. Per le basse temperature abbiamo ricorso al ghiaccio fondente ed ai comuni miscugli frigoriferi. Quando però si voleva una temperatura costante e per lungo tempo, il miscuglio frigorifero era soltanto impiegato per raffreddare un miscuglio salino crio-idrato, in cui erano tenute immerse le provette contenenti le soluzioni organiche. Se il raffreddamento non doveva durare a lungo, le provette erano direttamente immerse nei miscugli frigoriferi. Una volta sola, in tutte le esperienze stabilite a basse temperature, le soluzioni organiche vennero raffreddate mediante l'evaporizzazione dell'acido solforoso liquido; da che, come è detto più innanzi, dallo zero termometrico all'ingiù non si presentò mai alcun sviluppo di forme organiche nelle soluzioni.

b) Soluzioni di estratto di Liebig.

Esame delle soluzioni mantenute a 0°.

8. Le soluzioni n. 1, 2, 3, 4, 5 furono mantenute per 10 giorni alla temperatura del ghiaccio fondente; ed esaminate di poi si osservò che: sono affatto limpide; hanno un leggero odore di brodo; non presentano alcuna forma di microorganismi.

9. Le soluzioni vennero di poi rimesse nel ghiaccio fondente per altri 8 giorni e diedero ancora lo stesso reperto.

Esame delle soluzioni mantenute a 5°.

10. Le soluzioni vennero osservate dopo averle mantenute alla temperatura di 5° per 11 giorni. Si notò:

Soluzione n. 1. La superficie del liquido è coperta da una sottilissima pellicola, bianchiccia e semitrasparente. Lungo la colonna liquida si diffonde una leggera nubecola a spirale. Un deposito biancastro, soffice, è depositato sul fondo. Il microscopio rivela uno sviluppo discreto della varietà più corta del *Bacillus subtilis* Cohn. È rarissima la varietà lunga ed incurvata. Il deposito è costituito per la maggior parte dagli stessi bacilli e da granuli organici amorfi.

Soluzione n. 2. Presenta il medesimo aspetto della precedente. Il *Bacillus subtilis* vi si trova in forme più lunghe, ma è meno copioso.

Soluzioni n. 3, 4 e 5. Manca la pellicola superficiale; ma esiste la nubecola a spirale ed il deposito, costituiti da granuli amorfi di grandezza variabile. Non vi sono microorganismi.

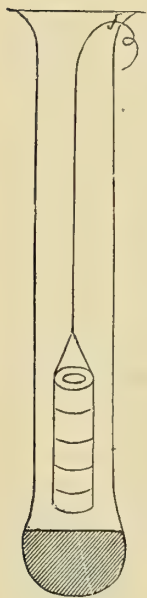
Fig. 2.

Esame delle soluzioni mantenute a 10°.

11. Le soluzioni, mantenute alla temperatura di 10° ed esaminate a diversi intervalli di tempo, diedero i seguenti risultati.

Dopo due giorni:

Soluzioni n. 5, 6, 7. Sono affatto limpide, e non offrono al microscopio che le normali granulazioni del brodo Liebig.

Soluzioni n. 1, 2, 3 e 4. Sono limpide e presentano numerosissime granulazioni. Alcune sono irregolari, ma la maggior parte sono regolari, rotonde, del diametro

dei comuni micrococchi. Vibrano di moto browniano. Sono libere, oppure riunite a due a due od anche in catenelle. Si presenta qualche raro esemplare del *Bacillus subtilis*, il quale è immobile, ma aumenta gradatamente in numero dalla soluzione n. 1 alla soluzione n. 4.

12. Dopo quattro giorni:

Soluzioni n. 1 e 2. Sono limpide, senza pellicola superficiale e senza deposito. Le granulazioni sferoidiche, divenute più abbondanti, hanno assunto i caratteri dei veri micrococchi, e sono in preda a vivace moto browniano. Sono frequenti i diplo e gli streptococchi. Il *Bacillus subtilis* (varietà corta) è abbastanza raro, come pure il *Bacterium termo* ed un bacterio distintamente virgolare.

Soluzione n. 3. Vi è una quantità considerevole di micrococchi anche allo stadio di diplo e streptococchi. Sono rarissime le forme bacteriche e mancano le bacillari.

Soluzione n. 4. Vi abbondano i micrococchi; mancano affatto i bacteri ed i bacilli.

Soluzioni n. 5, 6, 7. V'hanno unicamente delle granulazioni amorfe. Nessuna forma viva.

13. Dopo sei giorni:

Le soluzioni conservano i caratteri fisici e microscopici che presentavano nelle osservazioni dopo quattro giorni. Devesi però notare che nelle soluzioni n. 1, 2, 3 e 4 sono aumentate considerevolmente le forme bacillari (*Bacillus subtilis*) e bacteriche (*Bacterium termo*). Se ne trovano alcune anche nelle soluzioni n. 5, 6 e 7.

14. Dopo nove giorni:

Le soluzioni dell'ultima osservazione offrono leggeri mutamenti, riguardo a sviluppo di schizomiceti. V'hanno alcune cellule di saccharomiceti nelle soluzioni n. 6 e 7.

Esame delle soluzioni mantenute a 16°.

15. Le soluzioni vennero mantenute per 13 giorni consecutivi alla temperatura di 16° e furono osservate due volte. La prima volta, dopo 6 giorni, presentarono i seguenti caratteri:

Soluzione n. 1. La colonna liquida è opalescente. Vi è un leggero deposito bianco e granuloso sul fondo, ed una sottile pellicola, semitrasparente, viscida alla superficie. Non si avverte alcun odore; havvi invece reazione acida. Il *Bacillus subtilis* è molto copioso nella sua forma lunga e non mancano le forme ad ansa.

Soluzione n. 2. La soluzione è più torbida della precedente ed è coperta da una pellicola più grossa è più viscida, opaca e biancastra. Non presenta odori speciali ed ha reazione acida. Vi è abbondante la forma corta del *Bacillus subtilis* ed in specie quella del *Bacterium termo*.

Soluzione n. 3. La soluzione è limpida ed acida. Vi è qualche raro bacillo mobilissimo della varietà corta del *Bacillus subtilis*.

Soluzioni n. 4 e 5. Le soluzioni sono limpide ed acide. Non contengono alcun microorganismo.

16. La seconda volta, dopo 13 giorni, si osservò:

Soluzione n. 1. La soluzione è completamente torbida, opalescente. Vi è un deposito biancastro e granuloso sul fondo, ma nessuna pellicola alla superficie. Manda odore di sostanza rancida ed ha reazione acida. Vi si riscontra in quantità discreta

il *Bacillus subtilis* (varietà lunga, senza spore), abbondantissimo il *Bacterium termo* e raro, isolato e grosso, un micrococco.

Soluzione n. 2. La soluzione ha la superficie coperta da uno strato giallo-aranciato, grosso e denso, che precipita al fondo agitando il liquido. È torbida la soluzione, con deposito bianco giallognolo e pesante sul fondo. L'odore è di sostanza rancida ed havvi reazione acida. Vi è abbondantissimo il *Micrococcus aurantiacus* ed il *Bacterium termo*.

Soluzione n. 3. La soluzione è coperta da uno strato giallo-aranciato più grosso e denso del precedente. Il deposito sul fondo è altresì più copioso. Sotto ogni altro riguardo la soluzione dà gli stessi risultati della precedente n. 2.

Soluzione n. 4. La soluzione è torbida; coperta da uno strato bianchiccio e viscido, non molto grosso. Ha odore di materia rancida e presenta reazione acida. Vi sono qui pure un micrococco ed il *Bacterium termo*, in grande copia.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida; con leggero strato superficiale ed un deposito bianchiccio sul fondo. V' abbonda un micrococco, sì libero che associato in diplo e streptococchi.

In quest' ultime tre soluzioni, n. 3, 4, 5, si osservarono altresì cellule di saccharomiceti.

Altro esame di soluzioni mantenute a 16°.

17. Le soluzioni, di cui fu riferito l' esame ai n. 8 e 9, dopo di essere state mantenute per 18 giorni a 0°, furono portate alla temperatura di 16° cui furono mantenute per 16 giorni consecutivi. Esaminate di poi, presentarono i seguenti fatti:

Soluzione n. 1. La soluzione è opalina; coperta da una pellicola biancastra e cosparsa di goccioline giallo-chiare alla superficie; sul fondo vi è un leggero deposito giallognolo, da cui diffondesi verso l'alto una nubecola semitrasparente. L'odore è di sostanza rancida, e la reazione è acida. Le goccioline gialle sono formate dal *Micrococcus aurantiacus*, che vi si trova nelle diverse condizioni di micrococco libero, di diplococco, di streptococco e di stafilococco. La pellicola biancastra è formata dal *Bacterium termo* in forme diverse.

Soluzione n. 2. La soluzione è opalescente; coperta da una pellicola bianco-giallastra discontinua. Vi è deposito giallastro sul fondo, e si avverte un odore di sostanza rancida. La reazione è acida. Il *Micrococcus aurantiacus*, nei varî stadî accennati, è commisto col *Bacterium termo*.

Soluzione n. 3. La soluzione è torbida, biancastra; coperta da una pellicola superficiale grossa, a fondo biancastro e cosparsa di goccioline gialle. Vi è deposito copioso sul fondo, da cui diffondesi un' ampia nube irregolare e semitrasparente. L' odore è spiccatamente di sostanza rancida, e la reazione è acida. Le forme organiche sono le stesse delle soluzioni n. 1 e 2, nonchè qualche bacillo (*Bacillus subtilis*) isolato ed in catenelle.

Soluzione n. 4. La soluzione è torbida; la pellicola superficiale è grossissima, bianca, resistente ed elastica, sì che potè essere sollevata di un pezzo colla pinza; il deposito sul fondo è copioso; l'odore ricorda quello dell' infuso di ipecaquana. Il grosso strato superficiale è costituito da un fitto intreccio di micelii, con numerosissime spore (*penicillium*).

Soluzione n. 5. La soluzione offre gli stessi caratteri della precedente (n. 4). Il micoderma è più grosso e più bruno; del resto il reperto è lo stesso del precedente.

Esame delle soluzioni mantenute a 27°.

18. Le soluzioni furono mantenute alla temperatura di 27° per 4 giorni e furono osservate due volte. Si notarono le cose seguenti:

Dopo due giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpida; non ha pellicola superficiale, nè deposito. Presenta un odore normale ed una reazione acida. Vi si trova il *Bacillus subtilis* abbastanza copioso, con prevalenza della varietà corta.

Soluzione n. 2. Nella soluzione sono diffuse piccole masse giallognole. V'ha un deposito leggero sul fondo ed uno strato superficiale abbastanza grosso e polverulento. L'odore accenna a divenir cattivo, e la reazione è acida. Vi è una straordinaria quantità di bacilli corti, riuniti in lunghissime e tortuose catenelle. Le catenelle sono assai vicine fra loro e disposte parallelamente, così da formare delle bendelle sinuose (1).

Soluzione n. 3. La soluzione è opalescente. Vi è sul fondo depositata una pellicola leggera che si solleva alla più piccola agitazione della soluzione. Lo strato alla superficie è omogeneo, iridescente, con fondo biancastro: esso è molto resistente, ma più sottile del precedente. L'odore che si avverte, tende al putrido, e la reazione è acida. Il *Bacillus subtilis*, nella sua varietà media, in catene lunghe e tortuose, è la forma organica che esclusivamente si presenta.

Soluzione n. 4. La soluzione è limpida; coperta da uno strato grosso, rugoso, bianco. Ha odore putrido ed ha reazione acida. Vi si trova una quantità immensa di piccoli bacilli (*Bacillus subtilis*) isolati ed in catenelle. Vi sono cocchi di piccola e media grandezza (micro e mesococchi) e copioso è pure il *Bacterium termo* in diverse forme, tra le quali, una isolata colle colture assomiglia al *bacillus fluorescens liquefaciens*.

Soluzione n. 5. La soluzione presenta lo stesso aspetto della precedente (n. 4): però lo strato superficiale è più grosso ed aggrinzato, resistente e vischioso. Vi si riscontra una glia reticolata fra le maglie della quale abbonda il *Bacterium termo* ed il *Bacillus subtilis* (varietà piccola).

19. Dopo 4 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione presenta un micoderma biancastro, anulare, rasente al vetro della provetta. Essa è leggermente opalescente. Vi è poco deposito sul fondo. L'odore accenna a divenir cattivo, e la reazione è acida. Il *Bacillus subtilis* abbonda, prevalendo la varietà lunga. Sono pure numerosi i filamenti di *Leptothrix*.

Soluzione n. 2. La soluzione è torbidiccia, con uno strato superficiale bianco, grasso, squamoso, il quale per leggera agitazione si rompe e precipita al fondo. Sul fondo v'ha un deposito biancastro e granuloso. L'odore è cattivo. Del *Bacillus subtilis* vi è una quantità stragrande di spore, molte sono mobili e si colorano alquanto; sicchè non si possono differenziare da alcune forme del *Bacterium termo*. Il *Bacillus subtilis* è completamente scomparso.

(1) Abbiamo riferito queste forme al *Proteusmirabilis* anche per l'abbondanza delle forme di involuzione.

Soluzione n. 3. La soluzione è intensamente opalescente. Il micoderma è grosso; l'odore è cattivo; la reazione è acida. Sul fondo vi è un leggero deposito granuloso. Anche qui il *Bacillus subtilis* è affatto scomparso e si trovano in quantità enorme le sue spore.

Soluzioni n. 4 e 5. Le soluzioni sono torbide, con micoderma grosso e rugoso. Il deposito è abbondante; l'odore è putrido, e la reazione è acida. Di bacilli non se ne trovano e sono copiosissime le spore.

Esame delle soluzioni mantenute a 37°.

20. Le soluzioni furono mantenute per nove giorni di seguito alla temperatura di 37° ed in questo periodo di tempo vennero esaminate quattro volte. Dalle osservazioni risultarono i fatti seguenti:

Dopo 1 giorno:

Le soluzioni sono tutte limpide e senza deposito. Nelle soluzioni n. 2, 3 e 4 si avverte una leggera pellicola; di più esse presentano un odore diverso alquanto dal normale, senza che si possa dire disgustoso, ed una reazione acida.

Soluzione n. 1. Si incontrano micrococchi, tanto liberi che allo stadio di diplococchi e di streptococchi. Abbastanza copioso è il *Bacillus subtilis* in catenelle ed in forme lunghe, incurvate. Vi è pure un bacillo virgolare ed un altro incurvato a semicerchio (rari).

Soluzione n. 2. Vi abbonda il *Bacillus subtilis* nelle varietà corta, media e lunga. Le forme lunghe sono spesso sporificate; alcune alle estremità, altre nell'interno. Sonvi pochi cocchi liberi.

Soluzione n. 3. Trovasi copiosissimo il *Bacillus subtilis*, quasi esclusivamente nella forma corta, e qualche micrococco.

Soluzione n. 4. Si riscontra lo stesso reperto che nella soluzione n. 3.

Soluzione n. 5. Vi è quasi assenza di organismi; solo qualche bacillo corto e grosso.

Soluzione n. 6 e 7. Gli organismi mancano affatto, e vi si osserva solo delle grandi masse di materia granulosa, amorfa.

21. Dopo 3 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpida e coperta alla superficie da uno straterello bianchiccio.

L'odore è d'iniziata putrefazione, e la reazione è acida. Il *Bacillus subtilis* è quasi completamente sporificato e le sue spore sono in numero straordinario.

Soluzione n. 2. S'incontrano le stesse cose della soluzione precedente n. 1.

Soluzione n. 3. La soluzione è torbidiccia ed acida. Vi è leggero deposito sul fondo, e galleggia sulla superficie una massa fioccosa, biancastra, che discende al fondo per leggera agitazione della soluzione. L'odore è putrido. La forma organica predominante è il *Bacillus subtilis* (varietà media) in lunghe catenelle di 20 e più individui. Le spore sono piuttosto rare.

Soluzione n. 4. La soluzione è torbida, acida, di odore nauseabondo. La superficie è coperta da uno straterello bianco, dal centro del quale si eleva una massa rugosa

e rossa. Si riscontra una grandissima quantità di bacilli (*Bacillus subtilis*) in tutte la varietà.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, senza pellicola. Ha l' odore normale di brodo concentrato e contiene pochissimi bacilli corti.

Soluzioni n. 6 e 7. Le soluzioni sono limpide, acide e senza micoderma. Hanno odore di brodo concentrato e non contengono alcun microorganismo.

22. Dopo 7 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpida, acida, con un grosso strato bianco alla superficie, manda odore di putrefazione e contiene molte spore.

Soluzione n. 2. La soluzione è limpida, acida, con uno strato superficiale bianco, diviso in tante piccole porzioni circolari di 1 m. m. circa e formato da un denso intreccio di filamenti di *Leptothrix*. Il liquido manda odore putrido, e contiene numerosissimi bacilli (*Bacillus subtilis*) di tutte le grandezze.

Soluzione n. 3. La soluzione è torbidiccia, acida, con odore putrido e coperta da un denso micoderma, in cui abbonda il *Bacillus subtilis* in tutte le sue varietà e specialmente il *Leptothrix*.

Soluzione n. 4. La soluzione è torbida, acida e d'odore putrido. La massa rossa, rugosa, protendentesi sul micoderma, la quale venne descritta nel numero precedente (21, soluz. 4), si è come appassita e ricoperta di numerose goccioline di color giallo-canario, costituite dal *Micrococcus citreus*. Vi è copiosissimo il *Bacillus subtilis* sì isolato che riunito in lunghe catenelle di 20 a 30 articoli.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con distinto odore di brodo, e coperta da un velamento bianco, costituito dal *Bacillus subtilis* in tutte le sue varietà.

Soluzioni n. 6 e 7. Le soluzioni sono limpide, acide, d'odore intenso di brodo concentrato. Contengono molta materia granulosa, amorfa, ma nessun microorganismo.

23. Dopo 9 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione presenta lo stesso aspetto e le stesse forme organiche che al n. 22.

Soluzione n. 2. La soluzione è torbidiccia, acida, con odore di putrefazione e coperta da uno strato grosso, rugoso, cosparso qua e là di masse gialle. Vi abbondano il *Bacillus subtilis* ed il *Micrococcus aurantiacus*.

Soluzione n. 3. La soluzione presenta lo stesso aspetto che al n. 22, con uno strato superficiale più ricco di masse gialle. Il *Bacillus subtilis* ed il *Micrococcus aurantiacus* vi è copiosissimo.

Soluzione n. 4. La soluzione non ha mutato dall' osservazione al n. 22, se non per la scomparsa delle goccioline gialle e del corrispondente *Micrococcus aurantiacus*. Ha invece raggiunto un notevole sviluppo il *Leptothrix* ed è molto più copioso il *Bacillus subtilis*.

Soluzione n. 5. Il velamento bianco, notato al n. 22, si è fatto più grosso, specialmente alla periferia. Il *Bacillus subtilis* vi si trova in quantità stragrande, con prevalenza della varietà media e lunga.

Soluzioni n. 6 e 7. Le soluzioni non hanno mutato i caratteri dell' osservazione precedente al n. 22.

Esame delle soluzioni mantenute a 50°.

24. Le soluzioni furono mantenute alla temperatura di 50° per sette giorni e furono osservate tre volte, cioè dopo il 1°, il 2° ed il 7° dì. Due serie di esperienze, relative a questa temperatura, furono stabilite; l'una nel gennaio 1886 e l'altra nel gennaio 1887. Però essendo stati i risultati nell'uno e nell'altro caso molto analoghi, riferiremo quelli della seconda serie, includendovi le piccole differenze dai corrispondenti risultati della prima.

Dopo ventiquattro ore:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpida, acida, senza odore e coperta da un velamento bianchiccio. Al microscopio si osservano lunghi filamenti, omogenei, segmentati, immobili. Questi segmenti si possono sorprendere nell'atto che abbandonano il filamento totale per assumere la forma di lunghi bacilli simili al *Bacillus subtilis* (varietà lunga). Vi sono anche bacilli più corti, isolati o riuniti in catenelle.

Soluzione n. 2. La soluzione è limpida, acida, senza odore e coperta da uno straterello bianco, discontinuo. Si nota grande quantità di piccoli bacilli, mobilissimi, isolati e riuniti in catenelle.

Soluzione n. 3. La soluzione è torbida e contiene sospesi dei fiocchi di sostanza organica. È coperta da uno strato denso, rugoso e bianchissimo. Si osserva una quantità immensa di catenelle di bacilli sottili, uniformi (*Bacillus subtilis*).

Soluzione n. 4. La soluzione è torbidiccia, acida, con odore di sostanza rancida. È coperta di uno strato sottile e discontinuo come la soluzione n. 2. Si notano pochi bacilli sottili, isolati e riuniti a due a due (*Bacillus subtilis*).

Soluzioni n. 5, 6 e 7. Le soluzioni sono limpide, acide, con forte odore di brodo concentrato. Non vi si riscontra alcun organismo.

25. Dopo due giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpida, acida, con odore di acetone e coperta da uno straterello biancastro. Vi sono numerosissimi bacilli, appartenenti alla specie *Bacillus subtilis* (varietà media) e portanti una spora ad una ed anche ad entrambe le estremità. Molte spore sono anche isolate e sono così somiglianti a certe forme del *Bacterium termo* da non poterle differenziare se non colla colorazione.

Soluzione n. 2. La soluzione presenta le stesse cose della soluzione n. 1.

Soluzione n. 3. La soluzione è torbidiccia, acida, con odore aromatico (d'essenza di mandorle amare) e coperta alla superficie da un grosso strato bianco. Le forme organiche sono le stesse che nelle soluzioni n. 1 e 2, eccetto che v'è maggior numero sì di bacilli che di spore.

Soluzione n. 4. La soluzione è torbida, acida, con odore di sostanza putrefatta e coperta da una tenue pellicola. Le forme organiche sono le stesse che nella soluzione n. 3, con maggior copia però e di bacilli e di spore.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con odore di brodo e senza pellicola. Vi è discreta quantità di bacilli piccoli, isolati e riuniti in catenelle. La sporificazione non è iniziata.

Soluzioni n. 6 e 7. Le soluzioni sono limpide, acide, con forte odore di brodo concentrato e senza pellicola. Non vi si osserva alcuna forma organica.

26. Dopo 7 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione è torbidiccia, acida, con odore cattivo e coperta dallo straterello bianco. Vi è ancora abbastanza copioso il *Bacillus subtilis*, isolato ed unito alle sue spore

Soluzione n. 2. La soluzione è torbida, acida, con odore cattivo e coperta dal micoderma. I bacilli sono quasi del tutto scomparsi, essendo invece abbondantissime le loro spore, molto somiglianti alla forma ordinaria del *Bacterium termo*.

Soluzione n. 3. La soluzione ha lo stesso aspetto della soluzione n. 2. I bacilli sono completamente scomparsi e persistono le spore in straordinaria quantità.

Soluzione n. 4 La soluzione presenta l'aspetto delle due precedenti, n. 1 e 2, tranne l'odore che tiene più della sostanza rancida che putrefatta, pure essendo sempre cattivo.

Vi si notano bacilli isolati lunghi, flessuosi e catenelle di bacilli, nonchè numerose spore; tutto appartenente alla specie *Bacillus subtilis*. Il *Proteus vulgaris* è pure presente. Vi sono poi molti cristalli tavolari e prismatici che ci parvero di inosite e creatina.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con distinto odore di brodo e senza micoderma. Non vi è alcuna forma organizzata, ed abbondano i cristalli sopracitati.

Soluzioni n. 6 e 7. Le soluzioni presentano le stesse cose che al n. 25, coll'aggiunta degli accennati cristalli, osservati nelle soluzioni n. 4 e 5.

Esame delle soluzioni mantenute a 60°.

27. Le soluzioni furono mantenute per due giorni a 60°, ed, esaminate di poi, presentavano le cose seguenti:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpida, con odore normale di brodo Liebig molto diluito, senza deposito, senza traccia di micoderma. Trovasi sviluppato in discreta quantità il *Bacillus subtilis*, in forme corte, omogenee, mobili, isolate e riunite a due a due od in catenella. Sonvi pure le forme medie e lunghe, per lo più isolate e sporificate ad una od anche ad ambe le estremità del bacillo.

Soluzione n. 2. La soluzione è leggermente opalescente, ma senza pellicola superficiale. L'odore è quello normale di brodo e la reazione è acida. Vi sono le stesse forme organizzate della soluzione n. 1, ma in quantità maggiore.

Soluzione n. 3. La soluzione, come nell'osservazione al n. 26, è ancora leggermente opalescente, con lo stesso odore e senza micoderma. Presenta le stesse forme organiche che nelle soluzioni n. 1 e 2 prevalendo però gl'individui piccoli. La sporificazione altresì è meno avanzata.

Soluzione n. 4. La soluzione è distintamente opalescente, acida, con odore di putrefazione. Al microscopio si notano le stesse cose che nella soluzione n. 3, essendo però molto più numerosi i bacilli.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, senza pellicola con odore spiccato di brodo. Si avvertono delle goccioline adipose ma nessuna forma organizzata.

Esame delle soluzioni mantenute alla temperatura di 67°.

28. Le soluzioni furono mantenute a 67° per undici giorni e furono esaminate tre volte. Le cose osservate sono:

Dopo 3 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione è distintamente opalescente, acida, con pellicola superficiale iridescente e leggero deposito sul fondo. Il *Bàcillus subtilis* vi è abbondante nella forma media e lunga. La sporificazione è copiosa, e sono frequenti i lunghi e flessuosi bacilli, pieni di spore nel loro interno.

Soluzione n. 2. La soluzione è leggermente opalina, acida, con numerosissimi piccoli grumi biancastri sospesi. Ha un micoderma sottilissimo, iridescente ed un deposito più abbondante che non nella soluzione n. 1. L'odore s'accosta a quello di sostanza rancida. Le forme bacillari sono le stesse che nella soluzione n. 1; però sono più numerosi i bacilli lunghi ripieni di spore, e più avanzata in genere la sporificazione. Trovansi anche catenelle di cocchi (*streptococchi*) e molte spore isolate.

Soluzione n. 3. La soluzione presenta lo stesso aspetto e le stesse forme organiche che la precedente; sono però più copiosi i bacilli e meno le spore.

Soluzione n. 4. La soluzione non ha alcun carattere diverso dalla precedente, n. 3, se non l'odore più accentuato di sostanza rancida, una maggior abbondanza di bacilli piccoli e la sporificazione appena iniziata.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, senza micoderma, con distinto odore di brodo. Essa non contiene microorganismi; ma grande copia di cristalli tavolari e stellariformi di creatina e di inosite (?).

29. Dopo 6 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione n. 1 è limpida, senza pellicola, con odore normale. I bacilli sono molto rari, mentre sono abbondanti le spore.

Soluzione n. 2. La soluzione è opalescente, acida, con odore poco alterato rispetto al normale e con micoderma discretamente grosso, discontinuo. Si notano pochissimi bacilli (*Bacillus subtilis*) della varietà media, isolati ed in catenelle, e spore in grande quantità. Sonvi pure cristalli di inosite e di creatina.

Soluzione n. 3. La soluzione è opalescente, acida, con spiccato odore di sostanza rancida e con pellicola continua e più grossa che nella soluzione n. 2. Vi è un'immensa quantità di bacilli (*Bacillus subtilis*) nella varietà piccola e media, mentre la sporificazione non è molto progredita. Qui pure sonovi cristalli di inosite e di creatina.

Soluzione n. 4. La soluzione è limpida, acida, con odore di sostanza rancida e tiene in sospensione dei grumi che si staccano dal grosso micoderma superficiale. Le forme organiche sono le stesse che nella soluzione n. 3.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con odore di brodo. Anche in essa si è formata la pellicola, ma è costituita da cristalli di creatina e di inosite (?) e non si avverte alcun microorganismo.

30. Dopo 11 giorni:

Nelle soluzioni si osserva una quasi totale scomparsa delle forme bacillari e delle loro spore, senza che vi si sostituisca alcun altro schizomiceto; mentre si nota una considerevole abbondanza dei cristalli sopraccennati.

Esame delle soluzioni mantenute a 79°.

31. Le soluzioni vennero mantenute alla temperatura di 79° per 3 giorni e furono osservate due volte.

L'esame diede i risultati qui appresso:

Dopo 1 giorno:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpidissima, acida, con odore normale e nessuna pellicola. Contiene qualche granulazione vibrante (moto browniano), ma nessuna forma distintamente organizzata.

Soluzione n. 2. La soluzione presenta le stesse cose della precedente n. 1.

Soluzione n. 3. La soluzione presenta l' aspetto delle precedenti n. 1 e n. 2. Contiene però lunghi filamenti rettilinei, omogenei, divisi in frammenti della lunghezza delle maggiori forme di *Bacillus subtilis.*

Soluzione n. 4. La soluzione presenta gli stessi caratteri della precedente n. 3.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con forte odore di brodo e con pellicola superficiale, costituita da ammassi di granulazioni amorfe, delle quali alcune sono regolari, rotonde ed ovali e sono in preda a vivace moto browniano, nonchè ad un lento moto di traslazione in varie direzioni. Questi ammassi di granulazioni si tingono perfettamente coll'anilina. Si osservano ancora piccoli cristalli prismatici in grande copia, isolati e riuniti in gran numero, cui abbiamo riferito alla creatina.

32. Dopo 3 giorni:

Le soluzioni non hanno mutato, sia per quanto rifletta l'aspetto fisico che per quanto concerne i reperti microscopici.

Esame delle soluzioni mantenute a 100°.

33. Le soluzioni furono mantenute alla temperatura di 100° per sette giorni, e vennero esaminate dopo il 2°, il 4° ed il 7° dì. Ma nessuna modificazione intervenne per tale riscaldamento in alcuna delle solite cinque soluzioni, salva la comparsa di alcuni cristalli, simili a quelli più sopra accennati.

Esame delle soluzioni mantenute a 79° ed a 100° dopo lo sviluppo a 37°.

34. Le soluzioni furono mantenute per quattro giorni alla temperatura di 37° e, poichè furono popolatissime di microorganismi (veggasi a n. 20), vennero portate a 79° e quindi a 100°, e mantenute per due giorni a ciascuna delle due temperature. Furono esaminate poi due volte, dopo il 2° e 4° giorno, e presentarono i seguenti caratteri:

Dopo due giorni, ossia dopo il riscaldamento a 79°:

Soluzione n. 1. La soluzione è leggermente opalescente, acida, con odore di sostanza rancida, con tracce di micoderma e con deposito bianchiccio. Vi si trova in discreta quantità la forma corta del *Bacillus subtilis*, in preda a lento movimento di traslazione.

Soluzione n. 2. La soluzione ha lo stesso aspetto della precedente, n. 1, galleggia sulla superficie un grumetto bianco, costituito dal *Bacillus subtilis*, in tutte le lunghezze ed in preda a moti vivaci. La stessa specie è diffusa nella soluzione. La sporificazione dei bacilli è avanzata e trovasi altresì uno stafilococco in discreta quantità.

Soluzione n. 3. La soluzione presenta lo stesso aspetto delle precedenti n. 1 e 2. Il *Bacillus subtilis*, non molto copioso, è rappresentato dalla sola forma corta ed è molto vivace nei movimenti. È assai abbondante lo stafilococco, ed i cocchi, molto piccoli, sono anche isolati e riuniti in diplococchi e streptococchi.

Soluzione n. 4. La soluzione presenta le stesse cose della soluzione precedente n. 3.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, senza micoderma e con forte odore di brodo. Non vi si trovano microorganismi.

35. Dopo 4 giorni, ossia dopo il riscaldamento per 2 giorni a 100°.

Le soluzioni tutte non hanno mutato il loro aspetto fisico dell'osservazione precedente.

Nelle soluzioni n. 1, 2, 3 e 4 si riscontrano gli stessi microorganismi dell'osservazione precedente (n. 34). I micrococchi sono immobili, e così pure alcuni bacilli che presentano un contenuto granuloso, discontinuo. Però molti bacilli, tuttora sporificati, ed altri non sporificati, conservano un movimento distinto, abbastanza vivace, e coltivati sull'agar ed in gelatina si moltiplicano rapidamente (1).

Nella soluzione n. 5 non si osserva alcun microorganismo.

Esame delle soluzioni scaldate a 115° e 130° e mantenute di poi a 40°.

36. Le soluzioni N. 1, 3 e 5 vennero chiuse a fuoco, dopo essere state fatte bollire, nei tubi capillari ed in palloncini sterilizzati della capacità di circa 100cc., della quale esse occupavano circa 20cc. Furono mantenute per due ore e mezzo alla temperatura di 115° e di poi tenute per 5 giorni alla temperatura di 40°. Esaminate di poi presentarono i seguenti caratteri:

Le soluzioni sono perfettamente limpide, acide e con odore di brodo, più o meno concentrato. Si notano in gran copia dei filamenti lunghi, intrecciantisi, omogenei. V'hanno pure molte granulazioni vibranti di varia forma. Parecchie di esse sono ovolari, simili a piccoli bacteri, dotate di moto di traslazione in varie direzioni e colorantisi perfettamente coll'anilina. Furono poi fatte parecchie colture coi liquidi di questi palloncini sull'agar-agar ed in gelatina, e si ottenne lo sviluppo di una colonia di microorganismi (cocchi) dalla coltura della soluzione n. 3.

37. Le soluzioni furono mantenute a 130° per circa 3 ore e quindi tenute per cinque giorni a 40°.

Due serie speciali poi delle cinque soluzioni furono contemporaneamente mantenute a 130 per due ore e mezzo nella pentola di Papin e di poi tenute a 40° per 5 dì. Di una serie però le soluzioni erano, al solito, suggellate alla fiamma entro le rispettive provette, dell'altra serie invece le soluzioni erano semplicemente coperte con un tappo di cotone purissimo.

L'esame in ogni caso diede i seguenti risultati:

Le soluzioni sono limpide, acide, con odore normale di brodo. Solo la soluzione n. 1 (suggellata a fuoco) delle due serie speciali presentò un leggero deposito biancastro sulla parete della provetta, il quale dava al liquido un'apparenza opalina.

Quanto alle forme organizzate il reperto fu molto simile a quello dell'osservazione precedente (n. 36). Soltanto sono un po' più scarsi e lunghi i filamenti intrecciati, nonchè le regolari granulazioni ovoidee, rassomiglianti a piccoli bacteri. Furono

(1) Uno studio recentissimo di Miquel (*Monographie d'un bacille vivant au dela de 70° C.*), pubblicato negli Annales de Micrographie, 1ère année, n. 1, 15 octobre 1888, dimostra quello, che già noi avevamo provato; cioè, come possano vivere e svilupparsi alcune specie di bacterî, anche a temperature molto superiori a quelle comunemente ritenute quali limiti massimi per la vita e lo sviluppo dei bacterî.

eseguite di poi le coltivazioni dei liquidi di ciascuna soluzione sull'agar-agar ed in gelatina, ma non ebbesi sviluppo d'alcuna colonia.

c) Soluzioni di gelatina.

Esame delle soluzioni mantenute a temperature inferiori a 25°.

38. Le soluzioni furono preparate con gelatina purissima, fornitaci dalla Casa Leonardi e Zambelli di Torino, e vennero tenute ad una temperatura sempre inferiore a 25°, alla quale esse si rapprendono e si mantengono inalterate anche per mesi. Un'ultima osservazione, fatta il 15 maggio 1887 sulle soluzioni n. 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 preparate lo scorso novembre 1886 e mantenute a lungo in ambienti relativamente caldi (18°-20°), diede un risultato completamente negativo, cioè non si osservò lo sviluppo di alcun microorganismo.

Esame delle soluzioni mantenute a 26°.

39. Le soluzioni furono mantenute per un mese alla temperatura di 26° e furono osservate parecchie volte. I fatti notati furono questi:

Dopo 2, 4, 8 e 12 giorni nelle soluzioni non si avvertì alcun sviluppo di forme organizzate, e le soluzioni stesse si erano conservate limpide, omogenee, semifluide, neutre e senza odore.

40. Dopo un mese le soluzioni n. 1 e 2 si presentano ancora inalterate, senza alcun microorganismo; mentre le altre, n. 3, 4 e 5, sono completamente fluide, alquanto torbide, acide e con odore sgradevole. Il microscopio rivela un grande sviluppo del *Bacillus subtilis*, sporificato, nella varietà media e lunga. Il bacillo è sensibilmente più sottile che non nelle soluzioni di estratto di carne.

Esame delle soluzioni mantenute a 37°.

41. Le soluzioni furono mantenute alla temperatura di 37° per otto giorni e furono esaminate 4 volte. I diversi reperti sono stati questi.

Dopo due giorni:

Soluzioni n. 1 e 2. Le soluzioni sono limpide, neutre, senza odore, con una sottilissima pellicola alla superficie. Si nota un considerevole sviluppo di forme bacillari corte e sottilissime, cui non sapremmo riferire che alla varietà corta del *Bacillus subtilis*.

Soluzioni n. 3 e 4. Le soluzioni sono leggermente opaline, acide, con odore di sostanza rancida e con una sottile pellicola alla superficie. Sono sospesi nelle soluzioni alcuni fiocchetti bianchi, di forma sferica raggiata. Trovansi molti bacilli, identici a quelli delle soluzioni precedenti n. 1 e 2. I fiocchi sono costituiti dal comune *Penicillium glaucum* in via di sviluppo.

Soluzione n. 5. La soluzione è opalescente, acida, senza odore, senza micoderma e sparsa di fiocchetti più numerosi. Vi abbonda il *Penicillium* suddetto e manca ogni specie di schizomiceti.

42. Dopo 4 giorni:

Soluzioni n. 1, 2, 3 e 4. Le soluzioni non presentano alcuna differenza delle osservazioni precedenti al n. 41.

Soluzione n. 5. La soluzione contiene un bacillo sottile e corto, nonchè il *Bacterium lineola* Cohn.

43. Dopo 6 giorni:

Soluzioni n. 1 e 2. Le soluzioni sono limpide, acide, senza micoderma e con odore di sostanza rancida. Havvi qualche fiocco di *Penicillium* e discreta quantità di bacilli sottilissimi, lunghi ed articolati, che riferimmo al *Bacillus subtilis*, notando però la maggiore sottigliezza in generale di questa specie, osservata nelle soluzioni di gelatina, a differenza di quella osservata nelle soluzioni di estratto di carne.

Soluzioni n. 3 e 4. Le soluzioni sono limpide, acide, senza pellicola e con odore indistinto. Trovasi copioso il *Penicillium glaucum*; sono pochi invece i bacilli corti e sottili, ed avvi qualche grappolo di micrococchi (stafilococchi).

Soluzione n. 5. La soluzione è abbastanza limpida, acida, d' odore sgradevole, con un grosso strato bianco alla superficie, in qualche punto verdognolo. La soluzione contiene verso la metà della sua altezza una massa jalina con punti alquanto oscuri, simili al corpo di taluni celenterati. Lo strato superficiale è costituito da un fitto intreccio di *micelî* con spore (*Penicillium*). I bacilli sono abbastanza copiosi. La massa jalina è formata esclusivamente di gelatina.

44. Dopo 8 giorni:

Le soluzioni presentano poca differenza dall' osservazione precedente al n. 43. Si nota solo la prevalenza dei bacilli nelle soluzioni diluite, n. 1 e 2, e la prevalenza invece del *Penicillium* nelle soluzioni concentrate, n. 4 e 5.

Esame delle soluzioni mantenute a 50°.

45. Le soluzioni furono mantenute per nove giorni alla temperatura di 50° e furono esaminate 4 volte. I reperti sono questi:

Soluzioni n. 1, 2, 3, 4 e 5. Le soluzioni sono limpide, neutre, senza micoderma; soltanto la soluzione n. 5 presenta una distinta opalescenza dovuta non a scomposizione della sostanza organica, ma alla notevole densità della soluzione. Al microscopio non si riscontrano nè cocchi, nè bacteri, nè bacilli; trovasi invece il *Penicillium* nelle soluzioni n. 4 e 5, insieme con certe sfere, a doppio contorno, della grandezza apparente di una lenticchia (1200 diam.), che hanno un contenuto granuloso e sono molto mobili.

46. Dopo tre giorni:

Le soluzioni presentano le stesse cose che nell'osservazione precedente al n. 45. Solo notasi la diminuzione del *Penicillium* e l'aumento considerevole delle sfere granulose nelle soluzioni n. 4 e 5. Alcune di queste sfere sono rotte, e si vede uscir dal loro interno delle granulazioni sferiche, jaline, vibranti, colorantisi coll' anilina. Le abbiamo ascritte alle microsporine di Klebs.

47. Dopo 5 giorni:

Le microsporine sono abbondanti nella soluzione n. 5, che è ancora alquanto opalescente; sono invece scarse nelle soluzioni n. 4. Nella soluzione n. 3 trovasi in grande copia il *Penicillium* e nell'altre due non si osserva alcuna forma organizzata.

48. Dopo 9 giorni:

Da tutte le soluzioni è scomparsa affatto ogni forma organizzata.

d) Soluzioni di peptone.

Esame delle soluzioni mantenute a 16°.

49. Le soluzioni preparate con peptone puro, fornitoci dalla Casa Leonardi e Zambelli di Torino, furono mantenute per 14 giorni alla temperatura di 16° e quindi esaminate.

Soluzioni n. 1, 2 e 3. Le soluzioni sono limpide, acide, senza pellicola superficiale e senza deposito, con odore normale di peptone. Al microscopio si notano molte granulazioni rotonde, piccolissime, appena visibili coll'ingrandimento di 1200 diam., vibranti e colorantisi coll'anilina. Una coltura sull'agar, tenuta più giorni a 37°, rimase senza sviluppo.

Soluzioni n. 4 e 5. Le soluzioni tengono in sospensione qualche grumo; sono coperte alla superficie da uno straterello biancastro, discontinuo; sono acide, con odore spiccato di peptone. Al microscopio si notano le stesse granulazioni minutissime, rotonde, vibranti, che notammo nelle soluzioni n. 1, 2 e 3.

Esame delle soluzioni mantenute a 37°.

50. Le soluzioni furono mantenute per sei giorni alla temperatura di 37° e vennero osservate tre volte.

I reperti furono questi:

Dopo 1 giorno:

Soluzioni n. 1, 2, 3, 4 e 5. Le soluzioni sono limpide, acide, d'odore caratteristico di peptone e di un colore verdognolo, che cresce gradatamente d'intensità dalla soluzione n. 1 alla soluzione n. 5. L'esame al microscopio non rivela alcuna forma organizzata.

51. Dopo 3 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione è limpida, senza pellicola, senza odore. Sul fondo vi è un fiocco biancastro, formato da un *Penicillium*. Nessun altro microorganismo vi si avverte.

Soluzione n. 2. La soluzione è limpida, acida, con debolissimo odore di peptone. È coperta alla superficie da una pellicola discontinua, fragile, che ad una leggera agitazione si rompe e si diffonde in minutissimi frammenti nel liquido. Sul fondo v'ha un fiocco biancastro, costituito dal comune *Penicillium glaucum*. Trovasi abbondantissimo il *Bacterium termo*, in diverse forme, dalle quali potemmo isolarne una colle colture che riferimmo al *Bacillus fluorescens liquefaciens*.

Soluzione n. 3. La soluzione presenta lo stesso aspetto della precedente n. 2, tranne che manca lo strato superficiale. Esistono due fiocchi di *Penicillium glaucum* e pochi bacteri (*Bacterium termo*).

Soluzione n. 4. La soluzione offre lo stesso aspetto delle precedenti n. 2 e 3. Sonvi copiosi i fiocchi di *Penicillium glaucum*, ma manca affatto il *Bacterium termo*.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con distinto odore di peptone e coperta da un grosso strato rugoso, verde, costituito dal *Penicillium glaucum*.

52. Dopo 4 giorni:

Soluzione n. 1. La soluzione tiene sospeso un fiocco semitrasparente, che nuota verso il mezzo della massa liquida. Ha un odore di incipiente putrefazione; non ha pellicola superficiale, ma un deposito fiaccoso, bianco-giallognolo sul fondo. Al microscopio si nota un'immensa quantità di piccoli e sottili bacilli (*Bacillus subtilis*), isolati e riuniti in catenelle, mobili e sporificati. Il fiocco è formato dal *Penicillium glaucum*.

Soluzione n. 2. La soluzione è torbidiccia, acida, d'odore disgustoso, con deposito granuloso e strato bianco-grigiastro, discontinuo alla superficie. Si nota un grande sviluppo del *Bacterium termo*, in forme varie.

Soluzione n. 3. La soluzione è torbidiccia, acida, d'odore cattivo, con uno strato superficiale verdastro, continuo, costituito dal *Penicillium glaucum*. Mancano gli schizomiceti.

Soluzioni n. 4 e 5. Le soluzioni hanno lo stesso aspetto della precedente n. 3, tranne l'odore ch'è quello normale di peptone. Lo strato superficiale verde è costituito dal *Penicillium glaucum*.

Esame delle soluzioni mantenute a 50°.

53. Le soluzioni vennero mantenute alla temperatura di 50° per sette giorni e furono esaminate tre volte. I fatti raccolti sono i seguenti:

Dopo un giorno:

Soluzioni n. 1, 2, 3, 4 e 5. Sono limpide, di colore verdognolo, vieppiù spiccato nelle soluzioni vieppiù dense. Esse non hanno strato superficiale, solo le soluzioni n. 4 e 5 presentano alla superficie una specie di schiuma biancastra e sul fondo un deposito gelatinoso, bianco-giallognolo. Al microscopio non riscontrasi alcuna forma organizzata.

54. Dopo 4 giorni:

Soluzioni n. 1, 2 e 3. Le soluzioni sono limpide, acide, d'odore normale, senza pellicola superficiale, con un piccolo deposito bianco-giallognolo, soffice sul fondo e con alcuni fiocci bianchi, albuminosi, galleggianti; non trovasi alcuna forma organizzata.

Soluzioni n. 4 e 5. Le soluzioni sono limpide, acide, con distinto odore di peptone, e presentano qualche micelio di *Penicillium glaucum*, ma nessun schizomiceto.

55. Dopo 7 giorni:

Soluzioni n. 1, 2, 3, 4 e 5. Le soluzioni sono perfettamente limpide, acide, con deposito bianco-giallognolo e con odore normale di peptone. Non contengono alcun microorganismo, ed anche il *Penicillium* è scomparso.

e) Soluzioni di tuorlo d'uovo.

Esame delle soluzioni mantenute a 60°.

56. Veramente questi miscugli di tuorlo d'uovo coll'acqua distillata non meritano il nome di soluzioni, essendo il tuorlo soltanto stemperato nell'acqua, dacchè vi è poco solubile. Essi sono semplici emulsioni, e per ciò, dopo una prima serie di osservazioni, abbiamo abbandonata questa sostanza, come affatto disadatta. Le emulsioni

furono mantenute alla temperatura di 60° per due giorni e vennero di poi esaminate. Il reperto fu questo.

Emulsioni n. 1 e 2. Le emulsioni sono di color bianco-lattiginoso, senza odore, senza pellicola, con piccolo deposito. Si osservano al microscopio granuli sferici vibranti ed un intreccio di lunghi fili, che ricordano il *Leptothrix*.

Emulsioni n. 3 e 4. Le emulsioni son lattiginose, d'odore disgustoso, con una sottile pellicola bianca alla superficie ed un discreto deposito sul fondo. Si notano al microscopio i granuli succitati vibranti, delle goccioline adipose ed il *Bacterium termo* in discreta quantità ed in forme varie.

Emulsione n. 5. L'emulsione è limpida, senza odore, senza micoderma, con abbondantissimio deposito. Non vi si trovano i granuli vibranti ed i bacteri; sono invece abbondantissime le goccioline adipose, che variano dalla grandezza dei micrococchi a quella di un'ordinaria lenticchia (1200 diam.).

f) Soluzioni di estratto di carne, di gelatina e di peptone.

Esame delle soluzioni mantenute a temperature inferiori a 0° e dapprima seminate.

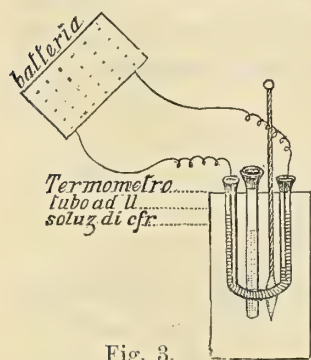
57. Le differenti serie di soluzioni d' estratto di carne, di gelatina, di peptone furono mantenute per durate di tempo diverse, variabili da poche ore a parecchie giornate, alle temperature di — 2°, — 10°, — 15°, — 21° e — 60°, essendo state prima direttamente seminate con una goccia di liquido ricco di bacteri (*Bacterium termo*), di bacilli (*Bacillus subtilis*), ed anche con qualche fiocco di *Penicillium*. I microorganismi seminati non perirono; perchè, anche dopo 24 ore di raffreddamento a — 21° e quattro ore a — 60°, le soluzioni, portate a — 37°, in breve tempo si popolarono dei microorganismi seminati.

D. *Ricerche sull'influenza delle azioni elettriche e magnetiche.*

a) Influenza di una semplice differenza di potenziale elettrico.

58. Una soluzione di estratto Liebig, corrispondente al n. 3, fu posta in un tubo di vetro incurvato ad *U* (fig. 3) e nell'uno e nell'altro dei due rami fu impegnata, mediante tappi di sughero, una lamina di platino, la quale pescava nella soluzione fin quasi al fondo del tubo. L'una e l'altra lamina venne poi messa in comunicazione, mediante opportuni reofori, coi poli di una pila, costituita da 120 elementi di zinco ed argento in acqua distillata. La pila presentava ai poli una differenza di potenziale elettrico di circa 140 Volts e non dava che una corrente da 0,3 a 0,4 milliampère.

Fig. 3.

La soluzione fu lasciata per sei giorni sotto questa tensione elettrica, mantenendo nel frattempo la temperatura fra 15° a 16°, e venne quindi esaminata. Il reperto fu questo:

Nel ramo del tubo in cui pesca il polo negativo della pila la soluzione è torbida fino ad un centimetro circa sotto la superficie, la quale è coperta da uno straterello biancastro, omogeneo. La soluzione è neutra e non ha alcun odore. Al microscopio si osserva una considerevole quantità di piccoli e sottili bacilli, in parte isolati e mobilissimi, in parte riuniti in catenelle (*Bacillus subtilis*). Anche il *Bacterium termo* è abbastanza copioso.

Nel ramo del tubo in cui pesca il polo positivo della pila la soluzione non è torbida e non ha pellicola superficiale. In essa si incontrano rare catenelle, lunghe e flessuose, di bacilli appartenenti alla varietà media e lunga del *Bacillus subtilis.*

Nella soluzione di confronto, posta in una provetta allato del tubo ad *U* e identica a quella contenuta nel medesimo tubo, lo sviluppo del *Bacillus subtilis* in tutte le lunghezze e del *Bacterium termo* è straordinariamente grande.

b) Influenza della corrente elettrica.

59. In due tubi ad *U*, eguali al sopradescritto (fig. 4), furono posti 25 cc. della soluzione n. 3 di estratto di Liebig. Attraverso l'uno di essi si mandò una corrente data da due elementi Bunsen, di cui la forza elettromotrice era di 3,75 Volts e l'intensità di 2,36 Ampère, ed attraverso l'altra una corrente fornita da quattro elementi Bunsen, di cui la forza elettromotrice era di 7,25 Volts e l'intensità di 3,98 Ampère. Allato ai tubi fu posta una provetta contenente la stessa soluzione n. 3, perchè servisse di confronto, ed i tubi e la provetta furono mantenuti alla temperatura di 37° per 48 ore.

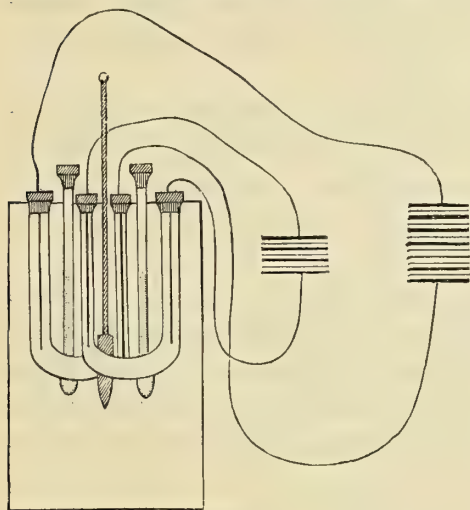



Fig. 4.

La forza elettromotrice e l'intensità di corrente della batteria fu misurata prima e dopo l'esperienza, ed i numeri surriferiti rappresentano i valori medî delle due letture, sebbene abbiano sempre variato di poco le costanti della pila dall'un caso all'altro.

Esame della soluzione sottoposta alla corrente di due elementi.

60. Nel ramo in cui pesca il polo negativo la soluzione è coperta da un sottilissimo strato superficiale iridescente. La reazione è alcalina, l'odore forte, ammoniacale. L'ammoniaca si svela introducendo nel ramo del tubo un bastoncino di vetro bagnato nell'acido cloridrico. Sulla lamina di platino (elettrodo negativo) è deposto uno straterello biancastro, granuloso. Al microscopio si osserva che tanto la pellicola superficiale, quanto lo strato deposto sulla laminetta sono costituiti da cristalli, o tavolari, o prismatici, o stellariformi che riferimmo alla inosite e cretina. V'è qualche catenella di bacilli di media lunghezza (*Bacillus subtilis*).

Nel ramo in cui pesca l'elettrodo positivo la soluzione è acida, con odore gradevole, etereo. Non havvi pellicola superficiale, nè deposito sulla lamina di platino. Avvertesi solo qualche bolla gasosa alla superficie. L'esame microscopico dimostra l'assenza completa, tanto dei cristalli, che dei microorganismi.

Esame della soluzione sottoposta alla corrente di quattro elementi.

61. Nel ramo in cui pesca l'elettrodo negativo la soluzione presenta le stesse condizioni descritte nell'esame precedente (n. 60), salvo che la pellicola superficiale ed il deposito sulla lamina di platino sono più accentuati. Il microscopio dimostra la presenza dei cristalli sopradescritti e di altri simili a quelli del nitrato di urea, e la presenza di un gran numero di granulazioni sferiche, omogenee, eguali fra loro, vibranti e colorantisi colle aniline. Si direbbero micrococchi, ma coltivati in gelatina, sull'agar e sulle patate non si sviluppano. Però seminati in una soluzione acquosa d'urea purissima, ne determinarono la decomposizione con sviluppo sensibile di ammoniaca. Intorno alla natura di queste granulazioni siamo rimasti tuttavia molto incerti.

Al polo positivo la soluzione è limpida, acida, d'odore gradevole (etereo), senza strato superficiale e senza deposito sulla lamina di platino. Al microscopio non si avvertono nè cristalli, nè forme organizzate.

La soluzione di confronto presenta lo stesso aspetto e lo stesso reperto microscopico, che furono descritti più addietro (C. b. 20 e 21) per una soluzione n. 3 di estratto di carne, mantenuta alla temperatura di 37°.

Anzi, d'ora in poi, tralascieremo addirittura di riferire l'esame relativo alle soluzioni di confronto, poichè esso si presentò sempre in tutto analogo a quello già descritto per le corrispondenti soluzioni, tenute nelle stesse condizioni.

Esame della soluzione n. 1 sottoposta all'azione della corrente.

62. La soluzione di estratto di Liebig n. 1 fu sottoposta per 48 ore alle stesse correnti, cui fu assoggettata la precedente soluzione n. 3, e nello stesso tempo venne mantenuta alla medesima temperatura di 37°. L'esame diede gli stessi risultati sopradescritti ai n. 60 e 61; la sola differenza fu nella quantità un po' minore dei cristalli, dei bacilli (quando la corrente era di 2 elementi) e dei cocchi (quando la corrente era di 4 elementi).

Esame della soluzione n. 4 sottoposta all'azione della corrente.

63. Due soluzioni di estratto Liebig n. 4 furono assoggettate per 48 ore, l'una all'azione della corrente data da due elementi Bunsen, di cui la forza elettromotrice era di 2,9 Volts e l'intensità di 2,07 Ampère, e l'altra all'azione della corrente fornita da 4 elementi Bunsen, di cui la forza elettromotrice era di 5,8 Volts e la intensità di 3,08 Ampère, mentre erano entrambi mantenute alla temperatura di 37°. L'esame diede il risultato seguente:

Soluzione influenzata dalla corrente di 2 elementi.

La soluzione all'elettrodo negativo ha la superficie coperta da un grosso micoderma, su cui sta uno strato di schiuma, che si arrampica anche sulle pareti. Il liquido è limpido, debolmente alcalino, con odore di sostanza rancida, ma non ammoniacale.

Sulla lamina di platino non vi è deposito. Al microscopio si osserva un grande sviluppo del *Bacillus subtilis* nella sua varietà più corta. I bacilli sono riuniti in catenelle lunghe e tortuose, le quali sono a ridosso l'una dall'altra sì da costituire delle vere fettucce di bacilli. I cristalli sono rari.

All'elettrodo positivo non si osserva alcuna alterazione, all'infuori di un odore leggermente etereo. Al microscopio non si avvertono nè microorganismi, nè cristalli.

Soluzione influenzata dalla corrente di quattro elementi.

64. All'elettrodo negativo si nota un abbondantissimo sviluppo di gas, che formano sulla superficie uno strato di schiuma, denso ed alto 2 centimetri. Non havvi pellicola; si avverte un forte odore di ammoniaca, svelata anche dalla formazione di cloruro d'ammonio coll'avvicinare una bacchetta di vetro bagnata nell'acido cloridrico. Esiste un distinto deposito granuloso e bianco sulla lamina di platino. Al microscopio si osserva una grande quantità di cristalli di inosite, creatina, e nitrato d'urea, nonchè delle granulazioni sferiche, omogenee, a guisa di quelle più sopra descritte, intorno alla natura delle quali restammo pure questa volta del tutto incerti.

All'elettrodo positivo la soluzione si presenta limpida, perfettamente scolorita, d'odore etereo e con uno straterello di schiuma alla superficie. Uno straterello circolare nerognolo, nella parte più bassa del tubo ad *U*, divide la soluzione scolorita, attraversata dall'elettrodo positivo, dall'altra rossastra, attraversata dall'elettrodo negativo.

Esame della soluzione n. 3 sottoposta all'azione della corrente.

65. La soluzione n. 3 di estratto di carne venne sottoposta per 48 ore ad una corrente data da 6 elementi Bunsen, di cui la forza elettromotrice era di 12,5 Volts e l'intensità di 5,3 Ampères, nello stesso tempo che era mantenuta alla temperatura di 37°. All'esame offrì i seguenti caratteri:

La soluzione è completamente scolorita e sul fondo del tubo, in corrispondenza della curvatura, si vede un piccolo deposito, bianco-niveo, costituito da minutissimi cristalli aghiformi. All'elettrodo negativo la soluzione è coperta alla superficie da gran quantità di schiuma; manda odore forte ammoniacale ed ha reazione alcalina. La lamina di platino è coperta da cristalli aghiformi. Al microscopio si nota la sola presenza in gran quantità dei cristalli suaccennati, i quali costituiscono anche il deposito di fondo; ma non si riscontra alcuna forma sicuramente organizzata.

All'elettrodo positivo la schiuma è in quantità molto minore. La soluzione è acida, d'odore etereo, e la lamina di platino è pulitissima. Non si osservano nè cristalli, nè microorganismi.

Esame della soluzione di gelatina sottoposta all'azione della corrente.

66. Una soluzione di gelatina purissima, corrispondente al n. 3, fu sottoposta all'azione di una corrente data da quattro elementi Daniell di cui la forza elettrometrica era di 4,22 Wolts e l'intensità di corrente di 0,29 Ampères, ed in paritempo era mantenuta alla temperatura di 37°. L'azione della corrente fu continuata per 4 giorni e si stabilirono due esami. Sono questi i reperti:

Dopo un giorno:

La soluzione presenta una nubecola di gelatina verso la parte incurvata del tubo. Alla superficie in corrispondenza del polo negativo, vi è una sottilissima pellicola formata da cristalli tavolari, grandi ed iridescenti. L'odore è indefinibile e la reazione è neutra. Non s'incontrano microorganismi.

All'elettrodo positivo non havvi pellicola, non si sviluppa alcun odore, nè vi sono microorganismi.

67. Dopo 4 giorni:

Si riscontrano le stesse cose tanto al polo positivo che al polo negativo, dove però la pellicola superficiale s'è fatta più grossa. Non vi è alcuno sviluppo di forme organizzate.

c) Influenza della corrente elettrica indotta.

68. Furono sottoposte le diverse serie di soluzioni organiche (estratto Liebig, gelatina, peptone, tuorlo d'uovo), per una durata di tempo da un giorno a tre, all'azione di fortissime correnti indotte, date dal *grande rocchetto Ruhmkorff ad interruttore di Foucault* dell'Istituto di Fisica, cui furono applicati successivamente sei, otto e dieci elementi Bunsen a grande modello. Le soluzioni erano nello stesso tempo mantenute alla temperatura di 21°. I risultati furono questi:

La materia organica si ammucchiava all'elettrodo negativo, formando una specie di cono attorno alla lamina, ed in breve tempo si formava alla superficie del liquido il solito straterello. Lo sviluppo dei microorganismi (bacilli e bacteri) avveniva in modo normale, come se lo stato delle soluzioni non fosse punto turbato.

d) Influenza del magnetismo.

69. La soluzione da sottoporsi all'esame fu posta in una provetta, la quale verso il fondo era a pareti piane, parallele fra loro e discoste meno di un centimetro. La parte inferiore della provetta era frapposta ai due poli magnetici dell'apparecchio di Faraday per lo studio delle sostanze para e diamagnetiche (fig. 5). L'apparecchio elettromagnetico era percorso da una corrente data da 10 coppie Cloris-Baudet (grande modello), associate con 8 coppie Bunsen (grande modello). Le Cloris-Baudet fra di loro erano associate per tensione, così pure le Bunsen fra di loro; ma la Cloris Baudet colle Bunsen erano riunite per superficie. Per tal mezzo l'apparecchio elettromagnetico raggiungeva un massimo d'intensità, da richiedersi una forza da 35 a 40 chilogrammi per staccare un'àncora che ne congiungesse i poli.

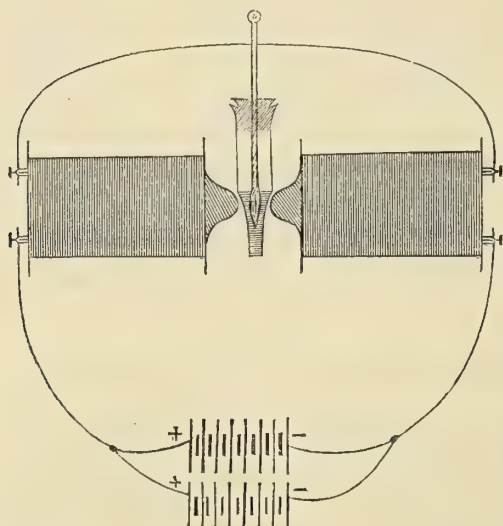



Fig. 5.

70. Riguardo all'azione magnetica abbiamo eseguite cinque serie di esperienze sulla soluzione n. 3 di estratto Liebig, che dal complesso delle ricerche precedenti riconoscemmo la più adatta allo sviluppo dei microorganismi. Confrontando i risultati al microscopio della soluzione magnetizzata con quelli della stessa soluzione, presa per paragone, posta fuori dal campo magnetico, abbiamo potuto convincerci che l'induzione magnetica non ha sullo sviluppo dei microbi che un'azione ritardatrice rispetto al tempo e diminuitiva riguardo alla quantità dei microorganismi ed alla loro vitalità. Imperocchè nella soluzione magnetizzata, mantenuta fra 17° e 18°, lo sviluppo del *Bacillus subtilis* non cominciò che dopo 4 o 5 giorni e le forme erano scarse, poco mobili, senza spore anche dopo parecchi altri giorni, mentre nella soluzione di confronto si presentò fra il 2° ed il 3° giorno uno sviluppo di forme organizzate, analoghe a quelle descritte per questa soluzione ai n. 16, 17, 18 (*C. b.*), che si accrebbe nei giorni successivi.

E. *Influenza delle varie luci.*

Esame delle soluzioni esposte alla luce bianca solare ed alle diverse luci dello spettro.

71. Le soluzioni n. 1, 3 e 5 di estratto Liebig furono dapprima poste in palloncini di vetro, tinto in rosso, della capacità di circa 100 cc., di cui esse occupavano circa 18 cc., e vennero esposte al sole nel mese di maggio; sicchè la temperatura interna al palloncino durante il dì variava dai 35° ai 60°. I palloncini erano suggellati alla lampada ed erano stati dapprima sterilizzati ad alta temperatura. Essi rimanevano esposti al sole dalle otto ore del mattino alle 5 pomeridiane, e, quando la sera venivano ritirati, erano riposti nel ghiaccio fondente, ove rimanevano fino alle ore otto del mattino seguente. L'esposizione durò 6 giorni ed i risultati sono riferiti più sotto insieme con quelli che si ottennero di poi esponendo alla luce, in luogo soleggiato, le soluzioni in quest'altro modo. Cioè, si avvolse attorno a cinque bicchieri di vetro, ciascuno per ciascuno, una lamina di gelatina colorata trasparentissima. La lamina aveva uno spessore poco superiore a quello di un foglio da lettera, e per questo fu avvolta per due o tre volte attorno ciascun bicchiere. Così attorno al bicchiere veniva costituito un involucro cilindrico colorato, il quale veniva chiuso al di sotto e al di sopra con una triplice lamina di gelatina dello stesso colore. Per tenere a posto la lamina di sopra vi si sovrapponeva un disco di vetro, perfettamente diafano e senza colore. Le tinte della lamina di gelatina erano le seguenti: rosso, giallo, verde, azzurro e violetto. In ciascun bicchiere poi furono poste le tre soluzioni n. 1, 3 e 5 di estratto Liebig, e così vennero esposti alla luce, disponendo i bicchieri in circolo sovra una grande lastra di vetro e coprendoli con un'ampia campana di vetro, senza colore. Sotto la campana fu posto altresì un termometro per rilevarvi, nelle differenti epoche del dì, la temperatura. Le soluzioni furono esposte, notte e dì, per 10 giorni, e si osservò che dal levare al tramontare del sole la temperatura sotto la campana, variò in media fra 25° e 50°, e dal tramonto al sorgere del sole da 14° a 18°. Esse furono esaminate due volte, dopo il secondo ed il decimo giorno. Vennero di poi tolti gl'involucri colorati, e le stesse soluzioni furono lasciate per altri 9 giorni esposte, nelle stesse condizioni, alla luce bianca del sole. I risultati ottenuti sono i seguenti:

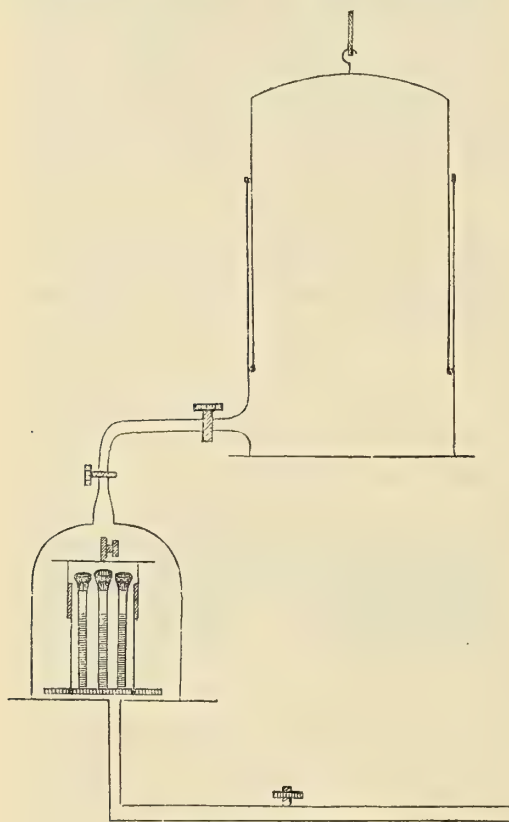
72. In tutte le osservazioni, stabilite sulle soluzioni esposte alle luci colorate, si riscontrano sempre gli stessi caratteri, che qui riferiamo: Le soluzioni sono limpide, acide, con odore normale, senza pellicola superficiale, con leggero deposito granuloso. Al microscopio si osservano alcune granulazioni irregolari ed alcuni aghi e tavole cristalline, riferibili alle solite materie estrattive. Manca assolutamente ogni forma organizzata, e nessun indizio s'incontra, nelle diverse osservazioni, che accenni ad uno sviluppo di microorganismi. Le soluzioni, esaminate dopo il 2° ed il 9° giorno, da che erano stati tolti gli involucri colorati e quindi esposte alla luce bianca, non presentarono alcuna mutazione, sia per riguardo all'aspetto che per riguardo al reperto microscopico, da quanto fu detto nell'osservazione precedente.

F. *Influenza dei diversi ambienti gasosi.*

a) Disposizione delle esperienze.

73. Trattandosi di rilevare quale sia l'influenza di un dato ambiente gasoso sullo sviluppo dei microorganismi in soluzioni organiche di diversa ricchezza procentica, ci siamo limitati a due gas soltanto, il biossido di carbonio e l'azoto: e ciò pel fatto che ben poco divario corre fra l'azione di un gas e quella di un altro, quand'essi non esercitano azione chimica sulle soluzioni, per quanto almeno riguarda una condizione più o meno favorevole alla formazione dei microbi.

Fig. 6.

Il biossido di carbonio fu preparato colla solita reazione dell'acido cloridrico sul marmo (marmo di Carrara) e venne raccolto in un gazometro della capacità di 20 litri. Sotto una campana pneumatica poi, munita di un rubinetto, venne posto un vaso cilindrico di vetro, simile al piezometro d'Oersted, il quale era munito di un'investitura d'ottone, su cui potevasi avvitare un coperchio (fig. 6). Il coperchio era pure munito di un rubinetto e tutto l'apparecchio era a perfetta tenuta di gas, ancorquando fra l'interno e l'esterno fossevi una differenza di pressione d'un'atmosfera. Il rubinetto della campana era messo in comunicazione col gasometro e nel vaso di vetro erano riposte le soluzioni organiche. Allora, tenendo aperto il rubinetto del coperchio del vaso di vetro e chiudendo quello della campana, si faceva dapprima la rarefazione nella campana e quindi nelle soluzioni, la quale era prolungata per un'ora e mezzo

o due, affinchè tutta l'aria venisse snidata; di poi si apriva il rubinetto della campana e si lasciava entrare il biossido di carbonio. Si ripeteva poi dieci volte di seguito nel tempo d'una mezz'ora la rarefazione del gas sotto la campana e l'introduzione del gas stesso, contenuto nel gasometro, affine di recar fuori dalle soluzioni quell'ultima parte di aria che poteva esservi rimasta per la non completa rarefazione operata dalla pompa. Si levava infine lestamente la campana, quand'era stata l'ultima volta ripiena del gas, si chiudeva il rubinetto del coperchio del vaso di vetro e questo veniva portato poi alla temperatura di 37°.

74. Per mantenere le soluzioni organiche in un'atmosfera d'azoto si provvide nel modo seguente. Sovra un grosso disco di vetro lavorato a smeriglio finissimo, fu applicata una campana da macchina pneumatica, pur essa lavorata a smeriglio molto fino. Sotto la campana venne posta una bacinella ripiena con una soluzione satura di acido pirogallico in cui venne altresì disciolta un po' di potassa caustica, preparata all'alcole. Entro la bacinella stessa erano disposte le provette colle soluzioni organiche (fig. 7).

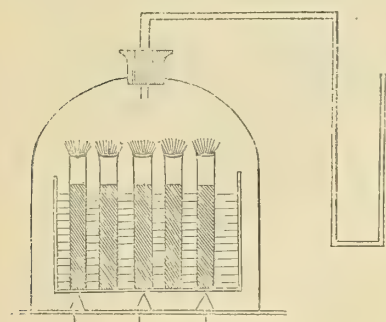



Fig. 7.

L'apparecchio per due giorni veniva tenuto in un ambiente di 0°, ed in questo intervallo di tempo la soluzione alcalina di acido pirogallico assorbiva tutto l'ossigeno e la piccola quantità di acido carbonico dell'aria racchiusa sotto la campana: esso di poi era portato alla temperatura di 15°. Per riconoscere quando l'assorbimento dell'ossigeno era compiuto, la campana era munita in alto di un foro, in cui era impegnato un manometrino ad aria libera, il quale era letto, nelle medesime condizioni di temperatura e colle debite correzioni relative alla variazione della pressione atmosferica, prima e dopo dell'assorbimento.

b) Esame delle soluzioni sottoposte all'azione del biossido di carbonio.

75. Le soluzioni n. 1, 2, 3, 4 e 5 di estratto Liebig furono mantenute per nove giorni in contatto coll'atmosfera di biossido di carbonio, in pari tempo che la temperatura era mantenuta costante a 37°, e furono esaminate tre volte, dopo il 4°, il 6° ed il 9° giorno. Dopo ciascun esame era subito e prestamente ripetuta tutta l'operazione descritta al N. 73, affine di riporre le soluzioni nelle stesse condizioni, in cui si trovavano prima dell'esame stesso.

Allato del vaso di vetro contenente le soluzioni in esame erano tenute le corrispondenti soluzioni di confronto (in contatto all'aria), le quali esaminate dopo il 1°, il 2°, il 3°, il 4°, il 6° ed il 9° giorno offrirono pressapoco gli stessi risultati, che abbiamo precedentemente descritti per le soluzioni di estratto Liebig tenute a 37°. Per le soluzioni sottoposte all'azione del biossido di carbonio furono questi i reperti:

76. Dopo quattro giorni:

Soluzioni n. 1, 2 e 3. Le soluzioni sono limpide, acide, senza odore, senza pellicola superficiale. Al microscopio si osserva una grande quantità di goccioline adipose. Nessun microorganismo si è sviluppato.

Soluzione n. 4. La soluzione è opalina, acida, coperta da una pellicola biancastra. Si notano al microscopio uno *Streptococco* ed il *Bacterium termo* in discreta quantità, nonchè il *Bacterium lineola* molto più copioso.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con discreto deposito sul fondo. Non contiene alcun microorganismo.

77. Dopo 6 giorni:

Soluzioni n. 1, 2 e 3. Le soluzioni sono leggermente opalescenti, acide, d'odore non alterato, con una sottilissima pellicola alla superficie. Vi è un discreto sviluppo del *Bacterium lineola* nella soluzione n. 1, che è molto più abbondante nelle soluzioni n. 2 e 3. Il *Bacterium termo* è raro.

Soluzione n. 4. La soluzione ha lo stesso aspetto di prima (n. 76). Vi è abbondantissimo il *Bacterium lineola*, meno abbondante il *Bacterium termo* nelle varie sue forme, e sembra scomparso lo *streptococco*.

Soluzione n. 5. Sebbene la soluzione sia scolorita e priva di pellicola superficiale vi si trova in discreta copia uno stafilococco ed un corto e sottile bacillo in catenella (*Bacillus subtilis*).

78. Dopo 9 giorni:

Soluzioni n. 1 e 2. Le soluzioni sono limpide, senza pellicola. È scomparsa ogni forma organizzata.

Soluzione n. 3. La soluzione è torbidiccia, acida, d'odore inalterato, con discreto strato superficiale. Vi sono molti cocchi isolati ed uniti in catenelle; sono rari il *Bacterium lineola* ed il *Bacterium termo*; è comparso un bacillo lungo, sporificato all'estremità e nell'interno (*Bacillus subtilis*).

Soluzione n. 4. La soluzione presenta lo stesso aspetto e lo stesso reperto microscopico della precedente n. 3.

Soluzione n. 5. La soluzione è limpida, acida, con abbondante doposito e con uno strato superficiale formato dall'ammasso di numerose bollicine gasose biancastre. Lo stafilococco vi è sviluppatissimo, ed il bacillo è scomparso.

79. Questa serie di ricerche fu pure ripetuta, ma si conseguirono risultati ben poco diversi dai precedenti.

c) Esame delle soluzioni sottoposte all'azione dell'azoto.

80. Le soluzioni d'estratto Liebig furono tenute per sette giorni nell'atmosfera di azoto alla temperatura di 15°, e quindi vennero esaminate assieme alla soluzione di confronto (in contatto all'aria); per esse si ebbero risultati analoghi a quelli descritti al n. 15 (*C. b.*) di questo capitolo.

81. Per le soluzioni in contatto con l'azoto si trovò quanto segue:

Soluzione n. 1. La soluzione è opalescente, con micoderma quasi completo, sottile, bianchiccio, dal quale si diffondono verso il fondo delle larghe bende bianchiccie. Essa è senza odore e senza deposito. Sonvi tre specie di bacteri: Il *Bacterium lineola*,

prevalente, con una bellissima zooglea; il *Bacterium termo*, meno copioso, pure con zooglea; e un *Bacterium* molto più grosso e più corto del *Bacterium lineola*, con una larga base, una punta smussa e margini curvilinei. Sono frequenti altresì i diplobacteri di questa specie.

Soluzione n. 2. La soluzione è torbida, con micoderma più grosso che nella precedente n. 1, con odore pressochè normale e con piccolo deposito sul fondo. Si osservano le stesse tre forme, più copiose però, che nella soluzione precedente n. 1, con grande prevalenza del *Bacterium lineola*. Vi è anche qualche bacillo lungo, riferibile al *Bacillus subtilis*.

Soluzione n. 3. La soluzione è leggermente opalescente, senza odore, con un micoderma appena distinguibile e con discreto deposito sul fondo. Vi abbonda il *Bacterium lineola* e qualche forma corta, mobilissima del *Bacillus subtilis*. Manca il *Bacterium termo* e l'altra specie non determinata.

Soluzioni n. 4 e 5. Le soluzioni sono limpidissime, senza micoderma, con odore normale di brodo ed un deposito granuloso, amorfo. Manca ogni forma di microorganismi.

82. La stessa serie di ricerche, or ora descritta, fu ripetuta, e ci dispensiamo di riferire i risultati, perchè molto analoghi ai sopradescritti (n. 81).

IV.

Conclusioni.

Dai risultati ottenuti nelle surriferite esperienze crediamo di poter logicamente dedurre le seguenti conclusioni:

1. Per le soluzioni di estratto di carne e di peptone la densità non ha influenza sullo sviluppo specifico (di forme determinate) dei microorganismi.

2. Per le soluzioni di gelatina tale influenza si dovrebbe ammettere per lo sviluppo delle microsporine, trovate esclusivamente nelle soluzioni più dense (n. 4 e 5).

3. La densità agisce diversamente sullo sviluppo dei microbi, a seconda della qualità della sostanza organica. Infatti nelle soluzioni di estratto di carne lo sviluppo è più abbondante e più rapido nelle soluzioni poco dense (n. 1, 2 e 3); mentre nelle soluzioni di gelatina è più abbondante e più rapido in quelle molto dense (n. 4 e 5).

4. Nelle soluzioni di estratto di carne, qualunque sia la loro densità, si sviluppano esclusivamente schizomiceti; in quelle di gelatina si sviluppano prevalentemente muffe *(Penicillium)*.

5. Nelle soluzioni di peptone si svolgono di pari passo tanto gli schizomiceti che i penicillii.

6. Il limite inferiore di temperatura, che permette lo sviluppo dei microbi, varia colla qualità delle sostanze organiche ed anche colla loro densità. Infatti nelle soluzioni, ad es., meno dense di estratto di carne (n. 1 e 2) i microorganismi compaiono già a 5° dopo undici giorni, mentre a questa temperatura nelle soluzioni più dense non si verificano sviluppi. Solo a 10°, dopo sei giorni, compaiono le forme nelle soluzioni

più dense (n. 4, 5, 6 e 7). E d'altra parte le soluzioni di gelatina rimangono sterili anche per mesi al di sotto di 25°, qualunque sia la loro densità.

7. La densità delle soluzioni organiche ha una sicura influenza sulla temperatura di loro sterilizzazione. Una soluzione di estratto di carne molto densa (n. 5) è sterile a 50°, mentre le soluzioni poco dense (n. 1, 2 e 3) non sono sterili a 60°, anche dopo parecchi giorni che furono mantenute a tale temperatura.

8. A 79°, dopo tre giorni, si manifestano granulazioni che per la forma, per la colorazione e pel moto di traslazione non ci permettono di escluderle in modo assoluto dalle forme organizzate.

9. La nostra soluzione n. 3 (2 %) è la più opportuna per lo sviluppo delle forme, ed il punto di sua sterilizzazione è più alto di quello di tutte le altre.

10. Per le soluzioni di gelatina non si verifica il fatto precedentemente enunciato per le soluzioni di estratto di carne. Infatti mentre a 50° sono sterilizzate le soluzioni meno dense, non lo è la soluzione più densa (n. 5), nella quale si sviluppa ancora il *Penicillium*.

11. La densità delle soluzioni organiche influisce sulla precocità dello sviluppo, della sporificazione e dell'esaurimento. Nelle soluzioni meno dense (n. 1 e 2) lo sviluppo, la sporificazione e l'esaurimento sono assai più precoci che nelle soluzioni più dense (n. 3 e 4).

12. In tutte le soluzioni il *Bacillus subtilis* è forma prevalente alle temperature relativamente alte (superiori ai 30°); il *Bacterium termo* è forma prevalente alle temperature basse (inferiori ai 30°).

13. Nelle soluzioni di estratto di carne in particolare le specie *Bacillus subtilis* Cohn e *Bacterium termo* Duj. si manifestano così multiformi, instabili, col mutare della densità e della temperatura, da rendere quasi impossibile una rigorosa determinazione e da forzare la mente all' idea del polimorfismo. Infatti tutte le forme descritte e che abbiamo riferite a queste specie, non solo quelle a bastoncino, ma anche le ovalari e le sferiche, coltivate nei mezzi nutritivi riprodussero le ordinarie forme del *Bacillus subtilis* e del *Bacterium termo*.

14. Innalzando gradatamente la temperatura delle soluzioni organiche si innalza anche il punto di sterilizzazione in quelle che hanno una densità opportuna. Infatti nelle soluzioni di estratto di carne e di peptone, corrispondenti ai n. 1, 2 e 3, il *Bacillus subtilis* resistette per 24 ore alla temperatura di 79° ed anche a quella di 100°.

15. Un riscaldamento di 2-3 ore, nella pentola di Papin, a 120°-130° non impedisce nelle soluzioni poco dense di estratto di carne, chiuse a fuoco, lo sviluppo di forme sferiche organizzate.

16. I gas acido carbonico ed azoto non hanno che un'azione ritardatrice sullo sviluppo dei microorganismi. Sotto la loro influenza abbiamo però veduto svilupparsi in considerevole quantità, insieme con altre forme, il *Bacterium lineola* Cohn.

17. Un'azione puramente ritardatrice hanno anche il magnetismo e la differenza di potenziale elettrico.

18. L'azione della intensa luce solare, semplice o composta, impedisce assolutamente lo sviluppo dei microorganismi nelle soluzioni organiche di qualsiasi densità.

19. L'azione della corrente elettrica continua è variabile a seconda della qualità della sostanza organica sottoposta ad esame ed a seconda della intensità della corrente.

20. Una corrente di 4 Daniell (0,29 Ampère, 4,22 Volts), agente per 4 giorni sulla soluzione di gelatina n. 3, mantenuta a 37°, ha un potere sterilizzante completo.

21. Una corrente di 2 Bunsen (2,36 Ampères, 3,75 Volts), operante per 2 giorni su una soluzione di estratto di carne nelle più opportune condizioni di densità (soluzione n. 3) e di temperatura (37°), esercita un'influenza puramente ritardatrice sulla produzione dei microorganismi.

22. Una corrente di 4 Bunsen (3,98 Ampères, 7,25 Volts), agente per 2 giorni sulla stessa soluzione e nelle stesse condizioni di temperatura, non permette che lo sviluppo di granulazioni sferiche, vibranti, che non abbiamo potuto rigorosamente dimostrare per micrococchi.

23. Una corrente di 6 Bunsen (5,3 Ampère, 12,5 Volts), agente per 2 giorni sulla stessa soluzione e nelle stesse condizioni di temperatura, sterilizza in modo assoluto la soluzione.

24. Una corrente indotta, debole o forte, non ha alcuna influenza sullo sviluppo dei microorganismi.

Questo nostro studio è incompleto, però quanto abbiamo fatto ci sembra rigoroso e conforme al vero metodo sperimentale. Perocchè quando si cerca di riprodurre colla esperienza un fenomeno naturale è necessario tener conto di tutte le condizioni nella loro giusta misura.

RELAZIONE

letta dal Socio G. Battaglini, relatore, a nome anche del Socio E. Betti, nella seduta del 6 maggio 1888 sopra la Memoria del dott. Ernesto Pascal, intitolata: *Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente tra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria delle forme algebriche.*

« Il teorema fondamentale, che forma l'oggetto di questa Memoria, fu enunciato dal Pascal in una comunicazione da lui fatta, nel febbraio scorso, alla r. Accademia dei Lincei; e per le forme binarie e le ternarie è stato già dimostrato dal Gordan, e dallo Study. — È noto che per le forme algebriche, di un numero qualunque di variabili, esistono alcune relazioni d'identità, del tipo invariantivo, tra i simboli di queste forme e le variabili, dette formole di *riduzione* pel calcolo simbolico, le quali possono prendere cinque forme diverse, e che il Pascal chiama le *identità zero*. Ora il teorema di cui si tratta è il seguente: « Se si ha un' espressione invariantiva, relativa ad un sistema di forme algebriche, omogenea in ciascuna serie di coefficienti e di variabili, *irriducibile* (cioè che non sia il prodotto di due o più altre analoghe espressioni) la quale sia identicamente zero, essa potrà sempre essere verificata adoperando opportunamente le *identità zero*, formate con i soli elementi compresi nella espressione invariantiva proposta »; in altri termini: « se si ha un'espressione invariantiva, irriducibile e zero, essa, aggiungendo e togliendo certi termini, e poi raggruppandoli in modo conveniente con quelli della data espressione, potrà sempre ridursi ad un aggregato di parti, di cui ciascuna contenga per fattore almeno una delle *identità zero*, formate con i soli elementi che entrano nella espressione proposta ». La dimostrazione generale, abbastanza complicata, di questo teorema, consiste in sostanza nell'applicare all'espressione proposta lo sviluppo di Gordan, col quale essa si cambia in un aggregato di termini, ciascuno dei quali è il prodotto di una potenza di covarianti identici per polari di alcune altre espressioni, che diremo *derivate*, contenenti un elemento di meno, sia una variabile o un coefficiente; e se il teorema è vero per queste espressioni derivate, sarà ancor vero per l'espressione proposta. — L'autore fa vedere che se il teorema sussiste per una certa espressione, si verificherà anche per una sua polare qualunque, sia questa relativa ai coefficienti o alle variabili. Considerando poi alcune *trasformate* di una data espressione, che si deducono da essa mutando una variabile o un coefficiente, o più di essi, in serie di più coefficienti, con un'analisi minuta dei diversi casi che si possono presentare, l'autore giunge a far vedere che se il teorema si verifica per una trasformata di una data espressione, si verificherà ancora per questa. Finalmente, giovandosi di alcune proposizioni stabilite dal Capelli nella sua Memoria *Sui fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* il Pascal perviene a dimostrare il teorema proposto.

« Crediamo che questo lavoro possa essere inserito negli Atti della r. Accademia dei Lincei. »

Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche.

Memoria di ERNESTO PASCAL.

In una brevissima comunicazione da me fatta nello scorso febbraio all'Accademia dei Lincei [1], enunciai il teorema fondamentale che forma l'oggetto di questa Memoria, e ne accennai per sommi capi la dimostrazione. Mi accingo ora ad esporla in tutti i suoi particolari. Questo teorema per i casi delle forme binarie e ternarie si trova già dimostrato nelle lezioni di Gordan [2] e in una Nota di Study [3]. A me pare d'aver raggiunto in questo lavoro un rigore che non si possa desiderare di più.

§ I.

Se si hanno più serie di coefficienti e di variabili di specie n, è noto che fra un certo numero di esse, esiste sempre una relazione d'identità del tipo invariantivo, la quale prende le seguenti cinque forme:

$$\Sigma_a \pm (a_1 a_2 \dots a_n)(a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_{n-1}) = 0$$
$$\Sigma_a \pm (a_1 a_2 \dots a_n)\, a_{n+1,x} = 0$$
$$(a_1 a_2 \dots a_n)(x_1 x_2 \dots x_n) - \Sigma_a \pm a_{1x_1} a_{2x_2} \dots a_{nx_n} = 0$$
$$\Sigma_x \pm (a_1 a_2 \dots x_n)\, a_{x_{n+1}} = 0$$
$$\Sigma_x \pm (x_1 x_2 \dots x_n)(x_{n+1} y_1 y_2 \dots y_n) = 0$$

dove col simbolo $\Sigma_a \pm$ intendiamo che si debba fare la somma di tutte le espressioni che si ottengono permutando le a fra loro in tutti i modi possibili, mutando però il segno al termine che si ottiene se la permutazione fatta corrisponde ad un numero dispari di trasposizioni, e non mutandolo, se la permutazione corrisponde ad un numero pari di trasposizioni.

Per brevità, chiameremo queste relazioni le *identità-zero*, e gli elementi che in ciascuna di esse debbono permutarsi fra loro, li chiameremo *elementi circolanti*; gli altri, *elementi fissi*.

Il teorema che intendiamo di dimostrare è il seguente:

« Se si ha una formazione invariantiva Π, omogenea in ciascuna serie di coef-
« ficienti e di variabili, *irriducibile*, cioè che non sia il prodotto di due o più altre

[1] *Sopra un teorema fondamentale* ecc. Rendiconti della r. Acc. dei Lincei, vol. IV, 1° semestre 1888.

[2] *Vorlesungen über Invariantentheorie.* Bd. II, 1887, s. 132.

[3] *Ueber ternäre lineare Formen.* Math. Ann. Bd. XXX, s. 120.

« tali formazioni, e che sia identicamente zero, essa può sempre verificarsi con pro-
« cesso sempre intero, adoperando solo opportunamente *identità-zero*, formate solo
« cogli elementi compresi nella formazione invariantiva e non con altri ».

Questo teorema può anche enunciarsi in modo diverso. Giacchè è chiaro che se si ha una funzione razionale ed intera in x, y, z,... che si annulli per $x=0$, $y=0$,... essa sarà formata con un assieme di termini di cui ognuno contenga per fattore almeno una delle quantità x, y,... E analogamente, se la detta funzione razionale ed intera si annulla invece per $x+a+a'+\ldots=0$; $y+b+b'+\ldots=0$,.., essa potrà sempre ridursi ad una somma di termini di cui ciascuno contenga per fattore almeno una delle espressioni $x+a+a'+\ldots$, $y+b+b'+\ldots$; perchè posto $x+a+a'+\ldots=x'$; $y+b+b'+\ldots=y'$, ... , eliminando dalla funzione x, y,..., e introducendo in conseguenza x', y',... si ottiene un risultato che deve annullarsi per $x'=0$, $y'=0$,...

Applicando questi principî al nostro teorema, possiamo dire che esso può anche enunciarsi così:

« Se si ha una formazione Π irreducibile e zero, essa potrà sempre ridursi, ag-
« giungendo e togliendo certi termini e poi raggruppandoli con quelli di Π in modo
« conveniente, ad una somma di parti di cui ciascuna contenga per fattore almeno
« una delle *identità-zero* formate solo cogli elementi di cui risulta Π ».

Reciprocamente questo secondo enunciato porta al primo.

Poichè i varî termini di qualunque *identità-zero* sono sempre omogenei rispetto a ciascuna serie di coefficienti e di variabili, si ricava che questi varî termini aggiunti e tolti a Π, di cui è parola in quest'ultimo enunciato, debbono essere fra loro e con i termini di Π omogenei in ciascuna serie di coefficienti e variabili. Avvertiamo in ultimo che noi naturalmente intendiamo che l'annullarsi di Π sia di tale natura che sussista quando i coefficienti *simbolici* che in essa vi compariscono si considerino come effettivi; caso al quale possiamo sempre ridurci prendendo la media aritmetica di tutte le espressioni che si ottengono da Π permutandovi i simboli equivalenti in tutti i modi possibili fra loro.

§ II.

Alla dimostrazione del teorema premettiamo quella di varî lemmi.

LEMMA 1°: « Se il teorema si verifica per una certa formazione Π, si verifi-
« cherà per una qualunque polare di Π, polare fatta o fra coefficienti o fra variabili ».

Ed infatti supponiamo posta Π sotto la forma data dal secondo enunciato del teorema, cioè posto

$$\Pi = \mathrm{A}\cdot a + \mathrm{B}\cdot b + \cdots$$

dove A, B, ... sono identità-zero.

Operando la polare sul secondo membro, le identità-zero rimangono tali, sebbene cangino di forma, e quindi si otterrà un risultato dello stesso tipo di quello da cui si è partiti.

LEMMA 2°: « Reciprocamente, se il teorema si verifica per la polare di una
« espressione Π, si verificherà per Π ».

Supponiamo infatti che si verifichi per $\Delta_{xx'} \Pi$ cioè per la polare fatta colla variabile x e col polo x'. Supponiamo posta $\Delta_{xx'} \Pi$ sotto la forma data dal secondo enunciato del teorema; e facciamo poi al primo e secondo membro $x' = x$. Allora a meno di un fattore numerico $\Delta_{xx'} \Pi$ diventa Π, e il tipo del secondo membro non cangerà; quindi Π si trova espresso sotto la forma contemplata dal secondo enunciato del teorema, onde ecc.

§ III.

Colla parola *trasformate* di un'espressione Π, intenderemo le espressioni che si ottengono da Π mutando una variabile o un coefficiente o più di essi in serie di $n-1$ coefficienti o variabili.

LEMMA 3°: « Le trasformate delle identità-zero soddisfanno al teorema fondamentale ».

È chiaro in primo luogo che basta considerare solo le prime tre forme di identità-zero. Inoltre, se nella seconda facciamo il cangiamento di un coefficiente in variabili si ha appunto il terzo tipo; se facciamo invece il cangiamento di una variabile in coefficienti si ha il primo tipo. Restano a considerarsi quindi solo il primo e terzo tipo.

Nel primo sono da considerarsi i due casi distinti in cui il coefficiente che si trasformi sia un coefficiente circolante a, o un coefficiente fisso b.

Si abbia la prima identità-zero, e si trasformi il coefficiente a_{n+1} nelle variabili

$$x_1, x_2 \dots x_{n-1}.$$

Si ha:

$$(a_1 a_2 \dots a_n) \Sigma_x b_{1x_1} \dots b_{x-1,x_{n-1}} - \Sigma_a (a_1 b_1 \dots b_{n-1}) \Sigma_x a_{2x_1} \dots a_{n_1 x_{n-1}}$$

ovvero

$$\Sigma_x \left\{ (a_1 a_2 \dots a_\sigma) b_{1x_1} \dots b_{n-1,x_{n-1}} - \Sigma_a (a_1 b_1 \dots b_{n-1}) a_{2x_1} \dots a_{nx_{n-1}} \right\}.$$

Ma noi dimostreremo di qui a poco (§ V) trattando di un altro argomento, che il secondo termine dell'espressione in parentesi si riduce identicamente al primo adoperando solo identità-zero, dunque ecc. Non inseriamo qui questa dimostrazione per non fare inutili ripetizioni.

Trasformiamo invece il coefficiente b_{n-1}. Si ha allora senz'altro

$$\Sigma_x b_{1x_2} \dots b_{n-2 x_{n-1}} \Sigma a (a_1 a_2 \dots a_n) a_{n+1, x_1}$$

onde ecc.

Finalmente nella terza identità espressa in y, trasformando il coefficiente a_n, si ha:

$$\Sigma_x \left\{ (a_{1x_1} \dots a_{n-1,x_{n-1}} (y_1 y_2 \dots y_\sigma) - \Sigma_y a_{1y_2} \dots a_{n-1 y_{n-1}} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n) \right\}.$$

la quale è un'espressione analoga a quella di sopra.

Quando poi si facessero più trasformazioni, è chiaro che la proprietà sussiste, perchè basta applicare successivamente lo stesso teorema facendo una trasformazione alla volta.

LEMMA 4°: « Se il teorema si verifica per una espressione Π, si verificherà per « una sua qualunque trasformata Π' ».

Infatti supponiamo posto Π sotto la forma data dal secondo enunciato del teorema, e facciamo la trasformazione al primo e secondo membro; il primo membro diventa Π', e il secondo rimane dello stesso tipo, in virtù del lemma precedente.

§ IV.

Lemma 5°: « Si abbia un'espressione Π e si trasformi un coefficiente a in serie « di variabili, e si abbia Π'; si faccia una polare di Π fra i coefficienti $a, a'; a, a'' \dots$ « e si abbia P, si trasformino in P i coefficienti $a, a', a'', \dots$ in serie di variabili, « e si abbia P'; sarà P' una polare (derivabile con operazioni di polari) di Π' ».

È chiaro che basterà dimostrare il caso in cui P sia una semplice polare di Π, cioè sia ricavato da Π operandovi *una sola* polare fra a e a' come polo. Poniamo simbolicamente:

$$\Pi = X_a^{\nu}$$
$$\Pi' = (X x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\nu}$$

sarà

$$P = X_a^{\nu-1} X_{a'}$$
$$P' = (X x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\nu-1} (X x'_1 \dots x'_{n-1})\,.$$

Dico che l'operazione

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_{x_1 x'_1} & \Delta_{x_1 x'_2} & \dots & \Delta_{x_1 x'_{n-1}} \\ \Delta_{x_2 x'_1} & \Delta_{x_2 x'_2} & \dots & \Delta_{x_2 x'_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{x_{n-1} x'_1} & \Delta_{x_{n-1} x'_2} & \dots & \Delta_{x_{n-1} x'_{n-1}} \end{vmatrix}$$

operata su Π' dà P'.

Supponiamo infatti che per $\tau < n-1$, coll'operazione

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta_{x_1 x'_1} & \dots & \Delta_{x_1 x'_\tau} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{x_\tau x'_1} & \dots & \Delta_{x_\tau x'_\tau} \end{vmatrix}$$

l'espressione $(X x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\nu}$ diventi

$$c \,.\, (X x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\nu-1} (X x'_1 x'_2 \dots x'_\tau x_{\tau+1} \dots x_{n-1}).$$

Dico che

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} \Delta_{x_1 x'_1} & \dots & \Delta_{x_1 x'_\tau} & \Delta_{x_1 x'_{\tau+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{x_\tau x'_1} & \dots & \Delta_{x_\tau x'_\tau} & \Delta_{x_\tau x'_{\tau+1}} \\ \Delta_{x_{\tau+1} x'_1} & \dots & \Delta_{x_{\tau+1} x'_\tau} & \Delta_{x_{\tau+1} x'_{\tau+1}} \end{vmatrix}$$

operata sulla stessa espressione, dà:

$$c' \,.\, (X x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\nu-1} (X x'_1 \dots x^1_\tau x^1_{\tau+1} x_{\tau+2} \dots x_{n-1})\,.$$

I minori formati colle prime τ orizzontali di Δ'' sono tutti del tipo Δ' e si ottengono da Δ' scambiando consecutivamente ciascuna x' con $x'_{\tau+1}$. Conoscendo quindi il risultato di Δ' sull'espressione possiamo con un semplice scambio di indici conoscere il risultato di questi minori sull'espressione. Sviluppando quindi Δ'' secondo gli

elementi dell'ultima orizzontale, avremo che il risultato di Δ'' operato sull'espressione è, a meno del fattore comune c:

$$\begin{aligned} &\Delta_{x_{\tau+1}x'_{\tau+1}} (X x_1 \dots x_{n-1})^{\nu-1} (X x'_1 \dots x'_\tau x_{\tau+1} \dots x_{n-1}) \\ -&\Delta_{x_{\tau+1}x'_{\tau}} \ (X x_1 \dots x_{n-1})^{\nu-1} (X x'_1 \dots x'_{\tau-1} x'_{\tau+1} x_{\tau+1} \dots x_{n-1}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -&\Delta_{x_{\tau+1}x'_{1}} \ (X x_1 \dots x_{n-1})^{\nu-1} (X x'_{\tau+1} x'_2 \dots x'_{\tau-1} x'_\tau x_{\tau+1} \dots x_{n-1}) = \\ =&(\nu-1)(X x_1 \dots x_{n-1})^{\nu-2} \Sigma_{x'} (X x_1 \dots x_\tau x'_{\tau+1} x_{\tau+2} \dots x_{n-1})(X x'_1 \dots x'_\tau x_{\tau+1} \dots x_{n-1}) \\ +&(\tau+1)(X x_1 \dots x_{n-1})^{\nu-1} (X x'_1 \dots x'_{\tau+1} x_{\tau+2} \dots x_{n-1}) \end{aligned}$$

dove con $\Sigma_{x'}$ intendiamo la somma delle espressioni che si ottengono permutando le x' fra loro e prendendo col segno negativo quelle ottenute con un numero dispari di trasposizioni, e non tenendo conto delle permutazioni solo fra le prime τ, x'.

Ora l'espressione precedente in virtù d'una identità-zero, non è altro che appunto

$$(\nu+\tau)(X x_1 \dots x_{n-1})(X x'_1 \dots x'_{\tau+1} x_{\tau+2} \dots x_{n-1})$$

§ V.

Lemma 6°: « Se in Π vi è il coefficiente a a primo grado, per Π sarà vero il « teorema fondamentale, se, trasformando il coefficiente a nelle serie di variabili « $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, e ottenuto così Π', per Π' sia vero il teorema fondamentale ».

Supposto Π' sotto la forma (Π') data dal secondo enunciato del teorema, basterà dimostrare che (Π') può sempre trasformarsi in modo che, essendo pur dello stesso tipo, cioè assieme di parti contenenti ciascuna per fattore un'identità-zero, e ricavabile da Π' col semplice aggiungere e togliere opportunamente termini da esso, venga a contenere le x non altrimenti che sempre o in uno stesso determinante, o in un aggregato del tipo $\Sigma_a \pm a_{1x_1} a_{2x_2} \dots a_{n-1\,x_{n-1}}$.

Sia A un termine di (Π'). Poichè Π' non muta in valore assoluto scambiando fra loro le x in qualunque modo, e propriamente non muta neanche di segno o muta solo di segno secondochè la permutazione fatta corrisponde ad un numero pari o dispari di trasposizioni, così è chiaro che, a meno d'un fattore numerico, si può sempre considerare in luogo d'ogni termine A, la espressione $\Sigma_x \pm A$ dove Σ_x si estende a tutte le permutazioni fra le x.

Dico che $\Sigma_x \pm A$ può sempre trasformarsi in un'altra in cui le x compariscano appunto sotto i due tipi avanti detti. Giacchè se A non contiene che fattori lineari in x, cioè è

$$A = A' . a_{1x_1} a_{2x_2} \dots a_{n-1x_{n-1}}$$

allora

$$\Sigma_x \pm A = A' (a_{1x_1} \dots a_{n-1\,x_{n-1}}) .$$

Supponiamo invece che A contenga almeno un determinante in x; sia cioè

$$A = (x_1 x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n) F \{ x_{\tau+1} \dots x_{n-1} \}$$

dove F indica una certa funzione qualunque delle altre x e delle altre variabili e coefficienti. Allora

$$\Sigma_x \pm A = \Sigma_x \pm (x_1\, x_2 \dots x_\tau\, y_{\tau+1} \dots y_n)\, F \left\{ x_{\tau+1} \dots x_{n-1} \right\} .$$

Ora è noto dalla teoria delle sostituzioni che indicando con $\Sigma_x^{(\tau+1)}$ l'assieme di tutte le sostituzioni che permutano solo $x_1\, x_2 \dots x_\tau\, x_{\tau+1}$ lasciando inalterati tutti gli altri elementi, è

$$\Sigma_x = S_x \,.\, \Sigma_x^{(\tau+1)}$$

dove con S_x si indica un assieme di sostituzioni fra le x, onde possiamo scrivere:

$$S_x \,.\, \Sigma_x^{(\tau+1)} \pm (x_1\, x_2 \dots x_\tau\, y_{\tau+1} \dots y_n)\, F \left\{ x_{\tau+1} \dots x_{n-1} \right\} .$$

Ora F conterrà $x_{\tau+1}$ o in un determinante o in un fattore lineare; per effetto di identità-zero l'espressione precedente può dunque scriversi:

$$S_x \,.\, \Sigma y\, (x_1\, x_2 \dots x_\tau\, x_{\tau+1}\, y_{\tau+2} \dots y_n)\, F \left\{ y_{\tau+1}\, x_{\tau+2} \dots x_{n-1} \right\} .$$

Applicando ora successivamente lo stesso ragionamento, si vede infine che

$$\Sigma_x\, A = \Sigma_y\, (x_1\, x_2 \dots x_\tau\, x_{\tau+1} \dots x_{n-1}\, y_n)\, F \left\{ y_{\tau+1} \dots y_{n-1} \right\} .$$

Supponiamo ora che in A vi sia ancora un altro determinante in x, cioè

$$(x_{\tau+1} \dots x_{\tau+\tau'}\, z_{\tau'+1} \dots z_n) .$$

Operando allora la stessa trasformazione di avanti, ma prendendo invece per base questo nuovo determinante, si ha un'espressione diversa dalla precedente; io dico però che questa nuova espressione si riduce alla precedente adoperando solo identità-zero in cui le x stanno sempre riunite sotto i soliti due tipi.

Le due espressioni alle quali si arriva sarebbero le seguenti:

$$\Sigma_y\, (x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, y_n)\, (y_{\tau+1} \dots y_{\tau+\tau'}\, z_{\tau'+1} \dots z_n)\, F_1 \left\{ y_{\tau+\tau'+1} \dots y_{n-1} \right\}$$

$$\Sigma_z\, (x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, z_n)\, (z_{\tau'+1} \dots z_{\tau'+\tau}\, y_{\tau+1} \dots y_n)\, F_1 \left\{ z_{\tau'+\tau+1} \dots z_{n-1} \right\} .$$

Allora, essendo come avanti

$$\Sigma_y = S_y \,.\, \Sigma_y^{(n)}$$

dove $\Sigma_y^{(n)}$ indica le sole permutazioni di $y_{\tau+1} \dots y_{\tau+\tau'}\, y_n$, si ha, in forza di una identità-zero in cui le x compariscono sempre riunite in un unico determinante, che la prima espressione può scriversi:

$$S_y \,.\, F_1 \left\{ y_{\tau+\tau'+1} \dots \right\} \Sigma_z\, (x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, z_n)\, (y_{\tau+1} \dots y_{\tau+\tau_1}\, z_{\tau'+1} \dots z_{n-1}\, y_n) .$$

Portando ora avanti il simbolo Σ_z, e poi applicando ancora un ragionamento perfettamente analogo fra F_1 e il secondo determinante, e così di seguito, si vede infine che giungiamo alla seconda espressione.

Il termine A farà parte, in (Π'), del prodotto (A) di una certa identità-zero per un altro fattore. Possono darsi i seguenti casi:

1. L'identità-zero sia in ogni termine costituita da due fattori di cui uno sarà necessariamente allora un determinante, ma non contenga x. Allora:

a) l'altro fattore non contenga x;

b) l'altro fattore contenga x e sarà allora necessariamente un fattore lineare, e l'elemento x sia circolante;

c) x non sia circolante.

2. L'identità-zero contenga in ogni termine un determinante D in x. L'altro fattore sarà:

a) un fattore lineare non in x;

b) un fattore lineare in x;

c) un determinante senza x e gli elementi di D sieno circolanti;

d) un determinante senza x e una x di D sia circolante;

e) un determinante senza x e un altro elemento di D che non sia una x, sia circolante;

f) un determinante con x e nessuna nuova x sia circolante;

g) un determinante con x e una x nuova sia circolante.

3. L'identità-zero sia del terzo tipo, e allora:

a) non contenga x;

b) contenga x.

Dico che in ciascuno di questi casi effettuando la trasformazione su ciascun termine di (A), si ottiene sempre il prodotto d'un fattore per una identità-zero, oppure si ottiene identicamente zero.

Nel caso 1. *a*) sostituendo ad ogni termine la trasformazione avanti indicata si ottiene ancora il prodotto di una certa espressione per una identità-zero.

Nel caso 1. *b*) (A) è:

$$\Sigma_x \mathrm{F} \} x_{\tau+2} \dots x_{n-1} \{ (x_1 x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y\ ) \left| \begin{array}{l} (z_1 z_2 \dots \quad z_n)\, a_{x_{\tau+1}} \\ -(x_{\tau+1} z_2 \dots z_n)\, a_{z_1} \\ - \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Trasformando si ha:

$$\Sigma_y \mathrm{F} \} y_{\tau+2} \dots y_{n-1} \{ (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n) \left| \begin{array}{l} (z_1 z_2 \dots z_n \quad)\, a_{y_{\tau+1}} \\ -(y_{\tau+1} z_2 \dots z_n)\, a_{z_1} \\ - \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

e l'assunto è evidente. In un modo perfettamente analogo si procede pel caso 1. *c*).

Nel caso 2. *a*) (A) è:

$$\Sigma_x \mathrm{F} \} x_{\tau+1} \dots x_{n-1} \{ \Sigma (x_1 x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n)\, a_z$$

dove il secondo Σ indica che dobbiamo effettuare gli scambî di z cogli elementi del determinante, e mutare il segno ogni volta che si fa lo scambio. Scindendo in due parti possiamo scrivere:

$$\begin{array}{l} \tau!\ \Sigma_{z,y}\, a_z\, \Sigma_x (x_1 x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n)\, \mathrm{F} \} x_{\tau+1} \dots x_{n-1} \{ \\ -(\tau-1)!\ \Sigma_x \} x_{\tau+1} \dots x_{n-1} \{ [(x_1 x_2 \dots x_{\tau-1} z y_{\tau+1} \dots \quad y_n)\, a_{x_\tau} + \\ \qquad + (x_1 x_2 \dots x_{\tau-2} z x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n)\, a_{x_{\tau-1}} + \\ \qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad + (z x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n)\, a_{x_1}] \end{array}$$

dove i fattori $\tau!$, $(\tau-1)!$ compariscono perchè supponiamo che Σ_x non si estenda alle permutazioni delle sole τ o $(\tau-1)$ x fra loro, che stanno riunite in uno stesso

determinante. Facendo ora la trasformazione è facile riconoscere che si ha identicamente zero.

Nel caso 2. b) (A) può scriversi:

$$\Sigma_x \mathrm{F} \{ x_{\tau+2} \dots x_{\tau-1} \{ [(\tau+1)(x_1 x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n)\, a_{x_{\tau+1}} - (x_1 x_2 \dots y_\tau x_{\tau+1} y_{\tau+2} \dots y_n)\, a_{y_{\tau+1}} - \dots].$$

Facendo la trasformazione si ha, a meno del fattore comune $(\tau+1)!$:

$$\Sigma_y \mathrm{F} \left\{ y_{\tau+2} \dots y_{n-1} \right\} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n)\, b_{y_{\tau+1}}$$
$$- \Sigma_y^{(\tau+1)} \left\{ y_{\tau+2} \dots y_{n-1} \right\} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n)\, b_{y_{\tau+1}}$$
$$+ \Sigma_y^{(\tau+2)} \left\{ y_{\tau+1} y_{\tau+3} \dots y_{n-1} \right\} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n)\, b_{y_{\tau+2}}$$

dove $\Sigma_y^{(\tau+1)}, \dots$ rappresentano le permutazioni di tutte le y lasciando però sempre fisso l'elemento $y_{\tau+1}, \dots$ Indicando con $\binom{\tau+1}{\tau+2}, \dots$ la trasposizione dei due elementi $y_{\tau+1}, y_{\tau+2}; \dots$ la espressione superiore può scriversi:

$$\left\{ \Sigma_y - \left(1 + \binom{\tau+1}{\tau+2} + \binom{\tau+1}{\tau+3} + \cdots \right) \Sigma_y^{(\tau+1)} \right\} \mathrm{F} \left\{ y_{\tau+2} \dots y_{n-1} \right\} (x_1 \dots x_{n-1} y_n)\, b_{y_{\tau+1}}$$

e dalla teoria delle sostituzioni si sa che

$$\Sigma_y - \left(1 + \binom{\tau+1}{\tau+2} + \cdots \right) \Sigma_y^{(\tau+1)} = 0 .$$

Il caso 2. c) è analogo al caso 2. a).

Nel caso 2. d) (A) è:

$$\Sigma_x \mathrm{F} \{ x_{\tau+1} \dots x_{n-1} \{ \left| \begin{array}{l} (x_1 x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n)(z_1 z_2 \dots z_n) \\ -(x_1 x_2 \dots x_{\tau-1} z_1 y_{\tau+1} \dots y_n)(x_\tau z_2 \dots z_n) \\ - \dots \end{array} \right.$$

Colla trasformazione si ha:

$$\tau!\, \Sigma_y \ \mathrm{F} \left\{ y_{\tau+1} \dots y_{n-1} \right\} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n)(z_1 z_2 \dots z_n)$$
$$-(\tau-1)!\, \Sigma_{z_1 y} \mathrm{F} \left\{ y_{\tau+1} \dots y_{n-1} \right\} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n)(z_1 z_2 \dots z_n)$$
$$- \dots$$

dove $\Sigma_{z_1 y}, \Sigma_{z_2 y}, \dots$ indicano rispettivamente le permutazioni fra gli elementi z_1 e le y, z_2 e le y, ecc. Ma in generale

$$\Sigma_{z_s y} = \Sigma_y + \Sigma_y \left\{ \binom{z_s}{y_{\tau+1}} + \binom{z_s}{y_{\tau+2}} + \cdots \right\}$$

onde si ha, meno a del fattore $(\tau-1)!$ comune:

$$- \Sigma_y \mathrm{F} \left\{ y_{\tau+1} \dots \quad y_{n-1} \right\} \left[1 + \binom{z_1}{y_n} + \binom{z_2}{y_n} + \cdots \right] (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n)(z_1 z_2 \dots z_n)$$
$$- \Sigma_y \mathrm{F} (x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n) \left[1 + \binom{z_1}{y_{\tau+1}} + \binom{z_2}{y_{\tau+1}} + \cdots \right] \mathrm{F} \left\{ y_{\tau+1} \dots y_{n-1} \right\} (z_1 z_2 \dots z_n)$$
$$- \dots$$

e chiaramente

$$\left[1+\begin{pmatrix} z_1 \\ y_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z_2 \\ y_n \end{pmatrix}+\cdots\right](x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, y_n)\,(z_1\, z_2 \dots z_\tau)$$

$$\left[1+\begin{pmatrix} z_1 \\ y_{\tau+1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} z_2 \\ y_{\tau+1} \end{pmatrix}+\cdots\right]\mathrm{F}\left\{y_{\tau+1} \dots y_{n-1}\right\}(z_1\, z_2 \dots z_n)$$

. . . .

sono identità-zero del tipo che noi vogliamo, moltiplicate, meno la prima, per altri fattori.

Analogamente si tratta il caso 2. e).

Nel caso 2. f) si ha:

$$\Sigma_x \mathrm{F}\left\{x_{\tau'+1} \dots x_{n-1}\right\}\left|\begin{array}{l} (x_1\, x_2 \dots x_\tau\, y_{\tau+1} \dots y_n)\,(x_{\tau+1} \dots x_{\tau+\tau'}\, z_{\tau'+1} \dots z_n) \\ -(x_{\tau+1}\, x_2 \dots x_\tau\, y_{\tau+1} \dots y_n)\,(x_1\, x_{\tau+2} \dots x_{\tau+\tau'} \dots z_n) \\ - \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Colla trasformazione e togliendo il fattore comune $(\tau+1)!$, si ha:

$$\left\{\Sigma_y - \left[1+\begin{pmatrix} \tau+1 \\ \tau+2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \tau+1 \\ \tau+3 \end{pmatrix}+\cdots\right]\Sigma_y^{(\tau+1)}\right\}\mathrm{F}\left\{x_{\tau'+1} \dots x_{n-1}\right\}(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, y_n)(y_{\tau+1} \dots z_n)$$

che è identicamente zero.

Nel caso 2. g) si ha:

$$\Sigma_x \mathrm{F}\left\{x_{\tau'+1} \dots x_{n-1}\right\}\left|\begin{array}{l} (x_1\, x_2 \dots x_\tau\, y_{\tau+1} \dots y_n)\,(x_{\tau+1} \dots x_{\tau+\tau'}\, z_{\tau'+1} \dots z_n) \\ -(z_{\tau'+1}\, x_2 \dots y_n)\,(x_{\tau+1} \dots x_{\tau+\tau'}\, x_1 \dots z_n) \\ - \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Trasformando e riducendo si ha:

$$\left\{\Sigma_y - \Sigma_{yz_{\tau'+1}} + \Sigma^{(\tau+1)}_{yz_{\tau'+1}}\begin{pmatrix} y_{\tau+1} \\ z_{\tau'+1} \end{pmatrix} + \Sigma^{(\tau+2)}_{yz_{\tau'+1}}\begin{pmatrix} y_{\tau+2} \\ z_{\tau'+1} \end{pmatrix} + \cdots\right\}$$

operata su di una certa funzione; ora questa espressione è zero come è noto per la teoria delle sostituzioni.

Il caso 3. a) si tratta come 1. a); resta quindi solo il caso 3. b).

Allora l'identità-zero sarà unicamente del tipo

$$(x_1\, x_2 \cdots x_\tau\, y_{\tau+1} \dots y_n)\,(a_1\, a_2 \dots a_n) - \Sigma_a\, a_{1x_1}\, a_{2x_2} \dots a_{ny_n} \qquad (\alpha)$$

Supponiamo prima che il fattore, che possiamo supporre sempre monomio, che moltiplica questa identità-zero, non contenga alcun altro determinante in x. Allora necessariamente le altre x stanno distribuite in fattori lineari

$$\mathrm{B}(x) = b_{\tau+1\, x_{\tau+1}} \dots b_{n-1\, x_{n-1}}\,.$$

Allora si ha

$$\Sigma_x (a_1\, a_2 \dots a_n)\,\mathrm{B}(x)\,(x_1\, x_2 \dots x_\tau\, y_{\tau+1} \dots y_n)$$
$$-\Sigma_x \mathrm{B}(x)\,\Sigma_a\, a_{1x_1} \dots a_{ny_n}\,.$$

Colla trasformazione si ha

$$\tau!\,(a_1\, a_2 \dots a_n)\,\Sigma_y \mathrm{B}(y)\,(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, y_n) -$$
$$-\Sigma_a\,(a_{1x_1} \dots a_{\tau x_\tau}\, b_{\tau+1\, x_{\tau+1}} \dots b_{n-1\, x_{n-1}})\, a_{\tau+1, y_{\tau+1}} \dots a_{ny_n}\,.$$

Per comodità mutiamo ora le variabili $x_1\, x_2 \dots x_{n-1}$ nell'unico coefficiente b_n, e si ha allora, a meno del fattore comune τ', che comparisce anche nel secondo termine

quando si intenda che Σ_a non si estenda alle permutazioni fra loro di $a_1 a_2 \dots a_\tau$ le quali vengono a trovarsi racchiuse in uno stesso determinante:

$$\Sigma_b (a_1 a_2 \dots a_n) b_{\tau+1, y_{\tau+1}} \dots b_{n y_n}$$
$$- \Sigma_a (a_1 a_2 \dots a_\tau b_{\tau+1} \dots b_n) a_{\tau+1\, y_{\tau+1}} \dots a_{n y_n}$$

Ora adoperando un procedimento perfettamente analogo a quello tenuto per stabilire la trasformazione di un termine A al principio di questo paragrafo, è chiaro che questa espressione si riduce a zero adoperando solo identità-zero, e quindi aggiungendole e togliendole opportunamente termini essa potrà ridursi ad una somma di identità-zero moltiplicate per fattori.

Se poi nel fattore che moltiplica (α) vi è almeno un altro determinante in x, allora si ha:

$$\Sigma_x (a_1 a_2 \dots a_n) \mathrm{F} \left\{ x_{\tau+\tau'+1} \dots x_{n-1} \right\} (x_{\tau+1} \dots x_{\tau+\tau'} z_{\tau'+1} \dots z_n)(x_1 x_2 \dots x_\tau y_{\tau+1} \dots y_n)$$
$$- \Sigma_x \qquad \mathrm{F} \left\{ x_{\tau+\tau'+1} \dots x_{n-1} \right\} (x_{\tau+1} \dots\dots z_n) \Sigma_a a_{1x_1} \dots a_{n y_n} .$$

Effettuiamo la trasformazione ma prendendo per base il determinante in z.

Si ha allora

$$\Sigma_z \mathrm{F} \left\{ z_{\tau+\tau'+1} \dots z_{n-1} \right\} (x_{\tau+1} \dots x_1 \dots x_{n-1} z_z) \left\{ (a_1 a_2 \dots a_n) (z_{\tau'+1} \dots z_{\tau+\tau'} y_{\tau+1} \dots y_n) - \right.$$
$$\left. - \Sigma_a a_{1 z_{\tau'+1}} \dots a_{n y_n} \right\} .$$

Con ciò sono considerati tutti i possibili casi.

Supponiamo dunque in tutti i termini di (Π') fatta la trasformazione indicata.

Possiamo allora dalle variabili x passare senz'altro al coefficiente unico a.

Nel primo membro Π' diventa Π, e nel secondo membro si ha un assieme di termini ciascuno contenenti per fattore un'identità-zero. Dico che questa espressione del secondo membro può ridursi al tipo di quelle date dal secondo enunciato del teorema fondamentale, cioè ad un tipo che si ricava da Π coll'aggiungervi e togliervi opportunamente termini e raggrupparli convenientemente. Infatti (Π'), ha proprio, per ipotesi, una tal forma rispetto a Π'. Ora colla trasformazione di (Π') e poi coll'introduzione dell'unico coefficiente a in luogo delle x, è chiaro che ad ogni termine monomio di Π che compariva in (Π') vengo a sostituire un termine di Π.

Inoltre a due termini simili che compariscono in (Π') e non si trovano in Π', l'uno facente parte d'una certa identità-zero, e l'altro d'un'altra, vengo a sostituire due espressioni in generale fra loro diverse.

Giacchè ciò che direttamente si ricava dalle considerazioni di avanti è che da una identità-zero che comparisce in (Π') posso colla trasformazione ridurmi ad un assieme di identità-zero nel solito senso, ma però la trasformazione d'un termine non è indipendente da quella di un altro. Onde è possibile che due termini pure eguali, ma l'uno faciente parte in (Π') d'una certa identità-zero, e l'altro d'un altra, debbano trasformarsi in modo diverso.

Però noi possiamo facilmente dimostrare che nella trasformazione anzidetta d'una identità-zero, la trasformazione d'un termine è affatto indipendente da quella d'un altro della stessa identità-zero, pure ottenendo sempre espressioni del solito tipo.

Giacchè noi abbiamo già dimostrato che in qualunque modo si trasformi il termine A, i risultati che si hanno possono ridursi l'uno all'altro adoperando solo identità-zero nelle quali le x compariscono sempre riunite in un unico determinante.

Onde se si ha

$$A'(a+b+\cdots)$$

dove $a+b+\cdots$ sia un' identità-zero, e il termine $A'a=A$ lo debba trasformare in $\Sigma A'_1 a_1$ per ottenere dalla precedente espressione un assieme di identità-zero

$$\Sigma A'_1(a_1+b_1+\cdots)$$

io posso invece anche trasformarlo in $\Sigma A'_2 a_2$ e scrivere identicamente

$$\Sigma A'_2 a_2+\Sigma A'_1 b_1+\cdots=\Sigma A'_1(a_1+b_1\cdots)-(\Sigma A'_2 a_2-\Sigma A'_1 a_1)$$

e la seconda parte è un assieme di identità-zero, in cui le x stanno riunite sempre tutte in un unico determinante.

Quindi si vede che a due termini simili di (Π') posso sempre supporre sostituite due espressioni simili nella trasformata che si ottiene quando si introduce in luogo delle x il coefficiente a, a meno di altri termini aggiunti e tolti.

Con ciò il lemma 6° è completamente dimostrato.

§ VI.

Lemma 7°: « Più generalmente, se il teorema si verifica per la trasformata Π' « d'una espressione Π, si verificherà per Π ».

È chiaro in primo punto, che basta dimostrare il teorema pel caso in cui Π' sia ricavato da Π colla trasformazione di un sol coefficiente, o, ciò che è lo stesso, d'una sola variabile. Giacchè supposto p. es. che colla trasformazione d'un altro coefficiente o variabile si abbia da Π', Π'', e supposto che il teorema fondamentale sia vero per Π'' sarà allora vero per Π', e quindi per Π, e così di seguito.

Supponiamo, per fissare le idee, che Π' si ricavi da Π colla trasformazione del coefficiente a nelle variabili $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$.

Π contenga a ad un certo grado r. Applichiamo a Π un certo numero di volte l'operazione di polare fra il coefficiente a e certi altri coefficienti a', a''....

Posso allora ridurmi ad un' espressione P contenente a, a', a'', ... tutti linearmente. Trasformando ora in P il coefficiente a nelle x, il coefficiente a' nelle x', ecc., si abbia P'. Per il lemma 5° P' è una polare di Π', onde se il teorema fondamentale si verifica per Π' si verificherà per P'. Ma per il lemma 6° verificandosi per P' si verificherà per P e quindi per Π di cui P non è che una polare (lemma 2°), onde ecc.

§ VII.

Lemma 8°: « Non è possibile alcuna relazione identica fra r forme lineari di « specie n con n o meno di n variabili, essendo r qualunque » (1).

Lemma 9°: « Se la espressione del tipo invariantivo Π che sia zero, e non abbia « alcun fattore comune a tutti i termini, contiene p serie di coefficienti e q serie di « variabili sarà $p+q>n+1$ » (2).

(1) Capelli, *Fondamenti di una teoria generale* ecc. Mem. Acc. Lincei, serie III, vol. XII, § 18.

(2) Vedi mia Nota, *Sopra un teorema fondamentale* ecc. Rendiconti Lincei, vol. 4, 1° semestre 1888, pag. 122.

Lemma 10°: « Il teorema fondamentale si verifica per l'identità di Gordan, in« tendiamo, cioè dire, che la differenza fra il primo e secondo membro dello sviluppo « di Gordan applicato quante volte si voglia, e su una funzione del tipo invarian« tivo ma formata in modo affatto generale, si può verificare identicamente zero, fa« cendo uso solo di opportune identità-zero ».

Intendiamo qui parlare dello sviluppo di Gordan esteso dal prof. Capelli alle forme ennarie in una pregevole Memoria (1).

Per dimostrare questo lemma procediamo per gradi e supporremo prima il caso semplice che la funzione Π su cui si operi risulti solo di aggregato di fattori lineari relativamente alle variabili rispetto cui vuole applicarsi la formola di Gordan.

Sieno $x_1\, x_2 \ldots x_n$ le n serie di variabili coniugate fra le quali si applica una prima volta la formola. Comparisce allora in ogni termine il determinante $(x_1\, x_2 \ldots x_n)^\nu$ moltiplicato per ν determinanti fatti fra coefficienti, del tipo cioè $(a_1\, a_2 \ldots a_n)$. Adoperando quindi identità-zero del tipo terzo ci riduciamo ad un aggregato di forme lineari con sole x per variabili, perchè ogni altro fattore, contenente un'altra variabile, contenuto in Π, non viene alterato dallo sviluppo di Gordan, e quindi è fattore comune al primo e secondo membro.

Per il lemma 7° si riconosce intanto per questo caso la verità dell'assunto.

Supponiamo ora che si applichi più volte lo sviluppo di Gordan. Supponiamolo applicato una prima volta e il secondo membro diventi

$$\Pi = \Sigma\, (x_1\, x_2 \ldots x_n)^\nu\, (a_1\, a_2 \ldots a_n)^\lambda\, (a'_1\, a'_2 \ldots a'_n)^{\lambda'} \ldots \Delta \Pi' = \Pi_1 ,$$

dove $\lambda + \lambda' + \cdots = \nu$ e Π' è una funzione formata di soli fattori lineari colle sole variabili $x_2\, x_3 \ldots x_n\, x_{n+1} \ldots$, e Δ è una certa operazione di polare.

Riapplicando a Π' lo stesso sviluppo con che si abbia Π'_1, abbiamo avanti dimostrato che con sole identità-zero si verifica la eguaglianza di Π' e del suo sviluppo, cioè il teorema fondamentale si verifica per $\Pi' - \Pi'_1$, onde si verificherà ancora (lemma 1°) per $\Delta(\Pi' - \Pi'_1) = \Delta\Pi' - \Delta\Pi'_1$, dunque con sole identità-zero possiamo ridurci da $\Delta\Pi'_1$ a $\Delta\Pi'$, ma con sole identità-zero possiamo ridurci da Π_1 a Π dunque il teorema sussiste anche che si supponga applicata due volte, e analogamente più volte, la formola di Gordan.

Resta a dimostrare che il teorema fondamentale si verifica ancora per lo sviluppo di Gordan applicato ad una funzione Π qualunque, ma sempre del tipo invariantivo.

Supponiamo, come avanti, che le variabili coniugate per una prima applicazione dello sviluppo di Gordan sieno $x_1\, x_2 \ldots x_n$. Possiamo sempre supporre Π monomio, ripetendo lo stesso ragionamento su ciascuno dei suoi termini se è polinomio.

Allora se in Π comparisce il determinante $(x_1\, x_2 \ldots x_n)^\mu$, questo si riprodurrà alla stessa potenza in tutti i termini dello sviluppo, e quindi è un fattore comune a tutti i termini, che si può sopprimere.

Sono da considerarsi allora solo i determinanti in cui comparisca almeno una delle x, e almeno un' altra variabile y.

(1) Capelli, op. cit.

In ciascuno di siffatti determinanti mutiamo y in $n-1$ serie di coefficienti scelti a piacere, e allora Π si ridurrà ad un assieme di termini Π' nei quali le x non compariscono che solo sotto il tipo di fattori lineari.

Poichè questa trasformazione non altera per nulla le variabili x coniugate fra le quali si applica lo sviluppo di Gordan, così chiaramente il secondo membro diventerà uno sviluppo di Gordan di ciò che diventa il primo membro. Indicando con Π_1, Π'_1 i secondi membri di Π, Π', si ha che il teorema fondamentale vale per $\Pi'-\Pi_1$ in virtù della dimostrazione precedente; varrà dunque ancora per $\Pi-\Pi_1$ in virtù del lemma 7°. Infine se si supponga anche qui lo sviluppo di Gordan non applicato una sola volta, ma più volte, non v'è a ripetere il ragionamento avanti sviluppato.

§ VIII.

Veniamo finalmente a dimostrare il teorema fondamentale. Si abbia l'espressione Π zero con p coefficienti, e q variabili. Si trasformino allora $p-n-1$ coefficienti in altrettante serie di variabili nuove (se $p<n$ questa trasformazione non si farà), e si abbia Π'. Applicando allora successivamente lo sviluppo di Gordan, per far la qual cosa non abbiamo d'altro bisogno che d'adoperare sempre e solo identità-zero, cioè aggiungere e togliere certi termini, raggrupparli in certo modo e ad un gruppo di essi sostituire un gruppo di altri termini eguale al primo in virtù di identità-zero, possiamo ridurci a funzioni contenenti $p'<n$ coefficienti e $n-1$ variabili. Per il lemma 8° queste funzioni saranno identiche, dunque con sole identità-zero si verifica $\Pi'=0$; pel teorema del § VI allora si ha che con sole identità-zero si potrà verificare $\Pi=0$.

Potremo anche dire così: applichiamo a Π la formola di Gordan sino a ridurci a $n-1$ variabili; applichiamola poi anzichè fra variabili, fra coefficienti [1] e ci riduciamo a $n-1$ coefficienti; dovranno allora ritrovarsi espressioni identiche.

[1] Capelli, op. cit. § 27.

RELAZIONE

letta dal Socio G. Struever, relatore, a nome anche del Socio P. Blaserna, nella seduta del 3 giugno 1888, sulla Memoria dell'ing. Giuseppe La Valle, intitolata: *Sul diopside delle « Borne de' Brous » presso Ala in Val d'Ala (Piemonte).*

« L'ingegnere Giuseppe La Valle, i cui precedenti lavori cristallografici *sul diopside della Testa Ciarva in Val d'Ala*, furono già inseriti negli Atti della nostra Accademia, presenta ora, quale appendice ai suoi studî anteriori, una breve Memoria che tratta dei cristalli dello stesso minerale, provenienti da alcuni massi erratici della regione detta « Borne de'Brous » dietro il Becco della Corbassera, sul territorio del comune di Ala verso il confine con quello di Ceres, sulla sinistra della Stura.

« I cristalli che il La Valle pote' prendere ad esame, sono conservati, parte nel Museo mineralogico dell'Università di Roma, parte in quello dell' Università di Torino. Questi ultimi furono gentilmente messi a disposizione dell'autore dal professore Giorgio Spezia. Con tutto ciò, non furono che 10 i cristalli isolati o gruppi di cristalli, che permisero misure goniometriche. L'autore quindi si limita a descrivere brevemente le forme semplici e le combinazioni osservate, nonchè l'aspetto fisico delle singole faccie, e a comunicare le più attendibili misure ottenute, che pone a confronto con i valori calcolati per il diopside della Testa Ciarva. La Memoria è accompagnata da una tavola di 5 figure assai bene eseguite.

« La Commissione propone l'inserzione della Memoria nei volumi dell' Accademia. »

Sul diopside delle « Borne de' Brous » presso Ala in Val d'Ala (Piemonte).
Memoria dell'ing. GIUSEPPE LA VALLE

(Con una tavola)

In altra mia Memoria ho pubblicato lo studio cristallografico del diopside del banco di granato, racchiuso nel serpentino della Testa Ciarva al piano della Mussa in Val d'Ala ([1]) e mi riserbavo di descrivere quello proveniente da altri giacimenti della medesima località.

I cristalli che ora descrivo son quelli cui nel lavoro del prof. Strüver « *Cenni sui graniti massici delle Alpi piemontesi e sui minerali delle Valli di Lanzo* (Circondario di Torino) ([2]), si riferiscono le seguenti parole che riporto testualmente a maggior chiarezza:

« Prendendo il sentiero che dalla Corbassera conduce alle così dette *Borne* (ca- « verne) *de'Brous* donde si estraeva, tempo fa, la pietra ollare per la confezione di « utensili da cucina, incontriamo, vicino alle *Borne* e verso il confine dei territorî « di Ala e di Ceres, dei massi erratici di granato compatto in cui si trovarono pa- « recchi belli campioni, anzi i più splendidi esemplari di granato di Val d'Ala esi- « stenti nel Gabinetto mineralogico del Valentino, secondo i cercatori di minerali, « provengono da questa località.

« Sono cristalli di color rosso-bruno della combinazione }100{, }211{, }321{, }210{ « talvolta allungati nel senso di uno degli assi in modo da assumere l' aspetto di « una combinazione dimetrica, accompagnati da bei cristalli di clorite verde-scura « e da diopside quasi incoloro che presenta dominanti le forme }100{, }010{, }001{. »

Il materiale di cui mi son potuto servire consiste di n. 7 aggruppamenti di cristalli, di cui 5 soli misurabili, esistenti nella collezione del Museo di mineralogia della R. Università di Roma, i quali sono stati raccolti dal prof. Strüver; e di altri n. 5 grossi aggruppamenti di cristalli del Museo dell' Università di Torino che il prof. Spezia cortesemente volle mettere a mia disposizione, del che sento il dovere di ringraziarlo vivamente anche in questo luogo.

([1]) Atti della r. Acc. dei Lincei, giugno 1886.

([2]) G. Strüver, Memorie per servire alla descrizione della Carta geologica d'Italia, pubblicata a cura del r. Comitato geologico 1871. Firenze, V. I, p. 46. Vedi anche Neues Jahrbuch (1871). *Die Minerallagerstätten des Alathales in Piemont*, pag. 350.

I.

Aspetto generale dei cristalli

I 12 cristalli su menzionati sono in massima parte aggruppamenti di grossi e piccoli individui disposti in posizione parallela, o riuniti in modo irregolare.

Essi si presentano costantemente incolori o biancastri e trasparenti o pellucidi.

Tutti sono assai più sviluppati longitudinalmente ossia secondo l'asse verticale.

È abbastanza ricca di forme la zona dei prismi verticali, la quale contiene costantemente faccie lucentissime e piane.

Tra le faccie terminali sono estesi, ma sempre a superficie scabra, i pinakoidi }001{ e }$\bar{1}$01{; tutte le altre forme sono poco sviluppate.

Per tale carattere si ha una certa differenza fra l'aspetto di questi cristalli e quelli ordinarî della Mussa; giacchè in questi ultimi tali pinakoidi sono generalmente pochissimo sviluppati. Però si ha grande analogia fra i nostri cristalli e quelli incolori e trasparenti della Mussa che furono descritti dal Vom Rath e poscia da me nel sovracitato lavoro.

Le altre forme che sempre accompagnano le sovramenzionate, sono la }111{ e }$\bar{2}$21{ le quali in alcuni cristalli sono relativamente estese; ma in altri sono appena visibili. La forma }$\bar{2}$21{ anche in questi cristalli presenta la striatura caratteristica parallela a [110] che si nota sulle faccie della detta forma del diopside della Mussa.

In alcuni cristalli si aggiunge ancora la }$\bar{3}$31{ appena accennata, ed in altri la }$\bar{1}$11{ per lo più scabra.

Qualche volta ho osservato le forme }041{ e }021{ le quali come nel diopside della Mussa, si presentano in faccette piane e splendenti.

Esistono poche altre forme, le quali per essere sempre ruvide e come corrose non poterono essere determinate esattamente.

Gli aggruppamenti sono per lo più terminati ad una sola estremità dell' asse verticale, eccetto qualche gruppo del Museo di Torino in cui gli individui si mostrano terminati da ambidue i lati.

II.

Descrizione dei singoli cristalli

Cristalli del Museo di Roma.

N. 15951.

Fig. 1.

Aggruppamento irregolare di due grossi cristalli con molti altri piccoli, sviluppati longitudinalmente secondo l'asse verticale e terminati ad una sola estremità.

Nei cristalli più grossi sono state osservate le seguenti forme:

Nella zona verticale ben sviluppati e perfettamente splendenti i prismi

}110{, }310{, }510{

ed i pinakoidi

}100{ e }010{

Appannato e scabro il pinakoide }001{.

Bene estese ma appannate:

}1̄01{ , }111{ , }2̄21{

Lucentissime:

}021{ e }041{

e lateralmente a queste, ma poco estese

}132{ , }1̄51{ , }1̄31{

Queste ultime tre forme non furono da me osservate sul diopside della Testa Ciarva però la }132{ fu notata dal Siögren (1880) e più tardi dal Lehmann nel diopside di Nordmarken; la }1̄31{ è stata indicata dal Lévy nel diopside di Ala senza alcuna indicazione precisa del giacimento; e la }1̄51{ dal Kokscharow sul diopside di Achmatowsk.

Fra }111{ e }2̄21{ nei varî individui si osservano delle faccette ruvide, che non mi fu possibile di determinare.

Di tale aggruppamento fu raffigurato uno dei due individui più grossi al n. 1 della tavola.

N. 15953.

Fig. 2.

Aggruppamento di tre individui appiattiti secondo }100{ e compenetrati fra loro come rappresenta il disegno.

In tutti e tre gli individui osservasi il pinakoide }001{ molto esteso ma appannato e lateralmente a questo vi si vedono:

}111{ , }011{ , }021{ , }2̄21{

tutte quasi affatto appannate; non che poco estesa la forma }1̄01} anch'essa priva di splendore.

Bella però e splendentissima è la zona dei prismi verticali nella quale esistono oltre ai pinakoidi

}100{ e }010{

le forme

}110{ , }310{ , }510{.

N. 15954.

Cristallo rotto in mezzo e risanato in posizione non perfettamente parallela, appiattito secondo }100{ e terminato superiormente da }1̄01{ appannata, e da }111{ abbastanza estesa, ma scabra.

I prismi della zona verticale sono splendentissimi.

N. 15956.

Grosso cristallo appiattito secondo }100{ terminato da }001{ e da }1̄01{ predominanti e appannate, e dalle seguenti forme poco sviluppate, ma splendenti:

}111{ , }221{ , }2̄21{ , }3̄31{ , }1̄11{ , }1̄12{

ed appena accennata la

}041{

Le faccie della zona verticale si presentano in parte striate nel senso [001], ed in parte vi sono addossati individui lamellari in modo che non si possono ottenere misure goniometriche attendibili.

N. 15957.

Piccolo cristallo incastrato fra altri di diopsidev ariamente disposti, con grosso cristallo di granato rosso giacinto presentante le forme {110}, {211}, {321} e con clorite.

Per la disposizione dell'aggruppamento non fu possibile sottoporlo a misure goniometriche, salvo parte della zona dei prismi verticali, ove si riconobbe

{110} e {310}

Il cristallo è terminato ad una sola estremità dalle forme poco splendenti

{$\bar{1}$01} e {111}.

Cristalli del Museo di Torino.

Cristallo I°.

Fig. 3.

Questo cristallo è poco appiattito nel senso normale a {100} e ci presenta la seguenti dimensioni:

$5^{mm} — 7^{mm}5 — 29^{mm}$.

Nella zona vertica'e osservansi oltre ai pinakoidi {100} e {010} i prismi:

{510}, {310}, {110}

dei quali i primi due molto bene sviluppati.

Ad una delle estremità si hanno molto sviluppate, ma scabre

{111} e {$\bar{1}$01}

appena visibili le:

{$\bar{2}$21}, {001}, {041}.

L'unica zona che pote' misurarsi esattamente fu quella dei prismi verticali.

Cristallo II.

Fig. 4.

Grosso aggruppamento di cristalli, alcuni in posizione parallela, altri irregolarmente disposti, tutti però allungati secondo l'asse delle Z ed appiattiti normalmente a {100}.

Ciascun individuo è terminato completamente da ambidue le estremità e presenta le forme seguenti:

Nella zona dei prismi verticali, oltre ai pinakoidi

{100} e {010}

le forme tutte splendentissime:

}510{ , }310{ , }110{

Poco lucenti poi:

}111{ , }$\bar{2}$21{ , }$\bar{1}$11{

Scabre le:

}001{ e }$\bar{1}$01{

Inoltre }041{ lucente ma strettissima
}021{ piuttosto lunga ma appannata
}omn{ ove $\frac{m}{n} < 2$ scabra.

Cristallo III.

Fig. 5.

Aggruppamento di più individui dei quali 6 principali tutti in posizione parallela e per lo più appiattiti normalmente a }100{.

In essi osservansi oltre ai pinakoidi

}100{ e }010{

nella zona dei prismi verticali, tutte splendenti, le forme:

}310{ , }110{ , }510{

Poco lucenti:

}111{ , }$\bar{2}$21{ , }021{ , }011{ , }001{ , }$\bar{1}$01{

E finalmente appena accennate

}041{ e }$\bar{1}$12{.

Quasi tutti i singoli individui si presentano terminati da ambidue le estremità e mostrano le faccie terminali disugualmente sviluppate, infatti mentre da un lato predominano:

}111{ , }$\bar{1}$01{ , }021{ , }$\bar{2}$21{

dall'altro invece sono maggiormente sviluppate

}001{ , }111{ , }$\bar{2}$21{

e vi mancano quasi affatto tutte le altre.

Cristallo IV.

Altro aggruppamento di più individui in posizione parallela terminati alle due estremità e presentanti le forme seguenti:

I pinakoidi }100{ e }010{.

I prismi verticali

}510{ , }310{ , }110{

Le forme terminali

}111{ , }$\bar{2}$21{ , }$\bar{1}$01{ , }021{ , }041{ , }001{ , }$\bar{1}$12{

Anche in questo cristallo i singoli individui terminati da ambedue le estremità presentano le forme omologhe disegualmente sviluppate.

Cristallo V.

Aggruppamento di un grosso cristallo con altri dei quali la più parte in posizione irregolare.

Ciascuno individuo è terminato nettamente ad una sola estremità.

Vi potei determinare le seguenti forme:

Lucentissime

}100{ , }010{ , }510{ , }310{ , }110{

Lunghe ma poco lucenti:

}001{ , }$\bar{1}$01{ , }111{

Piuttosto estesa ma appannata }421{.

Lucente e striata orizzontalmente? }501{

Pochissimo sviluppata }$\bar{2}$21{.

III.

Nel quadro che segue, sono riassunte le combinazioni dei 10 cristalli studiati, onde dare un'idea della relativa frequenza delle singole forme, benchè il numero dei cristalli si possa forse ritenere troppo esiguo per un tale studio.

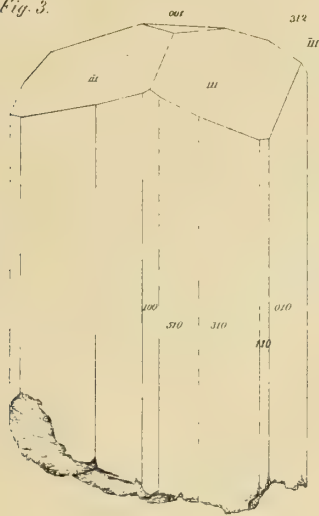
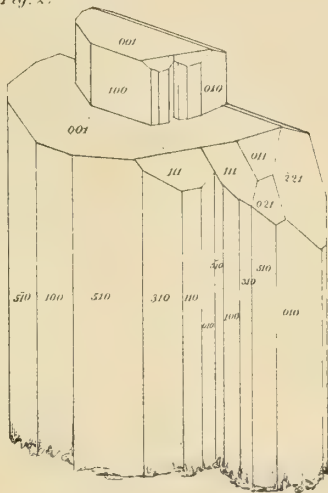
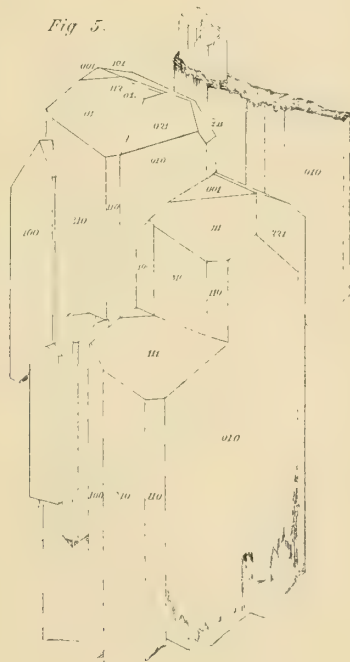
		100	010	001	110	310	510	$\bar{1}$01	501	021	041	011	111	132	221	421	$\bar{2}$21	$\bar{1}$51	$\bar{1}$31	$\bar{3}$31	$\bar{1}$11	$\bar{1}$12
Museo di Roma	15951	×	×	×	×	×	×	×		×	×		×	×			×	×	×			
	15953	×	×	×	×	×	×	×		×		×	×				×					
	15954	×	×	×	×	×	×	×					×									
	15956	×	×	×	×	×	×	×			×		×		×		×			×	×	×
	15957	×	×	×	×	×	×	×					×									
Museo di Torino	1.°	×	×	×	×	×	×	×			×		×				×					
	2.°	×	×	×	×	×	×	×		×	×		×				×				×	
	3.°	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×				×					×
	4.°	×	×	×	×	×	×	×		×	×		×				×					×
	5.°	×	×	×	×	×	×	×	×				×			×	×					
		10	10	10	10	10	10	10	1	5	6	2	10	1	1	1	8	1	1	1	2	3

Onde le forme per frequenza si seguono in quest'ordine:

}100{ }010, }$\bar{1}$01{ }111{ }$\bar{2}$21{ }001{ }110{ }310{ }510{ }041{ }021{ }$\bar{1}$12{ }$\bar{1}$11{
}011{ }501{ }132{ }221{ }421{ }$\bar{1}$51{ }$\bar{1}$31{ }$\bar{3}$31{.

IV.

Dal piccolo numero dei cristalli studiati, e per l'aspetto fisico delle faccie di essi, non potei ottenere che pochissime misure attendibili, onde non ho creduto poter su esse calcolare le costanti per il diopside di cui tratto, allo scopo di paragonarle con quelle calcolate pel diopside della Mussa; mi limito quindi a registrare nella seguente tabella le misure goniometriche ottenute per paragonarle coi valori calcolati pel diopside della Mussa.

Angoli	Misurati sui cristalli di cui trattasi	Calcolati pel diopside della Mussa	Differenze
100:510	11°.46′. —	11°. 51′. 26″	— 5′.26″
:310	19. 18. 48	19. 17. 10	+ 1. 38
:110	46. 26. 24	46. 23. 26	+ 2. 58
010:041	23. 46. 20	23. 47. 27	— 1. 7
:021	41. 25. —	41. 24. 12	+ 0. 48
:132	51. 55. app.	52. 24. 20	+ 30. 40
132:041	29. 16.	29. 40. 11	— 24. 11
:111	16. 58. app.	16. 12. 42	+ 45. 18
:021	14. 33. app.	14. 46. 41	— 13. 41
$\bar{1}$51:010	19. 23. —	19. 23. 51	— 0. 51
:041	12. 11. 20	12. 10. 56	+ 0. 24
:$\bar{1}$31	11. 6. — app.	11. — 31	+ 5. 29
$\bar{1}$31:021	20. 53. — app.	21. 8. 15	— 15. 15

Lit Bruno e Salomone Roma

RELAZIONE

letta dal Socio G. Struever, relatore, a nome anche del Socio S. Cannizzaro, nella seduta del 6 maggio 1888, sulla Memoria del prof. Francesco Mauro, intitolata: *Studio sui fluossisali di molibdeno.*

« L'Accademia ricorda che altra volta ebbimo a fare rapporto assai favorevole sopra una Memoria del prof. Francesco Mauro relativa alla chimica del molibdeno. L'autore, allo scopo di stabilire il grado di analogia che il molibdeno ha con la famiglia del niobio, con quella del titanio, col cromo ecc., si è proposto lo studio delle combinazioni del molibdeno con altri elementi, le quali si possono in generale esprimere con $Mo X_5$, $Mo X_4$, $Mo X_3$, $Mo X_2$, e più particolarmente, per ora, di quelle che si possono considerare come risultanti dall'unione dei fluoruri metallici con i derivati fluorurati del molibdeno.

« In questa sua prima Memoria, il Mauro, dopo un breve cenno storico sui composti $Mo X_5$ e $Mo X_5$, nA, che sino ad ora erano poco studiati, passa a descrivere i fluossiipomolibdati di potassio e di ammonio da lui ottenuti per la prima volta. La Memoria non si presta ad un breve riassunto; ma l'importanza dell'argomento, la grande cura usata dall'autore nell'accertare la composizione dei suoi sali, la precisione e la concisione colle quali egli espose i suoi risultati — fra i quali ricordiamo che qui per la seconda volta si dimostra come la sostituzione di un atomo di fluoro ad uno di ossigeno, la quale porta naturalmente cambiamento nella forma di combinazione chimica, non altera sensibilmente la forma cristallina — c'inducono a proporre che la Memoria sia inserita in esteso nei volumi dell'Accademia ».

Studio sui fluossisali di molibdeno [1]. Memoria I. del prof. FRANCESCO MAURO.

1. Fluossiipomolibdati di potassio e di ammonio.

È noto come il molibdeno, unendosi ad altri elementi, sia capace di dare diverse forme di combinazioni, le quali si possono rappresentare con le formole generali seguenti: $Mo X_6$, $Mo X_5$, $Mo X_4$, $Mo X_3$, $Mo X_2$. Le combinazioni $Mo X_6$ ed $Mo X_6$, nA sono state distesamente ed accuratamente studiate da molti chimici, sulle altre invece non si hanno finora che poche conoscenze. Io, allo scopo di stabilire il grado di analogia che ha il molibdeno con la famiglia del niobio, con quella del titanio, col cromo ecc., ho intrapreso lo studio delle combinazioni $Mo X_5$, $Mo X_4$, $Mo X_3$, $Mo X_2$ e particolarmente, per ora, di quelle che si possono riguardare come risultanti dall'unione dei fluoruri metallici con i derivati fluorurati del molibdeno.

Cenno storico sui composti $Mo X_5$.

Le combinazioni $Mo X_5$ sono state poco studiate; prima delle mie ricerche si conosceva solo il pentacloruro ed un suo derivato. Il pentacloruro, riguardato da Berzelius [2] e Blomstrand [3] come tetracloruro, fu sottoposto a novello esame dal Debray [4] il quale ne riconobbe la vera composizione. In questi ultimi anni i chimici Liechti e Kempe [5], i quali hanno con tanta cura esaminati i composti clorurati di molibdeno, prepararono il pentacloruro purissimo sottoponendo il molibdeno purificato con l'acido cloridrico, all'azione del cloro privo di ossigeno. Esso si presenta in cristalli grigio-neri con splendore metallico, si fonde a 194° e si rapprende col raffreddamento in massa cristallina. Bolle a 268°. Faccio osservare che il pentacloruro di niobio fonde alla stessa temperatura (194° Rose) e bolle a 240°,5. Il pentacloruro di molibdeno fuma all'aria e, attirando l'umidità, si converte in un liquido che passa per molte gradazioni di colore, fino a divenire bruno. Si scioglie nell'acqua e la soluzione, con poca acqua è bruna, con molta è senza colore.

Si conosce anche il composto $Mo Cl_5$, $PO Cl_3$ ottenuto dal Piutti [6] per l'azione di tre molecole di pentacloruro di fosforo su di una molecola di anidride molibdica in tubi chiusi alla temperatura di 180°.

(1) Questo lavoro è stato eseguito in gran parte nel Laboratorio del prof. Cannizzaro in Roma, il quale mi ha dato anche tutto il materiale di cui ho avuto bisogno.

(2) Gmelin-Kraut, Anorg. Chem. II (2), 186.

(3) Journ. prakt. Chem., LXXI, 449.

(4) Compt. rendus, LXVI, 732.

(5) Ann. chem. Pharm., CLXX, 344.

(6) Gazzetta chimica italiana, IX, 1879.

Con certezza, per quanto io sappia, non si conoscono altri composti di questo grado; e rimane a sapersi ancora se l'ossicloruro violetto e l'ossicloruro bruno siano composti riferibili alla forma $Mo X_5$ ed $Mo X_5$, nA. Dico ciò, perchè i risultati dell'analisi non vanno perfettamente d'accordo con la teoria, come si può vedere in questo prospetto.

Ossicloruro violetto.

Calcolato per $Mo O Cl_3$	Trovato (Blomstrand) [1]			Calcolato per $Mo_2 O_3 Cl_6$
Mo = 43,94	42,33	41,35	42,36	42,39 = 2 Mo
O = 7,32	—	—	—	10,59 = 3 O
3Cl = 48,74	48,89	47,19	48,00	47,02 = 6 Cl

Ossicloruro bruno.

		Blomstrand			
2 Mo	45,98	45,39	45,66	—	46,09
3 O	11,50	—	—	—	—
5 Cl	42,52	—	41,32	43,00	41,70
$Mo O_2 Cl_2, Mo O Cl_3$	100,00				

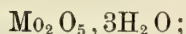
Prima di terminare questo cenno storico mi restano a dire poche cose sull'ossido azzurro di molibdeno, perchè viene riguardato da alcuni chimici come un pentossido. Il Roscoe p. es., nel suo *Trattato di chimica generale*, ammette l'esistenza del composto $Mo_2 O_5$, valendosi dell'autorità di Wöhler e Buff (Ann. Pharm. 110,275). In vero dire i risultati analitici ottenuti da questi chimici parlano in favore della formola $Mo_3 O_8$ e non dell'altra $Mo_2 O_5$. Ecco i loro risultati:
0,500 di sostanza disseccata all'aria, diedero 0,520 di anidride molibdica, ossia 0,347 di molibdeno, e per cento 69,33.

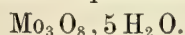
Calcolato per $Mo_3 O_8$	Trovato (Wöhler)	Calcolato per $Mo_2 O_5$
3 Mo = 69,23	69,33	70,59 = 2 Mo
8 O = 30,77	—	29,41 = 5 O
100,00		100,00

Anche il Rammelsberg (Pogg. Ann. 127, 290) ha voluto studiare l'ossido azzurro, al quale dà la formola $Mo_2 O_5$, sebbene le sue analisi si accordino meglio con la formola $Mo_3 O_8$, come si vede in questo prospetto:

Calcolato per $Mo_3 O_8$	Trovato (Rammelsberg)			Calcolato per $Mo_2 O_5$
3 Mo = 69,23	70,58	69,81	68,00	70,59 = 2 Mo
8 O = 30,77	—	—	—	29,41 = 5 O
100,00				100,00

Il Berlin ancora ha ottenuto 69,26 % di Mo e perciò un risultato corrispondente meglio alla formola $Mo_3 O_8$.

Il Rammelsberg (loco cit.) descrive pure il pentossido idrato di molibdeno, al quale dà questa formola:

$$Mo_2 O_5 , 3H_2 O ;$$

le sue analisi però parlano in favore di quest'altra:

$$Mo_3 O_8 , 5 H_2 O.$$

(1) Journ. prakt. Chem. LXXI, 459.

Ecco i suoi risultati:

Calcolato per $Mo_3O_8, 5H_2O$		Trovato (Rammelsberg)		Calcolato per $Mo_2O_5, 3H_2O$	
3 Mo	= 56,92	57,61	56,32	58,90 =	2 Mo
8 O	= 25,29	—	—	24,54 =	5 O
$5H_2O$	= 17,79	18,38	18,66	16,56 =	$3H_2O$
	100,00			100,00	

Premesse queste notizie storiche sulle combinazioni MoX_5 ed MoX_5, nA, passo a descivere, in questa prima Memoria, i fluossiipomolibdati di potassio e di ammonio, da me ottenuti per la prima volta.

Fluossiipomolibdato potassico normale. $MoOFl_3, 2KFl, H_2O$.

Son giunto a preparare questo sale con tre metodi diversi:

1) Versando il pentacloruro di molibdeno in una soluzione di fluoridrato potassico. Questo processo è troppo lungo, perchè bisogna prepararsi il molibdeno metallico e poi il pentacloruro.

2) Sciogliendo nell'acido fluoridrico a caldo il biossido di molibdeno idrato [1] e poi aggiungendo alla soluzione di color verde fosco il fluoridrato potassico: per raffreddamento si separa il fluossiipomolibdato normale, e nell'acqua madre concentrata, che ha color porpora, si genera una sostanza in cristalli anche di color porpora, la quale appartiene per la sua composizione alla formola MoX_3, nA. Da tutto quel che ho detto ora risulta che in queste condizioni il composto MoX_4 si scinde in un composto MoX_5 ed in un altro MoX_3. Questa specie di scissione non è nuova per il molibdeno, giacchè si sa che il tetracloruro ($MoCl_4$) sotto l'azione del calore si decompone in pentacloruro ($MoCl_5$) e tricloruro ($MoCl_3$).

3) Si può preparare facilmente anche per elettrolisi nel modo seguente: Si scioglie nell'acido fluoridrico alquanto diluito il fluossimolibdato potassico normale ($MoO_2Fl_2, 2KFl, H_2O$) e la soluzione si versa in un crogiuolo di platino, il quale fa da elettrodo negativo; nel liquido poi si sospende un disco di platino, che si mette in comunicazione col polo positivo del generatore. Per il passaggio della corrente il liquido si colora subito in celeste, e ciò indica che il molibdeno dalla forma MoX_6 passa alla forma MoX_5. Facendo passare la corrente per diverse ore, da una soluzione alquanto concentrata, si depositano molti cristalli celesti, laminari.

Mi son servito ordinariamente per questa preparazione di una batteria formata con venti elementi della *pila italiana*, quella che si usa per le nostre linee telegrafiche: serve anche bene la batteria di due elementi Bunsen.

Questo sale è di color celeste; si deposita dalla soluzione nell'acido fluoridrico diluito in lamelle estremamente sottili che rassomigliano al fluossitungstato, al fluossiniobato, al fluossimolibdato ed al fluotitanato di potassio. Per ottenere cristalli misurabili è necessario preparare una soluzione che contenga molto acido fluoridrico. Questi cristalli così preparati sono trasparenti, con lucentezza vitrea, si presentano sempre sottili, in forma di lamine a contorno rettangolare, esagonale o ottangolare.

[1] Io preparo il biossido di molibdeno idrato riducendo con ioduro potassico il molibdato ammonico ordinario $^3/_7$ sciolto nell'acido cloridrico concentrato: si libera in tal modo l'iodio e si ha in soluzione il molibdeno sotto la forma MoX_5, dalla quale soluzione, aggiungendo ammoniaca in eccesso, si precipita il biossido di molibdeno idrato, il quale si raccoglie sul filtro e si lava.

« Sistema cristallino: Monoclino; a:b:c = 0,99975:1:1,03200, $\beta = 80^\circ 56' 27''$.
« Forme osservate: (100), (010), (001), (10$\bar{1}$), (021), (111), (110), (11$\bar{1}$), (11$\bar{2}$). Angoli
« principali, 001:100 = 80° 56′; 001:10$\bar{1}$ = 129° 24′; 001:021 = 63° 52′; 001:111 =
« 51° 7′; 001:110 = 83° 34′; 001:11$\bar{1}$ = 120° 9′; 110:1$\bar{1}$0 = 89° 16′ » (E. Scacchi) (1).

Era di qualche interesse sapere se questo composto avesse delle relazioni, per la forma dei cristalli, con i composti analoghi di molibdeno ($MoO_2Fl_2, 2KFl, H_2O$), di tungsteno ($WO_2Fl_2, 2KFl, H_2O$), di niobio ($NbOFl_3, 2KFl, H_2O$) e di titanio ($TiFl_4, 2KFl, H_2O$) e perciò il prof. Eugenio Scacchi si prese la cura di rifare lo studio cristallografico, dei suddetti sali, col materiale che gli ho fornito meno quello di niobio, il quale è stato già determinato con sicurezza del Marignac (Ann. de Chim. et Phys. [4], 8, 1866, pag. 26 e 27), e di comparare fra loro le rispettive forme cristalline. I risultati avuti da questa comparazione si trovano riuniti nel quadro qui sotto riportato; dal quale si rileva che questi sali cristallizzano nello stesso sistema, e i loro cristalli hanno varî angoli diedri corrispondenti poco diversi fra loro. Vi è quindi molta rassomiglianza fra gli edifici cristallini di questi due composti, che si possono riguardare come geometricamente isomorfi. Vuolsi peraltro far notare che l'isomorfismo esistente fra il fluossimolibdato potassico normale ($MoO_2Fl_2, 2KFl, H_2O$) ed il fluossiipomolibdato potassico normale ($MoOFl_3, 2KFl, H_2O$) presenta per noi maggior interesse, giacchè esso ci dimostra che la sostituzione di un atomo di fluoro ad uno di ossigeno non cambia affatto l'edificio cristallino sebbene la forma di combinazione risulti diversa, ed i fluossiipomolibdati differiscano in qualche modo per il loro comportamento chimico dai fluossimolibdati, tanto quanto i sali ferrosi dai sali ferrici, i sali mercurosi dai sali mercurici ecc.

Angoli	$TiFl_4$, $2KFl, H_2O$.	WO_2Fl_2, $2KFl, H_2O$.	$MoOFl_3$, $2KFl, H_2O$.	MoO_2Fl_2, $2KFl, H_2O$.	$NbOFl_3$, $2KFl, H_2O$.
001:100	81°18′	81°13′	80°56′	76°31′	76°14′
001:30$\bar{1}$	—	—	—	95 54	95 51
001:10$\bar{1}$	129 41	129 06	129 24	128 18	128 34
001:021	64 20	64 14	63 52	—	—
001:111	51 34	51 36	51 07	—	—
001:110	83 48	83 46	83 34	80 23	80 08
001:33$\bar{1}$	—	96 46	—	94 11	94 10
001:11$\bar{1}$	—	—	120 09	—	119 31
111:1$\bar{1}$0	88 54	89 26	89 16	88 25	87 52
10$\bar{1}$:33$\bar{1}$	—	—	—	53 14	53 26

$TiFl_4, 2KFl, H_2O$ a:b:c = 0,9924:1:1,0405, β = 81°18′
$Wo_2Fl_2, 2KFl, H_2O$ = 1,0019:1:1,0481 = 81 13
$MoOFl_3, 2KFl, H_2O$ = 0,9998:1:1,0320 = 80 56
$MoO_2Fl_2, 2KFl, H_2O$ = 1,0006:1:0,9994 = 76 31
$NbOFl_3, 2KFl, H_2O$ = 0,992 :1:0,980 = 76 14

E. Scacchi

(1) R. Accad. dei Lincei. Memorie. Serie 4ª, Vol. IV, 1887 pag. 489.

Il fluossiipomolibdato potassico normale si altera pochissimo all'aria e, dopo molti giorni, prende un color turchino intenso; nell'aria secca, sul cloruro di calcio, perde la massima parte dell'acqua di cristallizzazione, a 100° la perde tutta e diventa di color verde. Calcinato per diverse ore, in presenza dell'aria, lascia svolgere l'acido fluoridrico e si trasforma in molibdato neutro potassico.

Nell'acqua si scioglie decomponendosi, giacchè la soluzione si presenta di color rosso bruno e per non farlo decomporre fa d'uopo aggiungere all'acqua una certa quantità di acido fluoridrico, il quale scioglie a caldo molto fluossiipomolibdato potassico, che si deposita per raffreddamento in massima parte. Si scioglie nell'acido cloridrico e la soluzione presenta una tinta rosso bruna dalla quale si depositano cristalli di cloruro potassico.

Come tutti i composti di questo grado, esso è un forte riduttore; p. es. riduce i sali di argento, di rame, d'oro ecc.

Analisi. L'acqua è stata determinata riscaldando il sale a 100°. Il molibdeno ed il potassico sono stati valutati pesando il molibdato potassico ottenuto, per calcinazione in presenza dell'aria, da una quantità nota di fluossisale. Il prodotto della calcinazione è stato anche sottoposto all'analisi, pesando il molibdeno sotto forma di molibdato di argento ed il potassio come solfato.

Sono stati determinati il potere riducente, il molibdeno ed il potassio, anche nel modo seguente: Si è sciolto nell'acqua un peso noto di fluossiipomolibdato potassico ed alla soluzione è stata aggiunta una soluzione ammoniacale di nitrato di argento; si formava un precipitato bruno, alle volte anche grigio, di argento metallico, il quale, raccolto sopra un filtro, è stato lavato, calcinato e pesato. Il liquido, da cui si era separato l'argento, è stato riscaldato a bagno d'aria in una capsula di platino dolcemente e con cura per evitare spruzzi: sfumata via l'ammoniaca si depositava il molibdato di argento, che è stato raccolto sopra un filtro tarato e poi lavato, disseccato a 100° e pesato. Infine il potassio che si trovava nel liquido filtrato, dal quale si toglieva prima l'eccesso di argento con acido cloridrico o con cloruro di ammonio, è stato determinato in forma di solfato col solito metodo.

La determinazione del fluoro mi ha presentato delle gravi difficoltà, che ho potuto superare servendomi del metodo di S. L. Penfield [1]. È necessario mettere nel pallone un poco di dicromato potassico per evitare la riduzione dell'acido solforico.

Il potere riducente è stato anche determinato con una soluzione titolata di permanganato potassico.

Ecco i risultati che si sono avuti adoperando i metodi sopraenunciati:

Acqua, molibdeno e potassio.

1) Sostanza gr. 0,7429 diede di acqua 0,0410 e di molibdato neutro potassico 0,5723, ossia per cento H_2O **5,51**, Mo **31,04**, K **25,29**.
2) Sostanza gr. 1,2408 diede di acqua 0,0624 e di molibdato neutro potassico 0,9682, ossia per cento H_2O **5,02**, Mo **31,57**, K **25,72**.
3) Sostanza gr. 1,8474 diede di acqua 0,0990 e di molibdato neutro potassico 1,4516,

[1] Chem. News, XXXIX, 179.

ossia per cento H_2O **5,36**, Mo **31,67**, K **25,79**. La detta quantità di molibdato neutro potassico (cioè gr. 1,4516) diede gr. 2,3164 di molibdato di argento (Ag_2MoO_4), ossia Mo 0,5938 e per cento **32,01**; solfato di potassio 1,0730, ossia K 0,4818 e per cento **26,07**.

Fluoro.

1) Sostanza. gr. 1,1788; ammoniaca $\frac{N}{4}$ consumata 24,8 cm^3, da cui si calcola fluoro 0,3634 e per cento **30,80**.

2) Sostanza gr. 0,8302; ammoniaca $\frac{N}{4}$ impiegata 18,1 cm^3, ossia fluoro 0,2579 e per cento **31,08**.

3) Sostanza gr. 1,0096; ammoniaca $\frac{N}{2}$ consumata 11,2 cm^3, ossia fluoro 0,3192 e per cento **31,61**.

4) Sostanza gr. 1,0574; ammoniaca $\frac{N}{2}$ impiegata 11,6 cm^3, ossia fluoro 0,3306 e per cento **31,27**.

Determinazione del potere riducente.

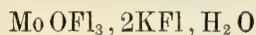
1) gr. 0,3014 di sostanza consumarono 9,4 cm^3 di permanganato potassico $\frac{N}{10}$, ossia **2,49** per cento di ossigeno.

2) gr. 0,5461 di sostanza consumarono 33,4 cm^3 di permanganato di potassio $\frac{N}{20}$, ossia **2,46** per cento di ossigeno.

3) Sostanza gr. 1,4360 diede 0,4703 di argento, ossia per cento **32,75**.

4) Sostanza gr. 1,3961 diede di argento 0,4745, e per cento **33,98**.

Per i risultati delle analisi, a questo composto spetta la formola

$$MoOFl_3, 2KFl, H_2O$$

		Calcolato	Trovato (medie)
Mo	96	31,66	31,43
O	16	5,28	—
5Fl	95	31,33	31,19
2K	78,2	25,79	25,60
H_2O	18	5,94	5,29
$MoOFl_3, 2KFl, H_2O$	303,2	100,00	

Potere riducente.

	Calcolato	Trovato (medie)
Ossigeno	2,64	2,475
Argento	35,62	33,365

Fluossiipomolibdato potassico esagonale $3MoOFl_3, 5KFl, H_2O$.

Questo fluossisale si forma sciogliendo nell'acido fluoridrico il sale precedente e concentrando la soluzione, dalla quale per raffreddamento si deposita.

Esso si presenta in cristalli aciculari estremamente sottili, i quali, esaminati al microscopio, appaiono come prismi a sezione esagonale, con una direzione di estinzione ottica secondo l'asse del prisma. È di color celeste e l'estremità dei prismi hanno ordinariamente colore azzurro intenso. Lucentezza vitrea.

È degno d'interesse far rilevare che anche il niobio forma un sale della stessa composizione ($3NbOFl_3, 5KFl, H_2O$) [1], il quale cristallizza pure in forma di prismi esagonali. È dispiacevole però non poterne dimostrare l'isomorfismo, perchè non mi è stato possibile, per quante cristallizzazioni io abbia fatte, e sono state moltissime, avere cristalli tali da poterli far esaminare al goniometro.

Nell'acqua si scioglie decomponendosi nello stesso modo che il sale precedentemente descritto. Come tutti i composti di questo grado ha anch'esso proprietà riducenti.

Sotto l'azione del calore a 100° perde di peso, a 230° si sviluppa acido fluoridrico.

Analisi. L'analisi quantitativa è stata eseguita adoperando gli stessi metodi, che mi hanno servito per stabilire la composizione del sale precedente. L'acqua è stata determinata nella maniera seguente.

La sostanza pesata è stata mescolata con grande eccesso di carbonato di sodio, calcinato per diverse volte con carbonato ammonico. Il miscuglio è stato introdotto in un tubo di vetro infusibile, piegato a gomito e chiuso da un'estremità. L'estremità aperta si chiudeva con un tappo di gomma a due fori, in uno dei quali si metteva un cannello, che andava fino alla piegatura del tubo, e che si metteva in comunicazione con un apparecchio a disseccare; nell'altro foro s'introduceva un cannello sporgente di qualche millimetro nell'interno ed in comunicazione con due tubi ad U, pieni di vetro pestato bagnato con acido solforico e pesati; il secondo si univa con un tubo a cloruro di calcio in comunicazione con un aspiratore. Montato così l'apparecchio si riscaldava con fiamma a gas l'estremità chiusa del tubo, dove si trovava la sostanza, dapprima dolcemente e poi fino al rosso incipiente: l'acqua veniva assorbita dall'acido solforico.

Ecco i risultati che si sono avuti:

Potere riducente, molibdeno e potassio.

1) Sostanza gr. 1,3134; argento precipitato 0,4095 e per cento **31,17**; molibdato di argento 1,796 ossia molibdeno 0,4508 e per cento **34,33**. Solfato di potassio 0,6994 ossia potassio 0,3140 e per cento **23,90**.

2) Sostanza gr. 1,0376; argento precipitato 0,3060 e per cento 29,49; molibdato di argento 1,4252 ossia molibdeno 0,3631 e per cento **35,0**. Solfato di potassio 0,5594 ossia potassio 0,2510 e per cento **24,18**.

3) Sostanza gr. 1,1126; argento precipitato 0,3477 e per cento **31,25**; molibdato di argento 1,5006 ossia molibdeno 0,3831 e per cento **34,43**. Solfato di potassio 0,5941 ossia potassio 0,2667 e per cento **23,96**.

Fluoro.

1) Sostanza gr. 1,0352; ammoniaca $\frac{N}{2}$ impiegata cm^3 11,5, da cui si calcola fluoro 0,3275 e per cento **31,66**.

(1) Ann. Chim. Phys. (4), VIII, 31.

2) Sostanza gr. 0,9848; ammoniaca $\frac{N}{4}$ consumata cm³ 23,1, da cui si calcola fluoro 0,3291 e per cento **33,42**.

3) Sostanza gr. 0,9160; ammoniaca $\frac{N}{4}$ consumata cm³ 21,3 da cui si calcola fluoro 0,3335 e per cento **33,13**.

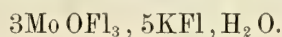
Acqua.

1) Sostanza gr. 0,9080; acqua 0,0220 e per cento **2,42**.
2) Sostanza gr. 1,0532; acqua 0,0258 e per cento **2,45**.
3) Sostanza gr. 1,0478; acqua 0,0242 e per cento **2,30**.

Potere riducente determinato col permanganato potassico.

1) Sostanza gr. 0,5896; permanganato potassico $\frac{N}{10}$ impiegato cm³ 17,8 ossia ossigeno 0,0142 e per cento **2,41**.

2) Sostanza gr. 1,0802; permanganato potassico $\frac{N}{10}$ impiegato cm³ 32,31 ossia ossigeno 0,0258 e per cento **2,39**.

I risultati delle dette analisi conducono alla formola

$$3MoOFl_3, 5KFl, H_2O.$$

		Calcolato	Trovato (medie)
3Mo	288	35,33	34,59
5K	195	23,93	24,01
3O	48	5,89	—
14Fl	266	32,64	32,74
H_2O	18	2,21	2,39
$3MoOFl_3, 5KFl, H_2O$	815	100,00	

Potere riducente.

	Calcolato	Trovato (medie).
Ossigeno	2,94	2,40
Argento	39,61	30,64

Fluossiipomolibdato ammonico normale. $MoOFl_3, 2NH_4Fl$.

Questo sale si ottiene sciogliendo il biossido di molibdeno idrato nell'acido fluoridrico e poi versando nella soluzione a poco a poco ammoniaca, finchè il color verde fosco della soluzione si cambi in rosso bruno; quindi si versa altro acido fluoridrico, tanto e non più, da avere la soluzione di nuovo di color verde fosco, la quale, concentrata fortemente a dolce calore, lascia depositare per raffreddamento cristalli di fluossiipomolibdato ammonico normale.

Si conoscono poche sostanze che cristallizzino così bene e con tanta rapidità come questa; basti dire che una soluzione portata a giusta concentrazione ha dato in meno di un'ora molti cristalli grossissimi e ben terminati.

Si può preparare anche con la corrente elettrica, facendola agire in una soluzione di fluossimolibdato ammonico normale o di fluossimolibdato triammonico (1); tanto in un caso come nell'altro le soluzioni debbono essere sempre fortemente acidificate con acido fluoridrico.

Ho usato lo stesso apparecchio che mi è servito per preparare il fluossiipomolibdato potassico normale. In questo caso i cristalli il più delle volte contenevano anche il fluossimolibdato ammonico normale ($MoO_2Fl_2, 2NH_4Fl$) e perciò mi son servito, per avere una riduzione completa, dell'apparecchio usato dal prof. A. Piccini (2). nella preparazione del fluotitanito ammonico.

I cristalli di questo composto sono trasparenti, di color celeste, talvolta verdi, con lucentezza e frattura vitrea; lasciati all'aria diventano opachi e prendono un colore azzurro intenso, Per il loro aspetto essi rassomigliano ai composti analoghi di niobio, di tungsteno e di molibdeno nella sua forma limite; infatti essi si presentano tabulari e prismatici e, per le specie di facce, si accordano perfettamente coi suddetti sali, specialmente col fluossimolibdato ammonico normale. Mancano le forme a punta di lancia perchè di questo composto non si hanno cristalli in soluzione acquosa.

« Sistema cristallino; Ortorombico; a:b:c = 0,84289:1:1,01998. Facce osservate:
« (010), (001), (011), (034), (012), (201), (605), (101), (221). Angoli principali: 001:011
« = 45° 34'; 001:034 = 37° 25'; 001:012 = 27° 01'; 001:201 = 67° 33'; 001:605 =
« 55° 27'; 001:101 = 50° 26'; 001:221 = 72° 28'; 221:22$\bar{1}$ = 35° 04'; 201:20$\bar{1}$ =
« 44°54'; 201:011 = 74°30'; 011:221 = 49° 29' » (Eug. Scacchi) (3).

Le relazioni cristallografiche che passano tra questo composto e gli analoghi di niobio, tungsteno e molibdeno nella sua forma limite, si trovano nel seguente quadro:

Angoli	$MoOFl_3, 2NH_4Fl$	$MoO_2Fl_2, 2NH_4Fl$	$NbOFl_3, 2NH_4Fl$	$WO_2Fl_2, 2NH_4Fl$
001:201	67°33'	67°31'	67°25'	67°40
001:011	45 34	45 28	45 10	45 08
001:012	27 01	26 56	26 42	26 40
001:221	72 28	72 26	—	72 25
201:011	74 30	74 27	74 17	74 27
221:22$\bar{1}$	35 04	35 09	—	35 10
201:20$\bar{1}$	44 54	44 58	44 50	45 10

$MoOFl_3, 2NH_4Fl$ a:b:c = 0,84289:1:1,01998
$MoO_2Fl_2, 2NH_4Fl$ = 0,84134:1:1,01642
$NbOFl_3, 2NH_4Fl$ = 0,8366 :1:1,0058
$WO_2Fl_2, 2NH_4Fl$ = 0,8258 :1:1,0047

E. Scacchi

In esso si vede che i quattro fluossisali sono perfettamente isomorfi e, quel ch'è più interessante, che nel fluossiipomolibdato e nel fluossimolibdato, oltre aversi forme

(1) R. Accademia dei Lincei. S. 4a, vol. IV, 482-484.
(2) R. Accademia dei Lincei. Transunti, 1885.
(3) R. Accademia dei Lincei. Memorie. S. 4a, vol. IV, 499.

quasi identiche fra loro, la differenza dei valori negli angoli corrispondenti è minima, trovandosi tra 2′ e 5′. Faccio inoltre rilevare che questo sale cristallizza insieme ed in proporzioni variabili col fluossimolibdato e ciò conferma maggiormente l'isomorfismo, come in fine si vedrà coi risultati analitici. E con ciò si dimostra splendidamente per la seconda volta che la sostituzione di un atomo di fluoro ad uno di ossigeno, la quale porta naturalmente cambiamento nella forma di combinazione, non altera l'edificio cristallino.

Il molibdeno adunque, se non m'inganno, ci presenta il primo caso d'isomorfismo di questa natura, cioè un isomorfismo tra due composti, contenenti gli stessi elementi e lo stesso numero totale d'atomi, ma diversi per il grado di combinazione.

Analisi [1]. Questo composto all'analisi ha dato i seguenti risultati:

Molibdeno.

1) Sostanza gr. 1,4822, diede per residuo di MoO_3 0,8860, ossia 0,5906 di molibdeno e per cento **39,85**.
2) Sostanza gr. 0,5339; diede per residuo di MoO_3 0,3156, ossia di molibdeno 0,2109 e per cento **39,41**.

Fluoro.

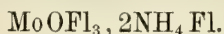
1) Sostanza gr. 0,6595; ammoniaca $\frac{N}{2}$ consumata cm^3 9,05 da cui si calcola fluoro 0,2579 e per cento **39,11**.
2) Sostanza gr. 0,5480; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cm^3 37,08 da cui si calcola fluoro 0,2114 e per cento **39,57**.

Ammonio.

1) Sostanza gr. 1,2436, diede di cloruro ammonico 0,5360, ossia ammonio 0,1803 e per cento **14,41**.
2) Sostanza gr. 1,1324, diede di cloruro ammonico 0,5050, ossia ammonio 0,0909 e per cento **15,00**.
3) Sostanza gr. 0,5864, diede di cloruro ammonico 0,2606, ossia ammonio 0,0877 e per cento **14,97**.

Potere riducente.

1) Sostanza gr. 1,2736; argento precipitato 0,5292 e per cento **41,39**.
2) Sostanza gr. 0,2274; argento precipitato 0,0875 e per cento **38,81**.

Dalle cifre ottenute si deduce questa composizione chimica:

$MoOFl_3, 2NH_4Fl$.

		Calcolato	Trovato (medie)
Mo	96	39,51	39,63
O	16	6,58	—
5Fl	95	39,09	39,34
$2NH_4$	36	14,82	14,79
$MoOFl_3, 2NH_4Fl$	243	100,00	

[1] I metodi adoperati si trovano descritti nell'altra mia Memoria intitolata: *Nuove ricerche sui fluossimolibdati ammonici.* Vol. IV, s. 4.ª

Potere riducente.

	Calcolato	Trovato (medie)
Argento	44,44	40,10

Analisi dei cristalli contenenti il fluossimolibdato.

Fluoro.

Sostanza gr. 0,8780; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cm^3 52,1 da cui si calcola fluoro 0,29697 e per cento **33,80.**

Potere riducente.

1) Sostanza gr. 0,1303; argento 0,0324 e per cento **24,86.**
2) Sostanza gr. 0,2016; argento 0,0734 e per cento **36,40.**

Fluossiipomolibdato ammonico esagonale $3MoOFl_3, 5NH_4Fl, H_2O$.

Si ottiene sciogliendo a caldo nell'acido fluoridrico il fluossiipomolibdato ammonico normale: concentrando la soluzione, per raffreddamento si deposita il sale. Esso si presenta in cristalli aciculari estremamente piccoli e non è stato possibile prendere su di essi misure goniometriche; osservati al microscopio si presentano in forma di prismi esagonali ed hanno una direzione di estinzione ottica secondo l'asse principale: rassomigliano perciò molto al fluossiipomolibdato potassico ($3MoOFl_3, 5KFl, H_2O$), al fluossiniobato potassico ($3NbOFl_3, 5KFl, H_2O$) ed al fluossiniobato ammonico ($3NbOFl_3, 5NH_4Fl, H_2O$). I cristalli isolatamente sono trasparenti, di color celeste e con lucentezza vitrea. Veduti in massa si presentano con lucentezza sericea. Lasciati all'aria si alterano e diventano di color azzurro intenso.

Come i composti precedentemente studiati anche questo sale si decompone nell'acqua ed ha proprietà riducenti.

È difficile ottenere questo sale allo stato puro, giacchè cristallizza sempre insieme al fluossimolibdato ammonico esagonale, nuovo composto che descriverò in una prossima pubblicazione. Questo composto riscaldato a circa 270° si decompone.

Analisi.

I metodi analitici sono stati gli stessi di quelli che mi son servito per stabilire la composizione del sale precedente. L'acqua è stata determinata calcinando una quantità nota del composto con carbonato sodico anidro: mi son servito dello stesso apparecchio adoperato per la valutazione dell'acqua nel fluossimolibdato potassico (pag. 404).

Molibdeno.

1) Sostanza gr. 1,0176; diede per residuo di MoO_3 0,6236 ossia 0,4258 di molibdeno e per cento **40,85.**
2) Sostanza gr. 0,2288, diede per residuo di MoO_3 0,1418 ossia 0,09454 di molibdeno e per cento **41,32.**
3) Sostanza gr. 0,2800 diede per residuo di MoO_3 0,1706 ossia 0,11374 di molibdeno e per cento **40,62.**

Fluoro.

1) Sostanza gr. 0,5788; ammoniaca $\frac{N}{4}$ consumata cm^3 14,30 da cui si calcola fluoro 0,2035 e per cento **35,15.**

2) Sostanza gr. 0,5084; ammoniaca $\frac{N}{4}$ adoperata cm³ 13,20 da cui si calcola fluoro 0,1881 e per cento **36,90**.

3) Sostanza gr. 0,6050; ammoniaca $\frac{N}{4}$ consumata cm³ 15,20 da cui si calcola fluoro 0,2166 e per cento **35,80**.

4) Sostanza gr. 0,5788; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cm³ 35,90 da cui si calcola fluoro 0,2046 e per cento **35,35**.

Ammonio.

1) Sostanza gr. 0,7514, diede di cloruro ammonico 0,2848, ossia ammonio 0,0958 e per cento **12,74**.

2) Sostanza gr. 0,4838, diede di cloruro ammonico 0,1870 ossia ammonio 0,0631 e per cento **13,04**.

3) Sostanza gr. 0,6268, diede di cloruro ammonico 0,2350 ossia ammonio 0,0791 e per cento **12,61**.

Acqua ed ammoniaca.

1) Sostanza gr. 0,9454, diede di acqua ed ammoniaca 0,1963 e per cento **20,75**.

2) Sostanza gr. 0,9912, diede di acqua ed ammoniaca 0,2010 e per cento **20,27**.

Le dette analisi dànno a questo composto la formola:

$$3MoOFl_3, 5NH_4Fl, H_2O.$$

		Calcolato	Trovato (medie)
3Mo	288	40,56	40,93
3O	48	6,78	——
14Fl	266	37,46	35,80
$5NH_4$	90	12,67	12,80
H_2O	18	2,53	
$3MoOFl_3, 5NH_4Fl, H_2O$	710	100,00	
$H_2O + NH_3$		20,83	20,51.

Le leggi della fatica studiate nei muscoli dell'uomo.
Memoria I del Socio ANGELO MOSSO
presentata al Presidente nelle ferie accademiche 1888.

---

§ I.

Le esperienze esatte sulla fatica muscolare, iniziate colle classiche ricerche di Edoardo Weber e continuate dopo da sperimentatori valenti, vennero fatte su muscoli di rana staccati dal corpo. Fu solo coi lavori di H. Kronecker e di E. Tiegel che si cominciò a sperimentare su muscoli in condizioni meno sfavorevoli, conservando la circolazione naturale, o facendo circolare artificialmente nei muscoli un liquido affine al sangue. Le ricerche che vennero eseguite sull'uomo per conoscere le leggi della fatica sono però fino ad ora molto scarse.

Ho cercato di scrivere direttamente il lavoro meccanico dei muscoli dell'uomo. Il metodo che ho seguito è così diverso da quelli che servirono allo studio della contrazione muscolare nell'uomo, che non mi credo obbligato a svolgere la parte storica di questo argomento, o di mettere a raffronto il mio metodo con quello dei dinamometri più generalmente in uso. Anche dei recenti lavori di Nipher (1) e Haughton (2) credo che per brevità mi sia permesso tacere. In questa prima Memoria descriverò gli apparecchi che ho costrutto per studiare nell'uomo la fatica dei muscoli e dei nervi, e nella seconda il dott. Arnaldo Maggiora esporrà le indagini che egli fece con questi strumenti nel mio Laboratorio e sarà sua cura di citare, mano mano che se ne presenterà l'occasione, i lavori che hanno immediato rapporto colle presenti ricerche.

Descrizione dell'ergografo.

Per brevità non accenno i metodi coi quali in una serie di ricerche preliminari ho tentato di scrivere la curva della fatica. Le difficoltà che dovetti superare sono essenzialmente due: la prima consiste nell'isolare bene il lavoro di un muscolo, in modo che nessun altro possa aiutarlo quando è stanco: la seconda nel tenere bene fissa una estremità del muscolo mentre l'altra scrive le contrazioni. Ho provato coi flessori del pollice, col bicipite del braccio, col deltoide, coi gastrocnemii, coi masseteri, e solo coi flessori delle dita della mano ottenni dei risultati soddisfacenti.

(1) F. E. Nipher, *On the mechanical Work done by a Muscle before Exhaustion.* The American Journal of Science and Arts, vol IX, 1875, p. 130.

(2) Samuel Haughton, Proceeding of the R. Society of London XXIV, p. 43.

Dovetti rinunziare agli strumenti dove si deve vincere col lavoro la resistenza di una molla, perchè non sono abbastanza esatti. All'apparecchio che ora descriverò diedi il nome di *ergografo* [1] perchè scrive direttamente il lavoro meccanico. Esso è formato di due parti: una che tiene ferma la mano, l'altra che scrive le contrazioni sopra un cilindro che gira, come si fa nelle esperienze grafiche. Il sostegno fissatore è costituito da una piattaforma di ferro lunga 50 cent., larga 17 : spessa 0,7 come si vede nella fig. 1. Per capire come è tenuta ferma la mano basta guardare la fig. 3. Noi abbiamo cioè due cuscinetti AB (fig. 1) sul primo poggia il dorso della mano, e sull'altro

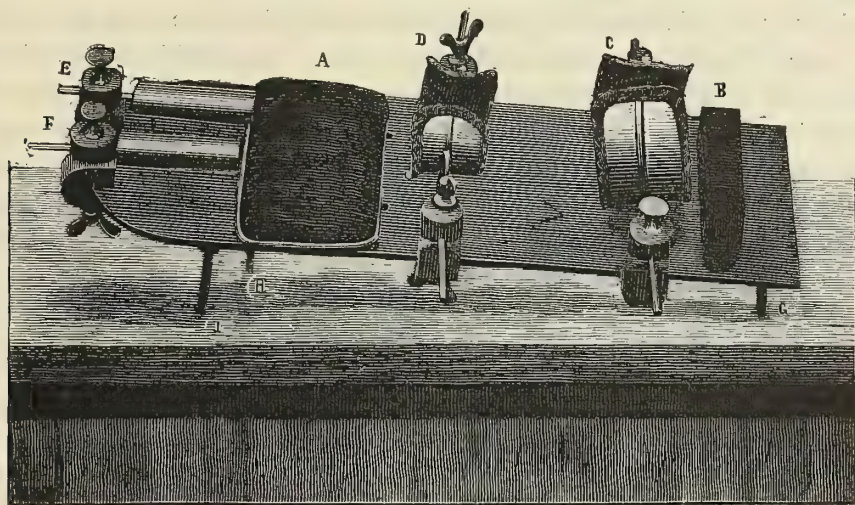



Fig. 1. — Sostegno fissatore per tener ferme le dita, la mano e l'antibraccio.

leggermente incavato a doccia poggia l'antibraccio. Per fissare bene questa parte del corpo mi servo di quattro altri cuscinetti C e D fatti in modo da stringere leggermente il carpo e l'antibraccio. Ogni cuscinetto è fatto da un semicanale di ottone imbottito alla parte interna; sulla superficie esterna è saldata una spranga cilindrica di metallo che si fa passare nell'apertura di un morsetto, dove viene fissata con la compressione di una vite.

Nella figura 1 si vedono sei morsetti eguali, che hanno in basso come si vede in E F una scanalatura profonda 2 centimetri e larga 0,8 colla quale possono venire fissati sul bordo della piattaforma, per mezzo di una vite che sta sotto in ciascun morsetto. Nel principio quando si deve fissare il braccio tutti questi morsetti sono liberi. Si mette quindi la mano col dorso che poggia sul cuscino A e l'antibraccio sul cuscino B: si avvicinano i due cuscinetti D in modo che stringano bene la mano in corrispondenza del carpo, e poi si chiudono le viti superiori ed inferiori dei loro morsetti: la stessa cosa si fa per l'antibraccio. La mano viene fissata anteriormente con due tubi di ottone che hanno un lume interno che varia fra 18 e 22 millimetri secondo la grossezza delle dita della persona sulla quale deve farsi una esperienza. Nel tubo che si fissa col morsetto E si introduce il dito indice e in

[1] Ergografo da ἔργον lavoro e γράφειν scrivere.

quello F l'anulare della mano destra, quando l'apparecchio ha la posizione in cui venne disegnato nella figura 1.

Nello spazio che rimane libero fra i morsetti E F si muove il dito medio al quale si attacca una funicella che fa scorrere l'apparecchio registratore.

Per dare una posizione comoda al braccio che lavora, mi sono accorto che non bisogna tenerlo in supinazione, ma in leggera pronazione. La piattaforma perciò l'ho inclinata di circa 30° verso il lato interno, ed è leggermente sollevata dal gomito verso l'estremità della mano di circa due o tre centimetri. Queste due inclinazioni ci obbligano a cambiare la posizione del sostegno quando si lavora col braccio destro, o col sinistro: a tale scopo la piattaforma ha di dietro un solo piede G fatto da un pezzo cilindrico di metallo sul quale poggia l'apparecchio e davanti vi sono due piedi, uno I lungo 5 cent. e l'altro H lungo 12. Questi due piedi sono riuniti da una lastra di ferro trasversale, che nella figura non si vede perchè sta sulla superficie inferiore della piattaforma. Nel mezzo questa lastra ha una vite di pressione che permette di farla girare portando il piede più basso ora da un lato e ora dall'altro della piattaforma, cambiando così la sua inclinazione, ora a destra e ora a sinistra, secondo la mano sulla quale vuole studiarsi la curva della fatica.

La seconda parte dell'apparecchio è il corsoio registratore fig. 2.

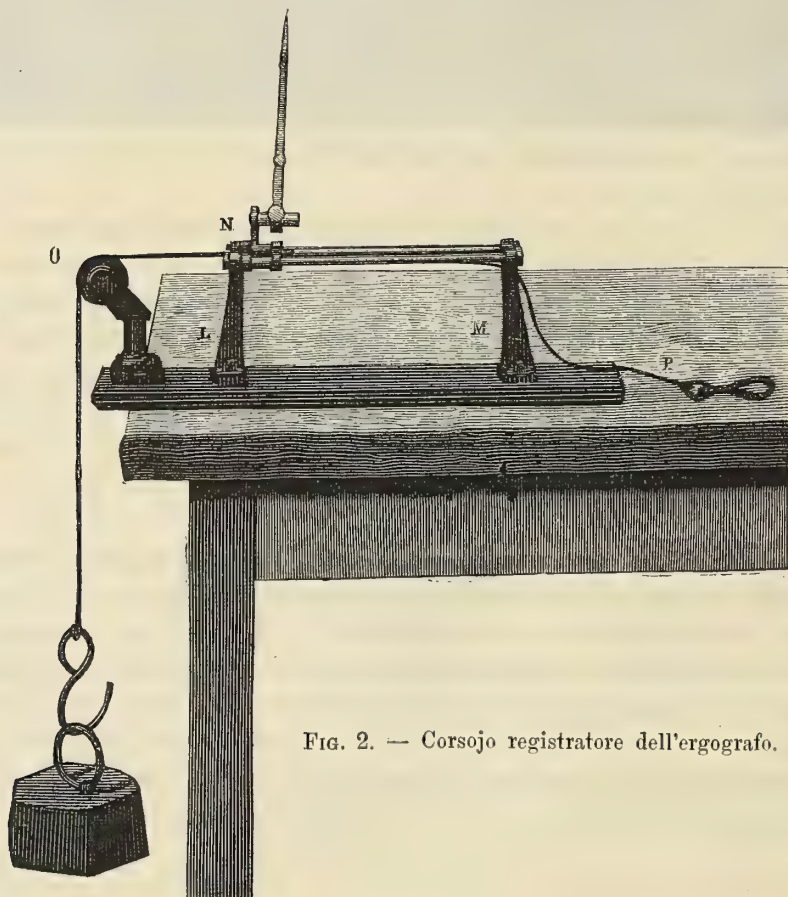



Fig. 2. — Corsojo registratore dell'ergografo.

Consta di una piattaforma di ferro larga 7 centim. e lunga 32 centim., che porta due colonnette di ottone L M che nella figura 2 si vedono di profilo: sono fatte a forchetta e portano ciascuna due spranghe cilindriche di acciaio distanti 4 centim. l'una dall'altra in modo che costituiscono le guide del corsoio metallico N. Questo scorre con due aperture cilindriche nelle spranghe di acciaio sopra dette; esso porta un' asticella di metallo lunga 12 centim. che termina in una penna d'oca che scrive sulla carta infumata del cilindro. Mettendo una delle solite penne con inchiostro d'anilina si può scrivere egualmente bene sulla carta ordinaria. Questa asticella ha una vite di pressione colla quale si solleva, o si abbassa la penna per scrivere bene sul cilindro, o togliere il contatto della penna colla carta. Il corsoio N ha due uncini: ad uno si fissa la corda P colla quale lo si tira per mezzo della flessione delle dita. Questa corda porta alla sua estremità un forte anello di cuoio che si introduce nella prima falange del dito medio. All'altro uncino del corsoio che trovasi sulla faccia opposta per mezzo di un'altra cordicella O si attacca un peso di 3, o 4, o più chilogrammi, come è indicato nella fig. 2. Questa cordicella passa sopra una puleggia metallica. Siccome queste piccole corde si logorano facilmente, quando si lavora di continuo con grossi pesi, è meglio servisi di corde di minugia, come quelle che si adoperano pei violoncelli, o pei contrabassi.

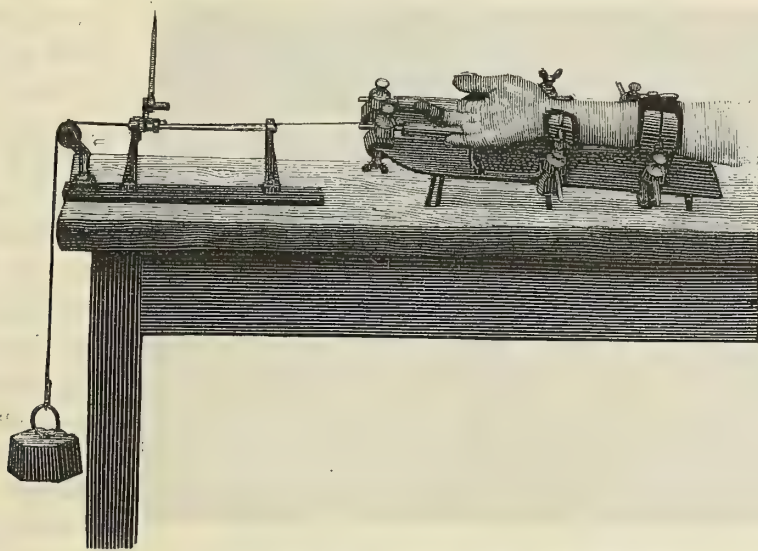



Fig. 3. — Disposizione dell'Ergografo per una esperienza.

La figura 3 rappresenta l'apparecchio nel momento di fare una esperienza. Vi manca solo il cilindro registratore che era inutile disegnare. Le contrazioni del dito medio si eseguiscono secondo il ritmo segnato da un orologio di Baltzar: la corrente elettrica che viene interrotta fa suonare un campanello e col ritmo di questo segnale si eseguiscono regolarmente le contrazioni. Ma basta un semplice pendolo a minuti secondi, oppure un orologio a minuti indipendenti per regolare il tempo delle contrazioni.

Riproduco due tracciati scritti dall'ergografo. La figura 4 rappresenta le serie

delle contrazioni fatte dal dott. Arnaldo Maggiora, mentre sollevava un peso di tre chilogrammi ogni due minuti secondi. La figura 5 è un tracciato scritto dal dott. Vittorio Aducco in condizioni eguali. In queste esperienze si faceva uno sforzo massimo fino all'esaurimento della forza. Adoperando pesi di 3 o 4 chilogrammi, e ripetendo le contrazioni ogni due secondi si fanno generalmente da 30 a 60 contrazioni che decrescono regolarmente in modo da produrre una curva che può considerarsi effettivamente come il tracciato che eseguisce un muscolo per un eccitamento massimo fino all'esaurimento della sua forza.

Quando si lavora con un peso che non sia molto grande uno sente che nel principio raggiunge il massimo della flessione senza che i muscoli abbiano fatto tutto lo sforzo di cui sono capaci; ed in ultimo quando si è stanchi malgrado ogni sforzo non si riesce più a sollevare il peso. Non è dunque possibile un raffronto esatto fra la prima parte della curva e l'ultima. Però anche in queste condizioni, cioè quando i pesi sono tali che per compiere una elevazione massima non occorre uno sforzo massimo, si può ancora ottenere dei tracciati regolari ed utili per lo studio della fatica, se si cerca di mantenere costante lo sforzo della volontà fino all'esaurimento della forza muscolare.

Nelle figure 4 e 5 si vede subito la grande differenza che vi è nella curva della fatica di due persone, malgrado che abbiano presso a poco la stessa età da 24 a 28 anni, e lo stesso genere di vita e sollevino entrambe con uno sforzo massimo un peso di 3 chilogrammi ogni 2″ (¹). Nel dott. Maggiora (fig. 4) le contrazioni decrescono rapidamente in altezza nel principio del lavoro e meno rapidamente in ultimo. Il dott. Aducco in condizioni analoghe dà una curva inversa (fig. 5): cioè nel principio è piccola la diminuzione nell'altezza delle contrazioni, ed in ultimo invece queste si abbassano rapidamente, fino a che il muscolo non può più contrarsi.

Fig. 4. — Dott. Maggiora. Fig. 5. — Dott. Aducco.
Tracciati della fatica scritti nell'aprile 1884
sollevando col dito medio della mano destra un peso di 3 chilogrammi
ogni 2 secondi.

(¹) I tracciati di questa memoria e della seguente del dott. Maggiora sono tutti scritti da destra a sinistra.

Non si tratta dunque di un esperimento semplice come quelli che si fanno irritando il nervo sciatico per mezzo di una corrente elettrica che fa contrarre il muscolo gastrocnemio di una rana. L'eccitamento che qui fa contrarre i muscoli è un fatto complesso e non vi è paragone possibile fra la natura del processo psichico che qui entra come fattore e quello della corrente che colpisce direttamente il nervo. Avremo occasione di persuaderci che lo stimolo della volontà agisce in modo diverso che non le eccitazioni che facciamo sul nervo mediano colle correnti elettriche. Ma che lo stimolo in queste esperienze non si possa graduare e mantenere costante, come si fa colle correnti indotte, non costituisce un grave difetto della esperienza, perchè si tratta primieramente di conoscere quale sia il decorso della fatica nelle condizioni naturali della vita, e non in quelle artificiali di eccitamenti anormali fatti da cause esterne che agiscano sul nervo, o sul muscolo.

Analizziamo meglio come funziona l'ergografo prima di passare alla discussione delle curve. La figura 6 rappresenta il profilo di una mano dove il dito medio nel

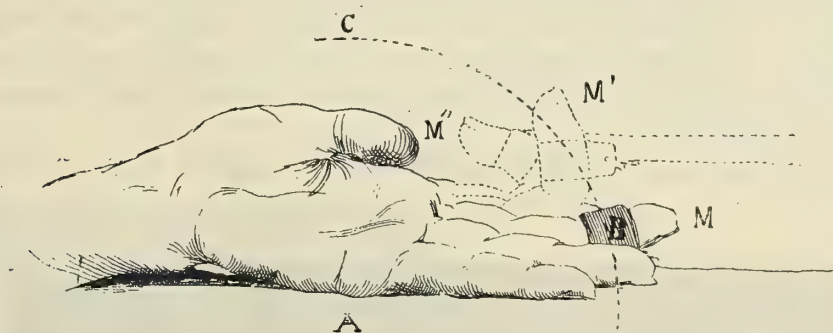



Fig. 6. — Profilo della mano e del dito medio nelle posizioni differenti di trazione.

piegarsi passa per tre posizioni successive M M′ M″. Se la prima e seconda articolazione delle falangi fossero rigide e il dito girasse unicamente sull'articolazione metacarpo-falangea, il punto B dove sta fissa la cordicella che traccia la contrazione descriverebbe un arco di cerchio B C col centro in A. Ma siccome anche le altre due articolazioni falangee si piegano, il punto di trazione non descrive un arco di cerchio, ma una curva speciale B M N che ho segnato nella figura 7. Il tratto B M che sarebbe la parte della traiettoria meno favorevole al lavoro utile viene eliminata tenendo il dito medio leggermente piegato fino dal principio dell'esperienza come si vede nella figura 3. Il dito che si contrae tira la cordicella dell'ergografo per il tratto M N che può considerarsi quasi come una linea retta.

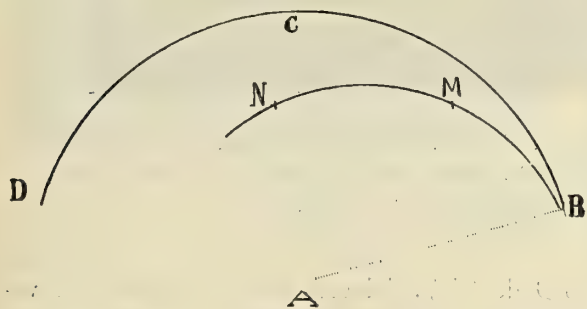



Fig. 7.

Il muscolo che lavora coll'ergografo solleva il peso solo nel momento in cui si contrae, e finito lo sforzo muscolare il peso è trattenuto dall'apparecchio stesso: noi ci troviamo così nelle condizioni più favorevoli per studiare la fatica del muscolo che lavora.

Si comprende che qui lavorano contemporaneamente due muscoli: il flessore profondo e il flessore superiore delle dita e che gli interossei non sono affatto esclusi. Ho provato a costruire un apparecchio dove funzionasse solo uno dei flessori e dovetti rinunciarvi perchè non potevo eliminare l'azione dei muscoli estensori delle dita, e la curva riusciva meno regolare.

Una delle cose che ci hanno più sorpreso in queste ricerche è che ogni persona ha una curva sua propria della fatica: per cui i tracciati che vennero scritti da varie persone si riconoscono facilmente gli uni dagli altri. Sono quattro anni che facciamo delle ricerche con questi apparecchi nel mio Laboratorio, e il tipo dei tracciati caratteristico per le varie persone non è cambiato: così che ad esempio il dott. Maggiora dopo 4 anni fa delle curve come la fig. 4 e il dott. Aducco dei tracciati come la fig. 5 sempre quando sollevino il medesimo peso colla medesima mano, e colla stessa frequenza di contrazione.

Riferisco come prova due altri tracciati del dott. Maggiora e Aducco scritti nel 1888 (fig. 8 e 9) per metterli a raffronto coi due precedenti scritti nel 1884. Il trac-

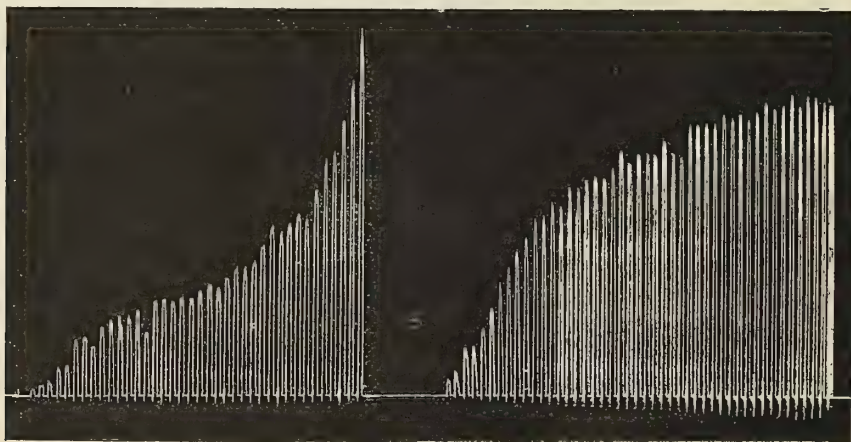



Fig. 8. — Dott. Maggiora. Fig. 9. — Dott. Aducco.
Tracciati della fatica scritti nel luglio 1888 sollevando col dito medio della mano destra un peso di 3 chilogrammi ogni 2 secondi.

ciato 8 è del dott. Maggiora e quello 9 del dott. Aducco. Basta guardarli per vedere che dopo quattro anni non è cambiata la curva della fatica di queste due persone. Facendo la somma delle altezze alle quali venne sollevato il peso di 3 chilog. colle singole contrazioni fino all'esaurimento della forza, vediamo che la differenza non è molto considerevole. Questa coincidenza sembrerà più interessante quando si noti

che i tracciati li ho presi a caso in mezzo a molti simili, senza voler cercare quelli che fossero eguali nel valore del lavoro meccanico.

	1884	1888
Dott. Maggiora		
altezza di sollevamento . .	0,791 m	0,596 m
lavoro meccanico	2,373	. . . 1,788
Dott. Aducco		
altezza di sollevamento . .	1,236 m	1,177 m
lavoro meccanico	3,708	. . . 3,531

Non sarebbe esatto se affermassi che la curva della fatica dei muscoli flessori rimane assolutamente costante. La quantità del lavoro meccanico e la curva della fatica possono variare per molte cause che verranno studiate nella seguente memoria del dott. Maggiora. Ne accennerò solo qualcuna per dimostrare l'attendibilità dei risultati. I fatti psichici esercitano una influenza notevole sul decorso della fatica. Cosicchè un eccitamento nervoso, come quello che si prova nel fare lezione, produce un mutamento nel tracciato della fatica: e la quantità di lavoro meccanico aumenta anzichè diminuire.

La figura 10 rappresenta un tracciato scritto dal dott. Aducco appena finita la sua lezione di tecnica fisiologica, in questo tracciato solleva un peso di 3 chilogr. ogni 2 secondi, e la figura 11 un tracciato scritto dal dott. Maggiora in condizioni

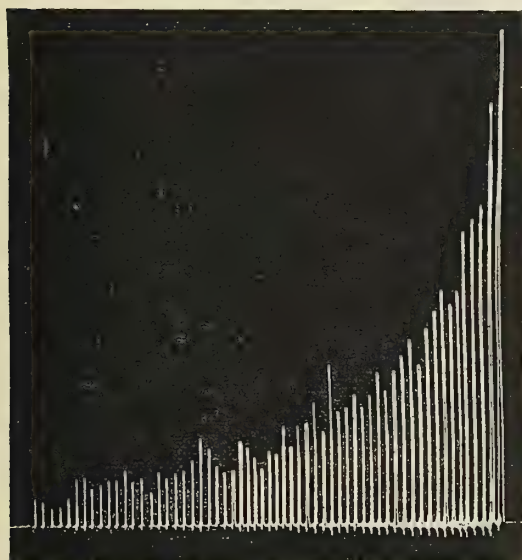



Fig. 10. — Il dott. Maggiora solleva 3 chilogr. col dito medio della mano destra ogni 2 secondi, mentre si trova in stato di leggero eccitamento nervoso.

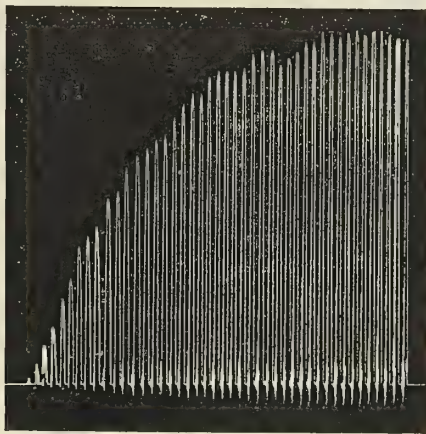



Fig. 11. — Il dott. Aducco solleva 3 chilogr. col dito medio della mano destra ogni 2 secondi, mentre si trova in stato di leggero eccitamento nervoso.

analoghe. Il dott. Maggiora e Aducco danno in questa esperienza un lavoro meccanico maggiore di quanto diedero nelle precedenti esperienze. Paragonando queste due curve si vede un fatto strano, ed è che la convessità della prima corrisponde quasi

esattamente alla concavità dell'altra. Infatti se prendiamo un'apertura di compasso di 55 m.m. possiamo tracciare un arco col centro all'indentro che passa per l'estremità di tutte le contrazioni del dott. Aducco, e un altro arco col centro all'infuori che passerà toccando la punta di quasi tutte le contrazioni del dott. Maggiora. A questa coincidenza non dobbiamo dare alcuna importanza; tutto al più serve per dimostrare i due tipi estremi ed opposti che può presentare la curva della fatica. Vedremo fra poco che in me le contrazioni vanno decrescendo in linea retta.

Una differenza considerevole si produce col variare delle stagioni, quando queste riescono a modificare la nutrizione dell'organismo. Il dott. Aducco, p. e., il quale nell'estate si sente meno bene che nell'inverno, presentò per due anni di seguito delle variazioni notevoli del lavoro meccanico, quantunque la curva della fatica conservasse il medesimo tipo.

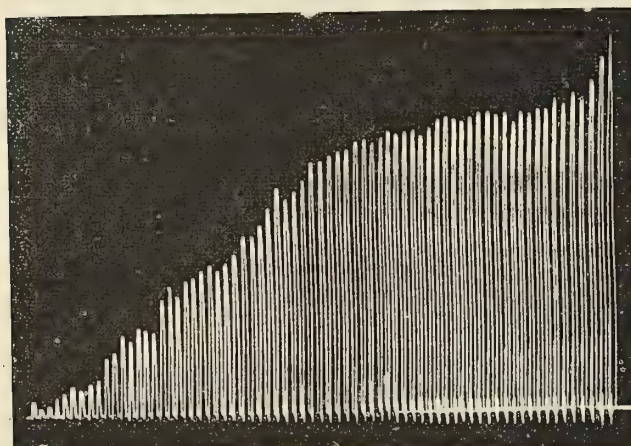



Fig. 12. — Tracciato della fatica scritto dal dott. Aducco nel 1887 sollevando col dito medio della mano destra un peso di 3 chilogr. ogni 2 secondi.

Il tracciato 12 fu scritto dal dott. Aducco nell'inverno del 1887, quando, secondo dice lui, era nel massimo della sua forza. In esso sollevò coll'indice della mano destra un peso di 3 chilogr. ogni 2 secondi, per un altezza totale di sollevamento di $1^{m},842$, che corrisponde ad un lavoro meccanico di 5,526. Dopo quell'epoca il dott. Aducco non ha più scritto dei tracciati così lunghi.

Ho voluto riferire questo esempio a preferenza di altri per dare una prova dell'esattezza dei risultati che si ottengono coll'ergografo. Delle variazioni molto più grandi le osservai sperimentando sul meccanico del Laboratorio sig. Corino, il quale in seguito alla malattia di un occhio che non credevamo avesse potuto agire sullo stato generale della sua salute, mostrò invece una modificazione e diminuzione grande nel tracciato della fatica. Dalle prove che abbiamo fatto nel nostro Laboratorio durante quattro anni con questo apparecchio risultò, che con nessun altro apparecchio si può misurare tanto sicuramente le variazioni annue, od accidentali, che succedono nella forza dei muscoli e credo che in questo riguardo l'ergografo avrà delle utili applicazioni a preferenza dei dinamometri che sono meno sicuri come strumento di misura della forza muscolare.

§ II.

Descrizione del ponometro.

Ciascuno conosce per propria esperienza che quando ripetiamo molte volte il medesimo esercizio muscolare, è molto diverso lo sforzo delle prime contrazioni e quello delle ultime, quando cominciamo ad essere stanchi. Anche lavorando coll'ergografo si sente come se il peso diventasse sempre più grave, e colla fatica cresce l'intensità dell'eccitamento nervoso, e questo si diffonde anche ad altri muscoli che non dovrebbero entrare in funzione. I primi a contrarsi sono i muscoli della faccia, poi vi si associano quelli delle estremità e del tronco. La circolazione si altera insieme al respiro, e la secrezione del sudore diviene abbondante. Ho cercato di scrivere la curva colla quale cresce lo sforzo nervoso a misura che aumenta la fatica, ed ecco come vi sono riuscito. L'apparecchio al quale diedi il nome di *ponometro* [1], o misuratore della fatica, è rappresentato dalla fig. 13. Esso consta di una piattaforma A B

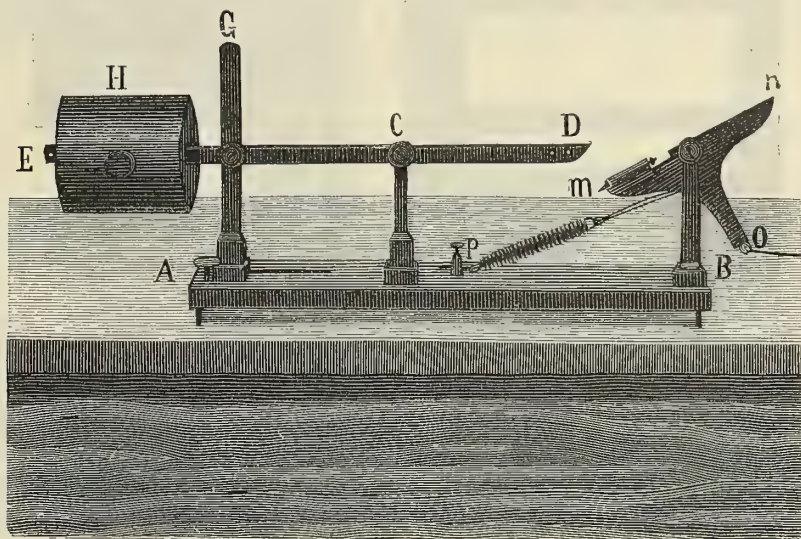



Fig. 13. — Ponometro.

di ferro lunga 40 centim. e larga 11 dello spessore di 1 centimetro. Nel mezzo sta fissa una colonna metallica C che termina a forchetta e sostiene una spranga di acciaio D E che si muove su di un fulcro in C, come il giogo di una bilancia, formando una leva di prima specie. L'estremità E di questa spranga di acciaio, porta un peso H di quattro chilogrammi, che può farsi scorrere sulla spranga E D e fissarlo per mezzo di una vite laterale nel punto che si vuole.

(1) Ponometro da *πονέω* mi sforzo e *μέτρον* misura

Il dito che lavora deve sollevare questo peso. Un' altra forchetta G serve unicamente di sostegno. Questa forchetta è mobile, e la si fa scorrere nella scanalatura che sta nella piattaforma, mettendola sempre il più vicino che sia possibile al peso H per sostenerlo. Un pezzo di gomma elastica messo in fondo alla scanalatura della forchetta G serve a smorzare l'urto e il rumore del colpo che fa il peso quando cade.

Per sollevare il peso H mi servo di una leva ad angolo *m n o*, che nella fig. 13 è rappresentata da un triangolo metallico, ma che potrebbe anche essere semplicemence un ferro ad angolo retto. All'estremità *o* si attacca la cordicella che viene tirata dal dito. Basta confrontare la fig. 13 colla fig. 14 dove l'apparecchio è messo in ordine per un'esperienza per comprendere come funziona la leva ad angolo *m n o*.

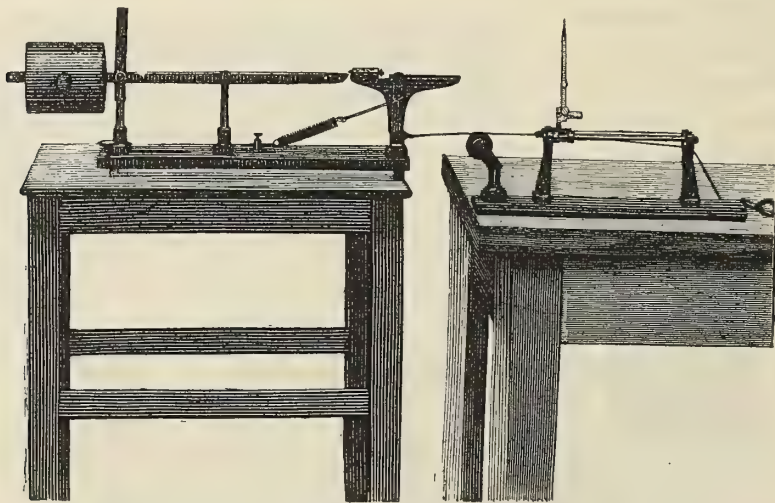



Fig. 14. — Disposizione del ponometro per una esperienza.

All'estremità *m* vi è una stanghetta smussata che viene sospinta da una molla. È un congegno eguale a quello che si vede nelle toppe delle porte che si chiudono con una semplice spinta. Appena il dito medio cessa di tirare la cordicella, la leva a squadro passa dalla posizione indicata dalla fig. 13 a quella indicata dalla fig. 14; perchè vi è una molla a spirale P che tira la leva a squadro, e lo scatto che si produce nel ritornare indietro chiude la stanghetta a colpo come nella fig. 14. Si comprende facilmente come l'apparecchio ritorni così ad essere pronto per una nuova trazione. Ho costrutto la leva ad angolo colla forma *m n o*, perchè invece di una molla spirale adoperai per maggiore esattezza un peso messo in *n*, ma la differenza è così piccola che una molla è da preferirsi.

Tirando la funicella dell'apparecchio come è rappresentato nella fig. 14 lo sforzo muscolare agirà solo per una parte della durata della contrazione, e solo nel principio. Abbiamo come due cerchi: l'uno è dato dalla leva a squadro e l'altro dalla leva di prima specie che sostiene il peso H; nel momento in cui cessa il contatto fra la stanghetta *m* e il punto D che sostiene il peso, il muscolo continuando a

contrarsi lavorerà a vuoto. Un congegno speciale a vite permette di allungare o raccorciare la stanghetta *m* in modo che il contatto nel movimento duri più o meno colla spranga D. Si ha così un modo facile di allungare, o di raccorciare il periodo di tempo nel quale i muscoli flessori delle dita sollevano un peso, del quale si regola il valore facendo scorrere la massa H sulla spranga E C D. Il muscolo con questo apparecchio lavora dunque solo nel principio della contrazione e noi scriviamo oltre il lavoro utile, anche il movimento successivo che fa il muscolo quando gli viene a mancare improvvisamente il peso che solleva.

Fig. 15. — Tracciato scritto dal dott. Aducco col ponometro; il dito medio solleva 4 chilogr. col ritmo di 2 secondi.

La figura 15 rappresenta un tracciato scritto dal dott. Aducco con questo apparecchio sollevando un peso di 4 chilogrammi col ritmo di 2″. Il profilo della curva è inclinato in senso opposto dei tracciati scritti coll'ergografo, quantunque questo tracciato, come tutti gli altri, sia scritto da destra a sinistra. La linea *m n* segna il punto fino al quale il dito medio solleva il peso di 4 chilogrammi; la parte del tracciato che sta sopra la linea *m n* segna l'altezza delle contrazioni a vuoto.

Noi vediamo che lo spazio percorso dal dito quando cessa il lavoro utile di ogni contrazione è minore in principio e circa tre volte maggiore in ultimo quando il muscolo è stanco. La maniera più semplice di interpretare questo fatto mi pare sia di supporre che l'eccitamento nervoso

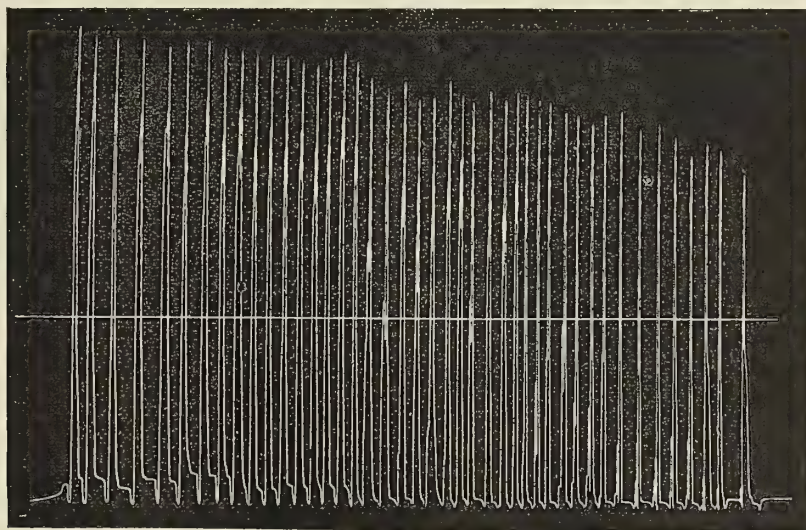
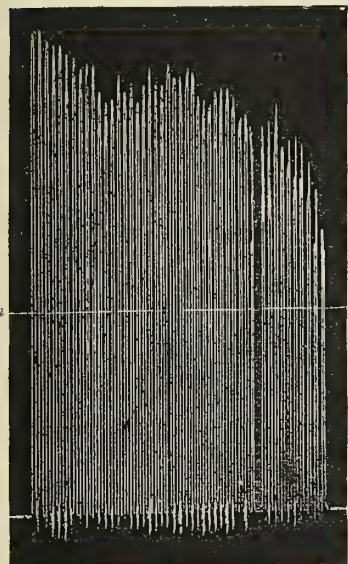



Fig. 16. — Tracciato scritto col ponometro dal dott. Maggiora sollevando col dito medio un peso di 5 chilogr. ogni 3 secondi. La figura è ridotta di un terzo.

che si manda ad un muscolo per farlo contrarre quando esso è stanco sia molto maggiore di quando esso è riposato: e che il muscolo stanco non può arrestarsi con eguale facilità quando è iniziata la sua contrazione, in causa alla intensità maggiore dei processi da cui dipende la contrazione stessa.

La figura 16 rappresenta una esperienza eguale fatta dal dott. Maggiora mentre solleva un peso di 5 chilogrammi ogni 3''. Questa figura è ridotta di un terzo. Anche qui nel principio il movimento a vuoto è piccolo e dopo cresce colla stanchezza; è interessante che qui pure abbiamo due curve diverse, come già osservammo per mezzo dell'ergografo: nel dott. Maggiora la curva dell'incremento dello sforzo nervoso è rappresentata da una linea quasi retta.

L'interpretazione più semplice di questa esperienza è che il muscolo stancandosi abbia bisogno di un eccitamento nervoso più forte per contrarsi. Non entriamo nella questione se anche il nervo si stanchi. È questo un problema molto complesso che verrà esaminato più attentamente dal dott. Maggiora nella memoria successiva. Donders e van Mansvelt [1] avevano già intraveduto il fatto che noi vediamo svolgersi nel tracciato scritto dal ponometro. Questa curva confrontata con quella dell'ergografo dimostra che mentre il lavovo meccanico prodotto dal muscolo tende a diminuire, cresce progressivamente lo sforzo nervoso, e l'intensità dei processi che costituiscono la contrazione.

§ III.

La curva della fatica nei muscoli dell'uomo.

La determinazione della curva della fatica muscolare nell'uomo è cosa importante, perchè fino ad ora sappiamo assai poco intorno alla natura dei processi con cui si esaurisce e si ristabilisce l'energia dei muscoli, dei nervi e dei centri nervosi.

La linea che passa per il vertice di tutte le contrazioni che fanno successivamente i muscoli flessori delle dita, solo in poche persone è una linea retta, nel maggior numero segna una curva colla convessità all' indentro, o all' infuori; è meno frequente che vi sia un punto di inflessione e che la curva prenda la forma di un S. Non vi è dunque un tipo fondamentale che rappresenti il processo della fatica come esso si svolge nei muscoli dell'uomo per una serie di contrazioni volontarie. Vedremo in seguito che il profilo della curva della fatica si modifica per molte cause e specialmente secondo il peso che il muscolo solleva e secondo il ritmo col quale lo solleva. Intanto abbiamo già osservato che un medesimo muscolo, collo stesso peso, e colla medesima frequenza di contrazione dà sempre la medesima curva, od una curva che con poche variazioni presenta un aspetto caratteristico e individuale. È inutile avvertire che si tratta in gran parte della misura di un processo psichico, e che il fenomeno della fatica appare qui assai più complicato che non sia nelle curve che si ottengono eccitando direttamente il nervo, e delle quali avremo occasione di

[1] Hermann, *Handbuch der Physiologie*, vol. I, p. 9.

parlare in seguito: certo il tracciato è la risultante di cause complesse le quali agiscono sui muscoli, sulle terminazioni nervose, sui nervi, sui centri nervosi, sulla circolazione, e che dipendono dalla volontà, e dalla resistenza complessiva dell'organismo. Irritando con una corrente indotta il nervo mediano, od i muscoli flessori, si ottengono delle curve differenti e più regolari, come dirò in seguito.

Bernstein [1] affermò che il ristabilirsi di un muscolo dopo che venne affaticato, incomincia lentamente, cresce con velocità successivamente maggiore, e dopo con velocità decrescente, e che infine ritorna normale. Si può supporre che il muscolo lavorando perda la sua energia in un modo e la riacquisti in un altro, perchè sono due processi diversi quello che distrugge la forza del muscolo, e quello che la restituisce. Cercando nei miei tracciati ne trovai moltissimi che rassomigliano alla curva di Bernstein: ma ben inteso vi rassomigliano in senso inverso, cioè il muscolo comincia prima a stancarsi poco, vi succede un secondo periodo nel quale la stanchezza procede rapidamente e dopo si rallenta. A tale coincidenza non possiamo dare alcuna importanza, perchè vi sono molte altre curve della fatica che invece rappresentano un iperbole, o un arco di cerchio, o una linea retta.

Ho pure cercato se vi sono delle differenze fra la curva della mano destra e della mano sinista, e ho trovato come era da aspettarsi che in molte persone una mano resiste più dell'altra alla fatica.

Riproduco un tracciato preso su me stesso. Scrivo prima colla mano sinistra sollevando tre chilogrammi ogni due secondi (fig. 17) e qui si vede che l'altezza delle

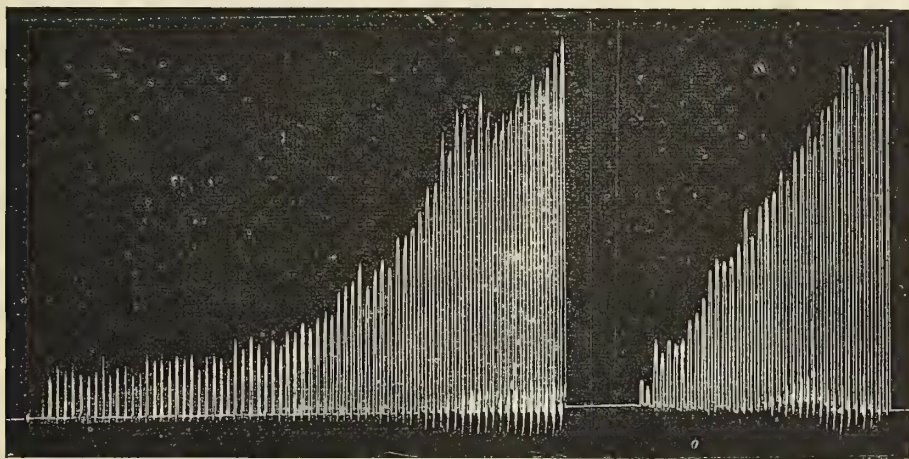



Fig. 18. Fig. 17.

Tracciato scritto da me coll'indice della mano sinistra fig. 17 e coll'indice della mano destra fig. 18 sollevando un peso di 3 chilogr. ogni 2 secondi.

contrazioni discende regolarmente quasi in linea retta. Aspetto due ore fino a che mi sia completamente riposato e quindi scrivo colla mano destra (fig. 18) sollevando

[1] Bernstein *Ueber die Ermüdung und Erholung der Nerven.* Pflüger's Archiv XV, pag. 295.

tre chilogrammi ogni due secondi. Si vede che le contrazioni scendono progressivamente in linea retta come per la mano sinistra fino a un certo punto e poi la curva si avvicina ad un arco di iperbole che decorre parallelo all'asintota. Per me come per altre persone il peso di 3 chilogrammi può sollevarsi indefinitamente col ritmo di due secondi: questo breve periodo di riposo è già sufficiente per ridare al muscolo l'energia che basta per sollevare il peso ad una piccola altezza.

Mentre sto correggendo le bozze di questo scritto ripeto ancora una volta questa esperienza e trovo che alla distanza di tre anni le curve che ottengo colla mano sinistra e colla destra, facendo il medesimo lavoro, sono identiche alle precedenti figure 17 e 18.

Mio fratello dott. Ugolino, alcuni studenti, Giorgio Mondo inserviente del mio Laboratorio, ed alcuni soldati davano essi pure delle curve come la fig. 18, perchè non si esauriva completamente la forza dei muscoli sollevando 3 chilogrammi col dito medio ogni due secondi. In altre persone in condizioni simili compajono dei periodi di maggiore, o minore attività. Ossia chi fa l'esperimento ha la coscienza di tirare sempre colla medesima forza, e ciò malgrado vi sono dei momenti nei quali non riesce a smovere il peso, e degli altri in cui lo solleva: e questo succede gradatamente così chè si formano dei periodi in cui le contrazioni aumentano, o diminuiscono in altezza, o cessano del tutto. Il dott. Warren P. Lombard studiò questo interessante fenomeno dei periodi nella fatica, e pubblicherà presto le ricerche che egli fece nel mio laboratorio.

Per formarsi un concetto delle variazioni che presenta la curva della fatica nella stessa persona ho fatto una lunga serie di osservazioni insieme al dott. Maggiora. Oltre ai colleghi che frequentavano il Laboratorio, vollero gentilmente aiutarci in questo studio parecchi studenti di medicina ed alcuni soldati che il Colonello dell'81° reggimento permise venissero nel Laboratorio. Sono esperienze che durarono spesso parecchi giorni, e nelle quali si ripeteva ogni due ore il tracciato della fatica coll'ergografo. Non riferisco i tracciati di queste esperienze quantunque credo non sarebbe un lusso il riprodurre tutta intera la serie delle osservazioni fatte in un giorno. Il dott. Maggiora riferirà in seguito alcune serie di queste esperienze per quanto si riferisce al lavoro meccanico. Mi limiterò ad indicare sommariamente il risultato di queste osservazioni.

Vi sono delle persone che hanno maggior attitudine a dare una serie regolare di tracciati tanto colla mano destra quanto colla sinistra: in altre persone il lavoro è più irregolare e le curve riescono meno uniformi: specialmente le prime volte che uno scrive coll'ergografo.

Il soldato Mantovani era uno di quelli che fin dal principio diede dei tracciati regolari tanto colla mano destra, quanto colla mano sinistra; ed era anche una delle persone che poteva lavorare un maggior numero di ore senza stancarsi, come vedremo in seguito nella memoria del dott. Maggiora. Le figure 19 e 20 rappresentano le forme più differenti dei suoi tracciati. Qualche volta invece di un arco di cerchio come la fig. 20 scritta alle 9 antim. colla mano sinistra, la curva scritta due ore dopo prendeva il profilo quasi di una linea retta, come si vede nella fig. 19, e tal altra la curva rassomigliava ad una S allungata; ma queste differenze sono piccole; e perciò

si può dire che le variazioni individuali sono sempre meno spiccate delle differenze di forma che possono presentarsi fra varie persone.

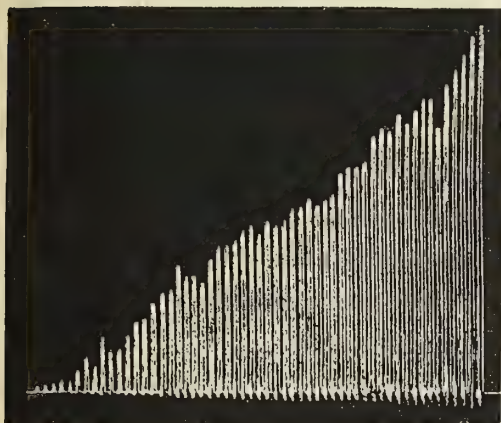
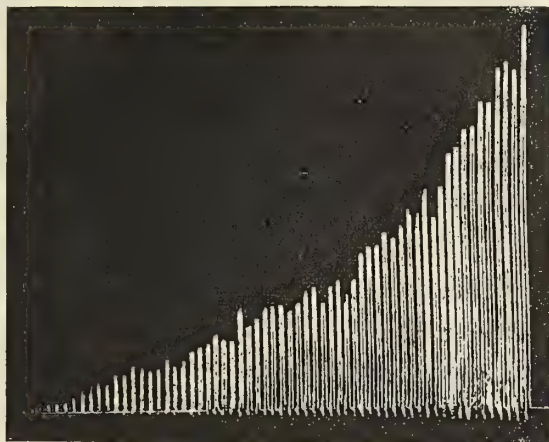



Fig. 19. Fig. 20.

Soldato Mantovani. Le figure 19 e 20 rappresentano il profilo di tracciati scritti l'uno dopo l'altro alla distanza di due ore mentre col dito medio solleva un peso di 3 chilogr. ogni 2 secondi.

Irritazione diretta dei muscoli e dei nervi.

Irritando i muscoli od i nervi per mezzo di una corrente indotta coll'apparecchio a slitta di Du Bois Reymond ottenni coll' ergografo dei tracciati analoghi ai precedenti. Il dott. Arnaldo Maggiora, il dott. Warren P. Lombard e mio fratello Ugolino fecero delle ricerche coll'ergografo in varie condizioni per stabilire le modificazioni, e le differenze che esistono fra le curve della fatica per movimenti volontari, o per la eccitazione del nervo mediano, o per quella diretta dei muscoli flessori. Riferisco una sola esperienza (fig. 21) fatta sopra di me per mostrare la grande regolarità dei

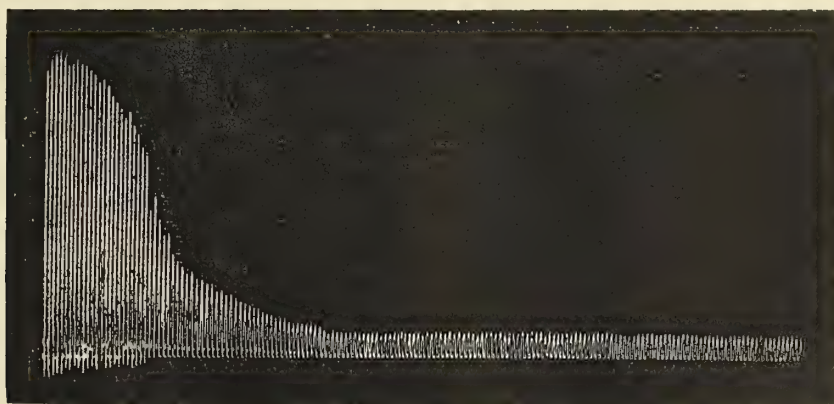



Fig. 21. — A. Mosso. Curva della fatica ottenuta irritando direttamente i muscoli con una corrente indotta. Il dito medio solleva mezzo chilogrammo ogni due secondi.

tracciati che si ottengono coll'ergografo. Un elettrode ricoperto da una piccola spugna umida era tenuto fisso con un nastro elastico sulla pelle dell'antibraccio presso la piegatura del gomito nel punto dove si può irritare meglio il nervo mediano secondo la figura data dall'Erb (1). L'altro elettrode era fissato più in basso nel punto indicato per l'eccitamento dei muscoli flessori delle dita. L'eccitamento si faceva ogni due secondi, e la chiusura della corrente che metteva in azione un apparecchio a slitta di Du Bois Reymond durava circa mezzo secondo. Il peso che sollevava il dito medio della mano sinistra era di mezzo chilogramma. Questa curva a differenza delle precedenti è scritta da sinistra a destra.

In questa esperienza la posizione del braccio era alquanto diversa di quella rappresentata nella figura 3. Dirò come era disposto l'apparecchio perchè, quando si deve stare lungamente seduti cogli elettrodi sui muscoli o sul nervo, quest'altra posizione è più comoda. Io ero seduto col braccio verticale lungo il fianco, e l'antibraccio piegato ad angolo retto sul braccio. Perchè il braccio non si movesse indietro ho levato i due sostegni semicircolari C D della figura 1 e li ho messi l'uno vicino al gomito e l'altro presso il terzo superiore dell'antibraccio. Un sostegno pesante portava questi due canali semicircolari per impedire al braccio ed al gomito di spostarsi all'indietro.

Spero di aver iniziato coll'ergografo una serie di ricerche esatte nella fisiologia dell'uomo, sarei lieto se questo strumento trovasse delle utili applicazioni anche nel campo della patologia.

(1) W. Erb, *Handbuch der Elektrotherapie* 1882, pag. 286.

RELAZIONE

letta dal Socio A. Mosso, relatore, a nome anche del Socio C. Golgi nella seduta del 4 novembre 1888 sulla Memoria del dott. Arnaldo Maggiora, intitolata: *Le leggi della fatica studiate nei muscoli dell'uomo.*

« Questa Memoria col titolo, *Le leggi della fatica studiate nei muscoli dell'uomo*, è un lavoro importante per la estensione colla quale fu esaminato il fenomeno della fatica nell'uomo.

« L'autore è giunto a risultati nuovi e mise meglio in evidenza, col metodo grafico, alcune particolarità nello studio delle contrazioni muscolari che non erano prima esattamente conosciute nelle loro varianti.

« Noi proponiamo che la Memoria del dott. Maggiora sia stampata in esteso negli Atti dell'Accademia dei Lincei ».

Le leggi della fatica studiate nei muscoli dell'uomo. Memoria II del dott. ARNALDO MAGGIORA

Servendomi degli strumenti costrutti dal prof. A. Mosso per studiare la fatica, ho fatto nel suo laboratorio le seguenti ricerche per determinare le leggi della fatica muscolare.

I.

Sui mutamenti che presenta la curva della fatica quando il muscolo che si contrae solleva dei pesi più o meno grandi.

La quantità di lavoro meccanico che un muscolo produce nell'unità del tempo con uno sforzo eguale può farsi variare in due modi cioè:

1° modificando la grandezza del peso che solleva il muscolo,

2° modificando la frequenza colla quale il muscolo si contrae.

Studierò prima questi due fattori nelle loro variazioni e dopo prenderò in esame le modificazioni che subisce il decorso della fatica in varie condizioni fisiologiche.

Edoardo Weber nel suo classico lavoro sul movimento dei muscoli (1) aveva accertato il fatto che l'effetto utile della contrazione muscolare è massimo per un determinato peso e che diminuisce quando tale peso diventa maggiore o diventa minore: ed egli trovò che il peso col quale un muscolo ottiene sollevandolo un massimo effetto si fa tanto più piccolo quanto più il muscolo è affaticato.

Queste ricerche che Ed. Weber aveva eseguito sui muscoli della rana separati dal corpo ho cercato di ripetere sull'uomo studiando in vece di una sola contrazione, tutta la serie delle contrazioni che il muscolo produce prima di esaurire le sue forze.

Per comodità di linguaggio adopero la parola *ritmo* per indicare la frequenza delle contrazioni ossia il numero dei minuti secondi che intercede fra una contrazione e l'altra, e col nome di *periodo di riposo* indico lo spazio di tempo che intercede fra i successivi tracciati della fatica ottenuti con una serie di contrazioni sino all'esaurimento.

Riferisco subito un'esperienza nella quale si è scritto colla mano sinistra e con la destra la curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio, sollevando un peso

(1) R. Wagner, Handwörterbuch der Physiologie, Bd. III, Ab. II, p. 121.

di 2 chilogrammi col ritmo di 2″. — Dopo due ore, quando mi sembrava che fosse cessata la stanchezza, si scrisse nuovamente il corso della stanchezza del dito medio che sollevava un peso di 4 chilogrammi, e finalmente dopo trascorse altre due ore di riposo si scrisse il tracciato della fatica con un peso di 8 chilogr.

Esperienza 1ª. (28. IV. 1886).

A. Maggiora anni 24, alle ore 8 antim. mette il braccio sinistro nell'ergografo. Si fissano bene le dita nel modo descritto dalla precedente Memoria del professore Mosso, e si lascia libero solo il dito medio che viene attaccato alla funicella dell'apparecchio per sollevare un peso di 2 chilogr. — Un orologio di Baltzar interrompe ad ogni 2″ una corrente elettrica, la quale fa suonare un timpano metallico che segna la frequenza dello sforzo muscolare.

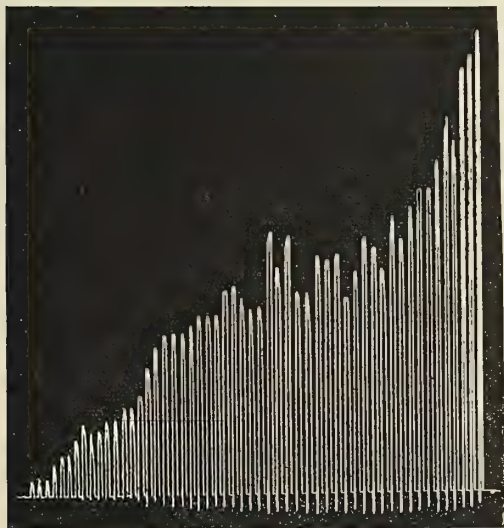



FIG. 1. — Tracciato 1 dell'esperienza 1ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio, della mano sinistra, col peso di 2 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

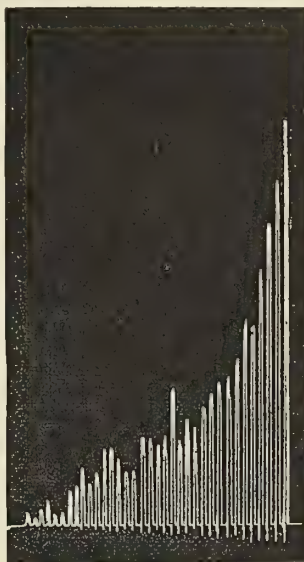



FIG. 2. — Tracciato 4 dell'esperienza 1ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio, mano sinistra, col peso di 4 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

Questa esperienza consta di 12 tracciati; per brevità non li riproduco tutti e ne dò i valori nella seguente tabella indicando i tracciati di cui espongo la figura. Il tracciato 1 (fig. 1) rappresenta la serie delle contrazioni fatte dal dito medio della mano sinistra ogni 2″ sino all'esaurimento delle forze. Se misuriamo l'altezza delle singole contrazioni troviamo che la somma è di $1^{m},301$. A questo numero daremo il nome di *altezza di sollevamento;* moltiplicandolo per il numero dei chilogrammi innalzati avremo il *lavoro meccanico* fatto dal muscolo che è di $2^{m},602$.

Appena finito questo tracciato si volta il sostegno dell'ergografo per dargli l'inclinazione che è più comoda all'atteggiamento della mano destra e questa solleva col medesimo ritmo il peso di 2 chilogr. all'altezza di $1^{m},157$, lavoro meccanico $= 2^{m},314$.

Per dar tempo ai muscoli di riposarsi si fa un'interruzione di due ore e alle dieci si scrive nuovamente il tracciato della contrazione del dito medio di destra col peso di 4 chilogr. e colla stessa frequenza di contrazione, tracciato 3, altezza di sollevamento $0^{m},485$, lavoro meccanico $1^{m},940$; col dito medio di sinistra tracc. 4, figura 2, altezza di sollevamento $0^{m},473$, lavoro meccanico $= 1^{m},892$.

Succedono altre due ore di riposo poi si scrive il tracciato della mano sinistra e quello della mano destra che solleva un peso di 8 chilogr. ad ogni 2″, tracciato 5, fig. 3, altezza di sollevamento 0^m,159, lavoro meccanico 1^m,272; e tracciato 6, altezza di sollevamento 0^m,130; lavoro meccanico 1^m,040.

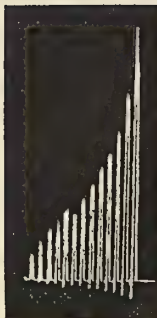



Fig. 3. — Tracciato 5 dell'esperienza 1ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio, mano sinistra, col peso di 8 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

Per completare le osservazioni sul decorso della fatica ripetevo dopo due ore di riposo l'ultima esperienza facendo sollevare alla stessa persona 8 chilogr. col dito medio della mano destra, tracciato 7, altezza di sollevamento 0^m,167, lavoro meccanico 1^m,336, e poi col dito medio della sinistra, tracciato 8, altezza di sollevamento 0^m,165, lavoro meccanico 1^m,320; e successivamente dopo altre due ore di riposo ripetevo nuovamente un'osservazione analoga alla 3ª e 4ª sollevando 4 chilogr. con la mano sinistra, tracciato 9, altezza di sollevamento 0^m,482, lavoro meccanico 1^m,928, e con la destra tracciato 10, altezza di sollevamento 0^m,590, lavoro meccanico 2^m,360: e finalmente dopo altre due ore di riposo un'osservazione uguale alla 1 e 2, sollevando un peso di 2 chilogr. ad ogni 2″ con la mano destra, tracciato 11, altezza di sollevamento 1^m,460, lavoro meccanico 2^m,920, e con la sinistra, tracciato 12, altezza di sollevamento 1^m,284, lavoro meccanico 2^m,568.

Tabella 1ª. — *Peso 2. 4. 8. 4. 2. chilogr. frequenza della contrazione 2″.*

Tracciato N.ro	Ore	Peso in chilog.	Mano sinistra		Mano destra	
			altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1 fig. 1	8 ant.	2	m 1,301	m 2,062	—	—
2	»	»	—	—	—	—
3	10 ant.	4	—	—	m 1,157	m 2,314
4 fig. 2	»	»	0,473	1,892	0,485	1,940
5 fig. 3	12 ant.	8	0,159	1,292	—	—
6	»	»	—	—	—	—
7	2 pom.	»	—	—	0,130	1,040
8	»	»	0,165	1,320	0,167	1,336
9	4 pom.	4	0,482	1,928	—	—
10	»	»	—	—	—	—
11	6 pom.	2	—	—	0,590	2,360
12	»	»	1,284	2,568	1,460	2,920

Paragonando fra di loro le figure 1, 2, 3 si vede:

1.° Che la linea la quale unisce l'altezza delle singole contrazioni ha un decorso affatto diverso nella figura 1, 2 e 3; ciò vuol dire che la curva della fatica cangia di forma secondochè i muscoli flessori delle dita sollevano un peso di 2 chilogram. o di 4 o di 8.

2.° Che il lavoro meccanico dei muscoli flessori del dito medio, quando sollevano sino a stanchezza un peso di 2 chilogr. ogni 2″, è superiore al lavoro meccanico

eseguito dagli stessi muscoli quando sollevano 4 chilogrammi: e che il lavoro con 4 chilogr. è superiore al lavoro meccanico prodotto sollevando 8 chilogr.

Esperienza 2ª.

Un altro esempio della modificazione di forma che prende la curva della fatica per effetto del peso ci è data dai due seguenti tracciati scritti dal dott. Ugolino Mosso sollevando coi flessori del dito medio della mano destra un peso di 3 chilogr. col ritmo di 2″, fig. 4, altezza di sollevamento 1^m,209, lavoro meccanico = 3^m,627; e dopo un riposo di tre ore cogli stessi muscoli e la medesima frequenza di contrazione un peso di 5 chilogr. fig. 5, altezza di sollevamento 0^m,300, lavoro meccanico = 1^m,500.

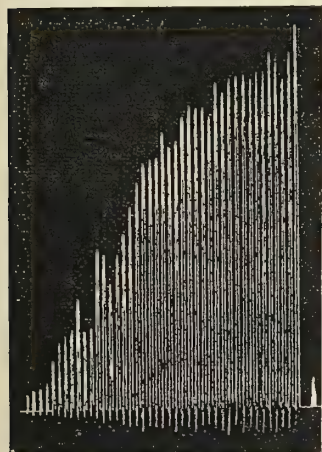



Fig. 4. — Curva della fatica nei muscoli flessori del dito medio di destra, nel dott. U. Mosso col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

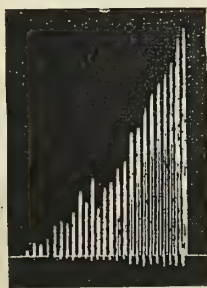



Fig. 5. — Curva della fatica degli stessi muscoli nella medesima persona col peso di 5 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

Nella figura 4 la curva rassomiglia ad un S poco accentuata, nella figura 5 ad un arco d'iperbole. La quantità di lavoro meccanico prodotta dal muscolo che solleva il peso di 3 chilogr. è molto superiore a quella data dal muscolo che si contrae con un peso di 5 chilogr.

Sarebbe così dimostrato anche sui muscoli flessori delle dita che l'effetto utile della contrazione muscolare è massimo per un determinato peso; e che diminuisce considerevolmente quando il peso aumenta del doppio e del triplo.

Può anche dirsi in tesi generale, confrontando le molte curve che ottenni in varie persone ripetendo questo esperimento, che la curva della fatica per pesi massimi rassomiglia quasi sempre ad un arco di iperbole, mentre che pei pesi non troppo grandi, questa curva varia e si avvicina più o meno ad un S allungata.

È naturale che per ottenere rapidamente una curva della stanchezza si debbono sollevare dei pesi di una certa entità, perchè quando la resistenza da vincere è troppo piccola il muscolo può contrarsi per molte ore di seguito senza stancarsi.

Nell'eseguire queste ricerche ho trovato che un uomo sano, di forza e statura ordinaria, solleva senza stancarsi presto coi muscoli flessori del dito medio un peso di 2 chilogrammi. Considereremo tale peso come la razione minima del lavoro. Sono pesi medî quelli fra i due ed i quattro chilogr.; massimi quelli superiori ai quattro chilogrammi.

Nel ripetere molte volte queste esperienze ho però osservato che, le cifre suddette si avverano sempre in tutte le osservazioni fatte sopra una stessa persona nel medesimo giorno, ma in causa della notevole variabilità di resistenza al lavoro che presentano i nostri muscoli nei diversi giorni non sempre le singole osservazioni di

un giorno sono comparabili colle singole osservazioni eseguite in un altro giorno sulla stessa persona. — Ciò dipende da un complesso di cause le quali agiscono su tutto l'organismo e ne modificano l'attitudine al lavoro muscolare, come vedremo meglio in seguito.

Il problema dell' influenza che le variazioni di peso esercitano sul decorso della fatica si presenta sotto un altro aspetto quando un muscolo deve lavorare alternativamente con differenti pesi.

Nella seguente esperienza ho scritto una serie di 10 contrazioni con un peso di chilogr. 2 e subito dopo un'altra serie di 10 contrazioni col peso di 4 chilogr. e collo stesso ritmo. Ho cioè eseguito sull'uomo l'esperimento che il Prof. Kronecker aveva fatto sui muscoli delle rane [1].

Esperienza 3ª. (30. IV. 1886).

Dott. Aducco Vittorio, anni 26, solleva col dito medio della mano destra un peso di 2 chilogr. colla frequenza di contrazione di 2″. Terminata la 10ª contrazione un assistente aumenta il peso da sollevare di altri due chilog.; A. V. eseguisce altre 10 contrazioni massime sollevando così 4 chilogr. colla frequenza di 2″. Al fine della 20ª contrazione l'assistente ritoglie il peso aggiunto ed ha luogo un'altra serie di 10 contrazioni con 2 chilog.; succede una quarta serie simile alla seconda e così di seguito sino all'esaurimento (figura 6).

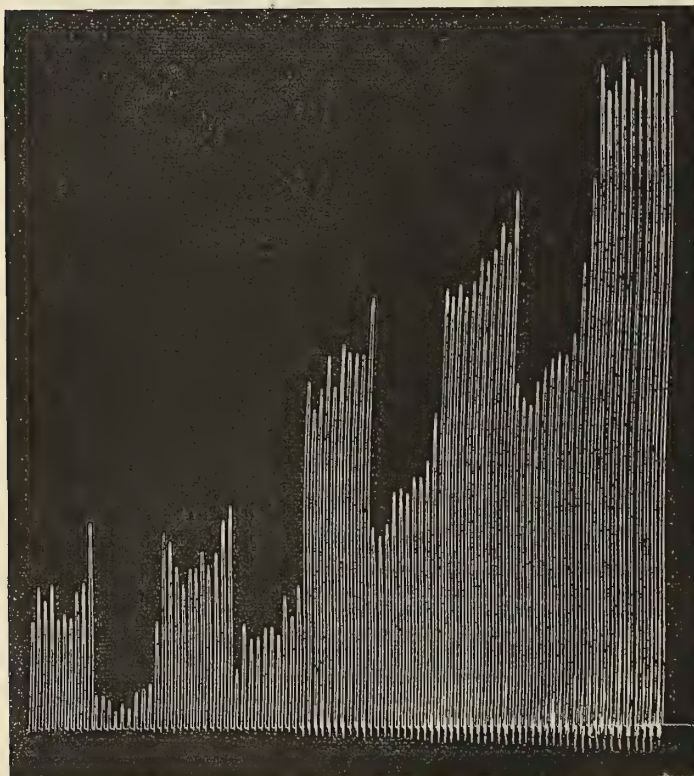



FIG. 6. — Dott. V. Aducco. Curva della fatica nei muscoli flessori del dito medio di destra che sollevano dei pesi alterni di 2 e di 4 chilogr. colla frequenza di contrazione di 2″.

La linea che passerebbe per la sommità delle contrazioni più alte e quella che passerebbe per la sommità delle contrazioni più basse rappresentano la curva della fatica per 2 chilogr. e per 4 chilogr. — Queste linee scendono quasi parallele verso l'ascissa.

Per i primi tre gruppi di contrazioni

[1] H. Kronecker, *Ueber die Ermüdung und Erholung der quergestreiften Muskeln*, Berichte d. K. Sächsichen Gesellschaft zu Leipzig 1871, pag. 737.

sembra essere una linea retta la curva della fatica e nell'ultima parte vediamo che diminuisce l'inclinazione della curva come se il decorso della fatica fosse rallentato.

Questa esperienza rassomiglia molto per il suo risultato a quella che Kronecker rappresentò alla figura 16 ([1]) nel muscolo tricipite di una rana che lavorava alternativamente con un peso di 20 e di 40 grammi.

Per avere un'idea del modo col quale si modifica la curva della fatica e la quantità di lavoro meccanico prodotto dal muscolo quando s'intercalano dei gruppi di contrazioni che richiedono uno sforzo maggiore ho fatto la seguente esperienza.

Esperienza 4ª. (30. IV. 1886).

Alfredo Montanari soldato di fanteria, anni 22, scrive la curva normale della fatica col dito medio della mano destra ed il peso di 3 chilogr. (fig. 7) altezza di sollevamento $1^m,819$; lavoro meccanico $5^m,457$.

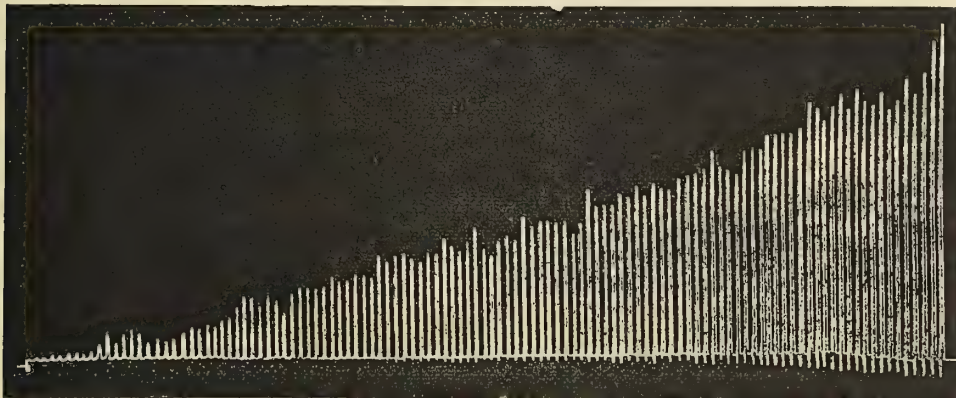



Fig. 7. — Soldato Montanari. Curva della fatica nei flessori del dito medio di destra col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

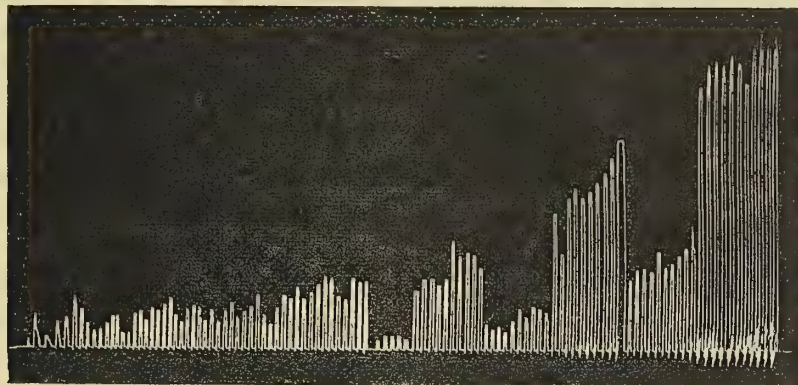



Fig. 8. — Soldato Montanari. Curva della fatica nei flessori del dito medio di destra che sollevano pesi alterni di 3 e di 6 chilogr. colla frequenza di contrazione di 2″.

([1]) Loc. cit.

Dopo due ore di riposo scrive la curva della fatica collo stesso dito e la stessa frequenza di 2″, sollevando per 10 volte un peso di 3 chilogr. e per altre 10 un peso di 6 chilogr. (figura 8).

	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
Serie di contrazioni fatte con 3 chilogr.	$0^m,990$	$2^m,970$
» » » 6 »	$0^m,192$	$1^m,152$
		$4^m,122$

Si ebbe così in questa seconda esperienza una diminuzione nella quantità di lavoro meccanico prodotto dal muscolo di m. 1,335.

Osservando l'andamento della curva noi vediamo che nel terzo gruppo di contrazioni in cui si solleva un peso di 6 chilogr. alla sesta contrazione il muscolo non è più capace di smuovere il peso di 6 chilogr. mentre che può alzare ad un'altezza considerevole il peso di 3 chilogr.

Ed. Weber nel suo classico lavoro sul movimento dei muscoli (1) aveva già osservato che i muscoli stanchi si raccorciano per grandi pesi relativamente molto meno che per pesi minori.

Noi vediamo da questa esperienza:

1.° Che il lavoro prodotto dal muscolo il quale si contrae sollevando ora un peso di 6 chilogr. ed ora un peso di 3 è assai meno grande del lavoro dato dal medesimo muscolo che si contrae sollevando un peso di 3 chilogr., e la differenza è maggiore di $\frac{1}{5}$.

2.° Che quando un muscolo non è più capace di sollevare il peso di 6 chilogr. può innalzare ancora ad altezza considerevole un peso di 3 chilogr.

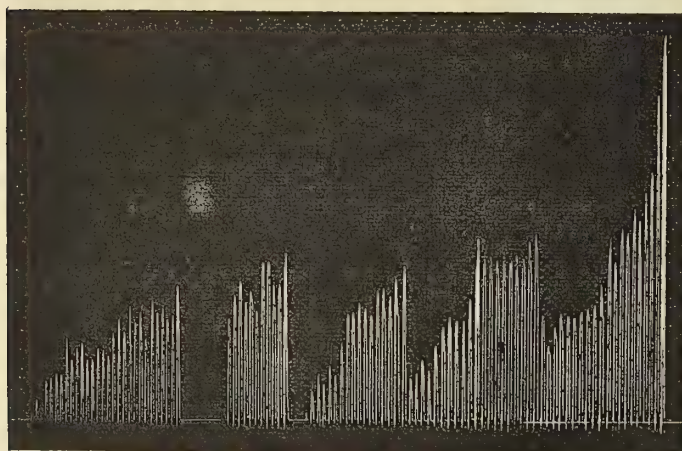



Fig. 9. — A. Maggiora. Curva della fatica nei muscoli flessori del dito medio di destra che sollevano pes alterni di 2 e di 4 chilogr.

Devo però avvertire che in molte persone riesce difficile ottenere una serie così regolare di contrazioni come nelle precedenti figure. E ciò si può vedere nel seguente tracciato fatto da me stesso sollevando coi muscoli flessori del dito medio di destra dieci volte un peso di 2 chilogr. e dieci volte uno di 4, e così di seguito in gruppi alternanti di contrazioni sino a completa stanchezza (figura 9).

(1) Loc. cit., p. 97.

II.

Variazioni della frequenza di contrazione.

Nelle precedenti esperienze abbiamo cercato di conoscere come variava la curva della stanchezza quando si aumentano i pesi che solleva un muscolo; ora studieremo come varii la curva della fatica quando si modifica la frequenza delle contrazioni.

Esperienza 5ª.

Il giorno 12 luglio 1886 cominciando alle ore 8 antim. scrivo ogni due ore la curva della fatica nei muscoli flessori delle dita medie delle due mani sollevando il peso di 3 chilogr. da prima col ritmo di 1″ poi di 2″ indi di 4″ e per ultimo di 10″.

Ottengo così otto tracciati per le due mani dei quali per brevità espongo solamente quattro figure: 10, 11, 12, 13.

Fig. 10. — Tracciato 2 dell'esperienza 5ª. Curva della fatica del dito medio di sinistra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 1″

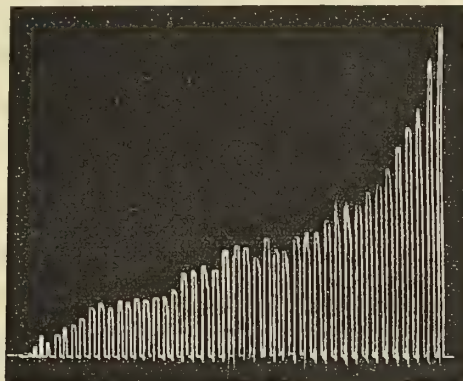



Fig. 11. — Tracciato 3 dell'esperienza 5ª. Curva della fatica del dito medio di sinistra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″.

Fig. 12. — Tracciato 6 dell'esperienza 5ª. Curva della fatica del dito medio di sinistra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 4″.

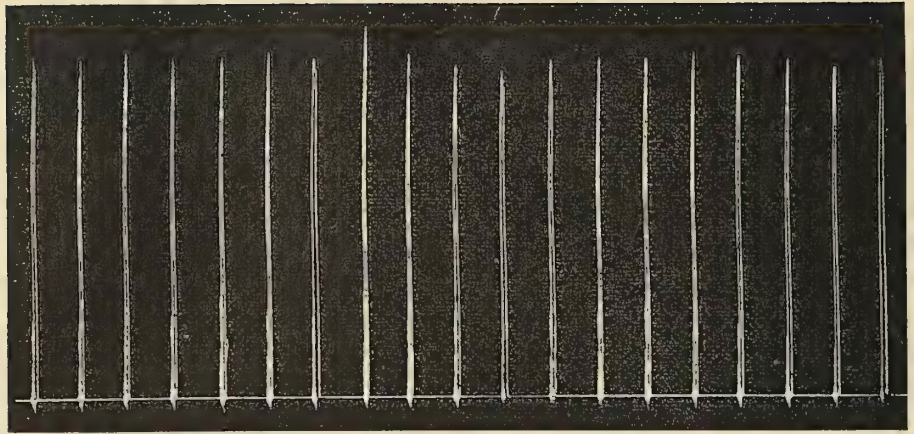



Fig. 13. — Rappresenta una parte del tracciato 7 dell'esperienza 5ª e mostra l'andamento delle contrazioni dei muscoli flessori del dito medio di sinistra quando sollevano un peso di 3 chilogr. col ritmo di 10″.

Nella seguente tabella riassumo i dati numerici dell'esperienza.

Avverto solo per spiegare il segno infinito (∞) messo nella tabella, che intendo con questo dire che il muscolo non si stancava, infatti ho potuto eseguire in 60′ trecentosessanta contrazioni senza notare una differenza nella loro altezza al principio ed alla fine.

Tabella 2ª. — *Peso 3 chilogr.*

Tracciato	Ore	Frequenza di contrazione	Mano sinistra		Mano destra	
			altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1	8 ant.	1″	—	—	m 0,523	m 1,569
2 fig. 10	»	»	m 0,414	m 1,242	—	—
3 fig. 11	10 ant.	2″	0,601	1,803	—	—
4	»	»	—	—	0,627	1,881
5	12 ant.	4″	—	—	1,280	3,840
6 fig. 12	»	»	1,346	4,038	—	—
7 fig. 13	2 pom.	10″	∞	∞	—	—
8	»	»	—	—	∞	∞

Perchè il confronto delle curve fosse più efficace avrei dovuto rifare questi tracciati e disegnarli tutti colla medesima frequenza, mettendo le linee delle contrazioni egualmente distanti l'una dall'altra: ma ho preferito riprodurre integralmente i tracciati. Dall'esame delle figure 10, 11, 12, 13 e dal confronto dei numeri che indicano il valore meccanico della tabella 2ª risulta:

1.° Che le contrazioni dei flessori delle dita sono massime, e stanno quasi tutte alla medesima altezza, quando la frequenza è di 10″ (figura 13); ciò vuol dire che l'intervallo di riposo di 10″ fra una contrazione e l'altra è sufficiente per ristorare gli organi che entrano in funzione.

2.° Calcolando il lavoro meccanico eseguito dal muscolo che si contrae per un'ora colla frequenza di 10″, troviamo che corrisponde a $48^m,60$. È questo un lavoro di gran lunga superiore a quello fatto dal muscolo che solleva il medesimo peso colla frequenza di 4″. In questo caso ammesso che il muscolo abbia bisogno di due ore di riposo, la produzione del lavoro meccanico sarebbe solamente di $2^m,355$ all'ora [1], mentre che colla frequenza di 10″ il muscolo eseguisce un lavoro di $48^m,60$ cioè circa ventisei volte maggiore senza stancarsi.

È difficile un raffronto esatto in queste esperienze per stabilire la frequenza di contrazione che dà il massimo lavoro. Dopo l'esperienza 13ª si dovrebbe ripetere subito la esperienza 12ª per vedere se realmente il muscolo che lavora colla frequenza di 10″ non si stanca, e se il riposo di 2 ore dopo la figura 10, 11 e 12 non è troppo lungo. La differenza però tra il lavoro meccanico che dà il muscolo che solleva 3 chilog. ogni $10'' = 48^m,6$ all'ora è così grande in raffronto del muscolo che solleva 3 chilog. ogni $4'' = 2^m,355$ all'ora che si può conchiudere che la frequenza di contrazione di 1″ di 2″ e 4″ danno un lavoro utile minore della frequenza di 10″ e questo vedremo meglio nel capitolo V dove faremo variare la frequenza delle contrazioni e dei periodi di riposo.

Fin qui ci siamo serviti di un peso non molto grande vediamo ora se questi fatti si avverano quando il muscolo solleva dei pesi massimi.

Esperienza 6ª. (13. VI. 1886).

Ripeto su di me la precedente esperienza nelle medesime condizioni per rispetto alla frequenza delle contrazioni ma servendomi di un peso di 6 chilogrammi.

Ottengo anche qui 8 tracciati dei quali per brevità espongo solamente quattro relativi alla mano destra; figure 14, 15, 16, 17, e riassumo nella seguente tabella i dati numerici dell'esperienza.

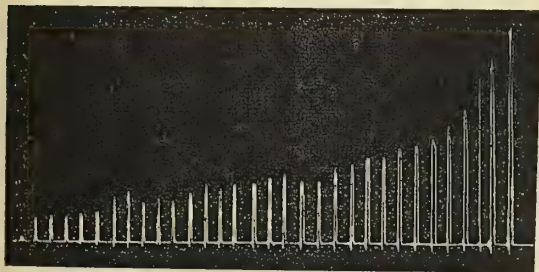



Fig. 16.

Fig. 15.

Fig. 14.

La fig. 14 rappresenta il tracciato 2 dell'esperienza 6ª, ossia la curva della fatica nei muscoli flessori del dito medio di destra che sollevano un peso di 6 chilogr. col ritmo di 1″.

La fig. 15, corrispondente al tracciato 4 dell'esperienza, rappresenta la curva della fatica dei detti muscoli quando sollevano il peso di 6 chilogr. con ritmo di 2″.

La fig. 16, corrispondente al tracciato 6 dell'esperienza, rappresenta la curva della fatica degli stessi muscoli quando sollevano il peso di 6 chilogr. con ritmo di 4″.

[1] Dalla tabella precedente si vede che i muscoli flessori del dito medio di sinistra sollevando un peso di 3 chilogr. colla frequenza di contrazione di 4″ diedero un lavoro meccanico di $4^m,038$. Supposto che il muscolo lavori dalle 8 ant. alle 8 pom. cioè 12 ore, intercalando periodi di riposo di 2 ore, avrebbe fatto 7 volte il lavoro meccanico di $4^m,038$, e cioè in tutto $28^m,266$. Dividendo questo numero per quello delle ore di lavoro si avrebbe appunto $2^m,3555$ di lavoro meccanico per ogni ora.

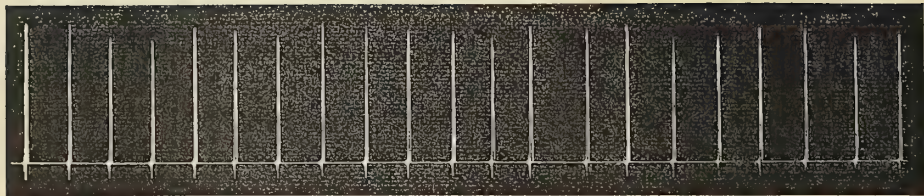



Fig. 17. — Rappresenta un breve tratto del tracciato 8 e mostra come si comportano le contrazioni quando i detti muscoli sollevano il peso di 6 chilogr. col ritmo di 10″

Tabella 3ª. — *Peso 6 chilogr.*

Tracciato	Ore	Frequenza di contrazione	Mano sinistra		Mano destra	
			altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1	8 ant.	1″	m 0,142	m 0,852	—	—
2 fig. 14	»	»	—	—	m 0,152	m 0,912
3	10 ant.	2″	0,176	1,056	—	—
4 fig. 15	»	»	—	—	0,181	1,086
5	12 mer.	4″	0,284	1,704	—	—
6 fig. 16	»	»	—	—	0,307	1,842
7	2 pom.	10″	∞	∞	—	—
8 fig. 17	»	»	—	—	∞	∞

Da questa esperienza si vede che anche per un peso di 6 chilogrammi basta il riposo di 10″ che intercede fra una contrazione e l'altra per riabilitare completamente il muscolo, e per ciò conchiuderemo che quando la frequenza delle contrazioni è minore, tanto più aumenta la quantità di lavoro e ritarda a manifestarsi la fatica.

Si ripete così pei muscoli della mano quanto osservasi pel muscolo cardiaco, colla differenza che pei muscoli della mano il ritmo deve essere di 10″ perchè essi si riposino completamente e lavorino per un tempo indefinito.

III.

Variazioni contemporanee nel peso e nella frequenza della contrazione.

Quando un muscolo colla stessa frequenza di contrazione solleva pesi successivamente maggiori, lavora in condizioni sfavorevoli, perchè quando il ritmo col quale si susseguono le contrazioni è tanto rapido che dopo ogni contrazione il muscolo non ha tempo di riacquistare completamente la sua energia, esso si stancherà più rapidamente sollevando un peso maggiore che non sollevando uno minore. Cerchiamo ora di

conoscere quale sarà il decorso della fatica quando al muscolo che lavora con un peso doppio, concediamo un intervallo doppio di riposo fra ogni singola contrazione.

Esperienza 7ª. (11. V. 1886).

A. Maggiora, alle 8 antim. scrive la curva della fatica dei muscoli flessori del medio di sinistra col peso di 3 chilogr. e colla frequenza di contrazione di 2″ e subito dopo con quelli di destra nelle stesse condizioni di ritmo e di peso. — Dopo due ore scrive nuovamente la curva della fatica col peso di 6 chilogr. e la frequenza di contrazione di 4″. — Dopo altre due ore scrive ancora il corso della stanchezza nei muscoli flessori del medio delle due mani con 6 chilogr. e 4″ di frequenza, e finalmente dopo due ore di riposo con 3 chilogr. ed il ritmo di 2″.

Si ottengono così otto tracciati dei quali riproduco solamente quattro figure 18, 19, 20, 21 e riassumo nella seguente tabella i dati numerici dell'esperienza.

Tabella 4ª.

Tracciato	Ore	Peso	Frequenza di contrazione	Mano sinistra		Mano destra	
				altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1 fig. 18	8 ant.	3	2″	m 0,768	m 2,304	—	—
2	»	»	»	—	—	m 1,064	m 3,192
3 fig. 19	10 ant.	6	4″	0,251	1,506	—	—
4	»	»	»	—	—	0,294	1,764
5	12 mer.	»	»	0,229	1,374	—	—
6 fig. 20	»	»	»	—	—	0,278	1,668
7	2 pom.	3	2″	0,820	2,460	—	—
8 fig. 21	»	»	»	—	—	1,040	3,120

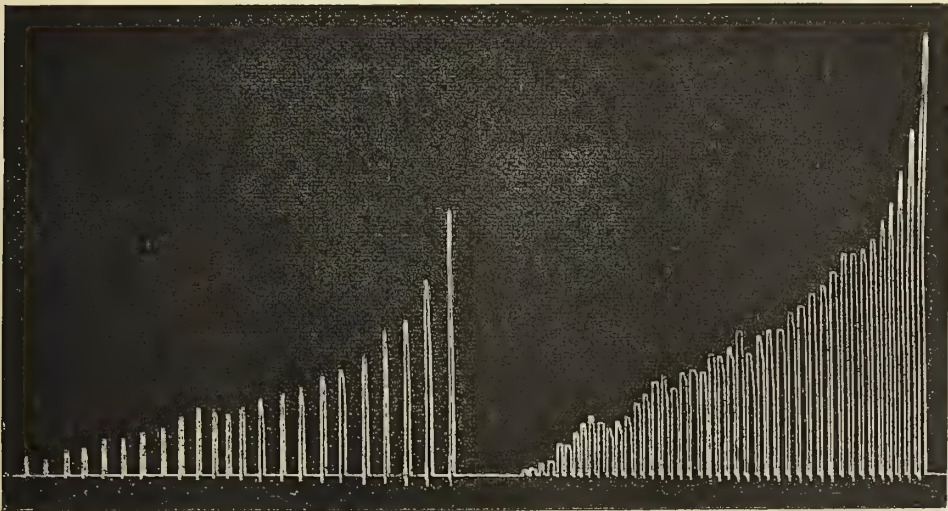



Fig. 19. — Tracciato 3 dell'esperienza 7ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra, che sollevano un peso di 6 chilogr. (2P) col ritmo di 4″ (2R).

Fig. 18. — Tracciato 1 dell'esperienza 7ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra, che sollevano un peso di 3 chilogr. (P), col ritmo di 2″ (R).

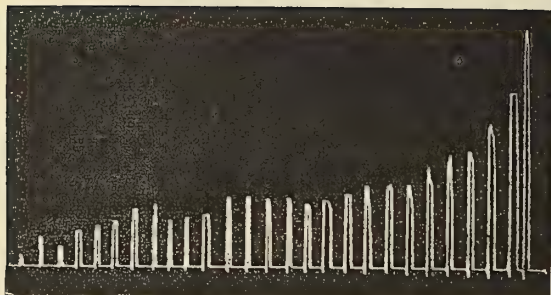



Fig. 20. — Tracciato 6 dell'esperienza 7ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di destra, che sollevano un peso di 6 chilogr. (2P), col ritmo di 4″ (2R).

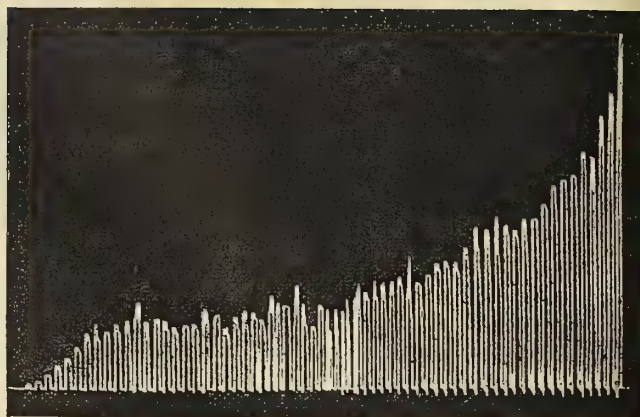



Fig. 21. — Tracciato 8 dell'esperienza 7ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di destra che sollevano un peso di 3 chilogr. (P), col ritmo di 2″ (R).

Si vede che quando crescono i pesi che solleva il muscolo non basta di far crescere nella stessa proporzione gli intervalli di riposo fra ogni singola contrazione ma che la pausa di riposo fra una contrazione e l'altra deve crescere in una misura molto maggiore.

In altre parole il muscolo che ha lavorato con un ritmo $R = 2''$ e con un peso $P = 3$ chilogr. si stancherà molto più rapidamente se lo si fa lavorare con un ritmo $= 2R$ ed un peso $= 2P$.

Si tratta ora di conoscere quale sia il riposo che dobbiamo concedere al muscolo fra una contrazione e l'altra quando aumenta del doppio il peso, per ottenere la stessa quantità di lavoro.

Esperienza 8ª. (11. V. 1886).

La stessa persona tre ore dopo la precedente esperienza scrive la curva della fatica nei muscoli flessori del dito medio di destra e di sinistra sollevando un peso di 6 chilogr. con la frequenza di contrazione di 6″. Si hanno così due tracciati dei quali riporto uno solo, quello della mano destra fig. 22. La quantità di lavoro meccanico prodotto dai muscoli delle due mani è la seguente:

	Altezza di sollevamento	Lavoro meccanico
Fasci muscolari flessori del dito medio di sinistra . . .	$0^m,494$	$2^m,964$
» » » » » di destra (fig. 22)	$0^m,651$	$3^m,906$

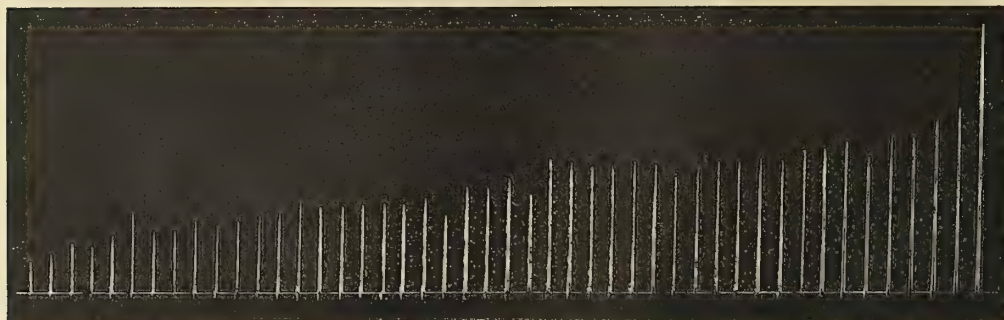



Fig. 22. — Tracciato 2 dell'esperienza 8ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio, mano destra, col peso di 6 chilogr. (2P) e col ritmo di 6″ (3R).

Paragonando questi dati con quelli dell'esperienza precedente noi vediamo che essendo R = 2″ e P = 3 chilogr. se raddoppiamo il peso si richiede un tempo triplo per ottenere la stessa quantità di lavoro meccanico.

Esperienza 9ª. (12. V. 1886).

La stessa persona fa un'esperienza simile alla precedente nella quale il peso è di 6 chilogr., la frequenza di contrazione di 8″; scrive cioè la curva della fatica con 2P e 4R.

Ometto questi tracciati.

La quantità di lavoro prodotta dal muscolo con 2P e 4R è già superiore al doppio di quella data dal muscolo quando si contrae con P ed R.

Queste osservazioni valgono pel caso speciale in cui R = 2″ e P = 3 chilogr.; vediamo se questi fatti si ripetono nel caso in cui R = 1″ e P = 2 chilogr.

Esperienza 10ª. (14. V. 1886).

Il giorno 14 maggio 1886 la stessa persona scrive alle ore 8 ant. la curva della fatica dei flessori del dito medio delle due mani col peso di 2 chilogr. e la frequenza di contrazione di 1″; dopo due ore di riposo scrive il corso della stanchezza degli stessi muscoli col peso di 4 chilogr. ed il ritmo di 2″, dopo altre due ore col peso di 4 chilogr. ed il ritmo di 3″ e finalmente dopo altre due ore collo stesso peso ed il ritmo di 4″.

Si ottengono otto tracciati dei quali riporto tre soli relativi alla mano sinistra figure 23, 24, 25. — Nella tabella 5ª riporto le cifre del lavoro eseguito ciascuna volta.

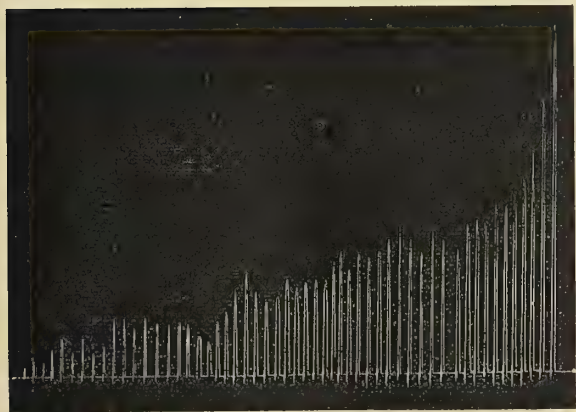



Fig. 25. — Tracciato 5 dell'esperienza 10ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra che solleva un peso 2P = 4 chilog. col ritmo 3R = 3″.

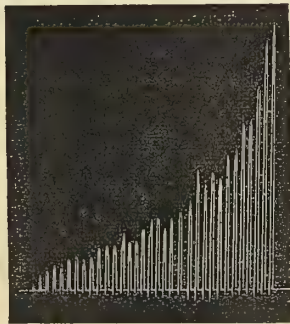



Fig. 24. — Tracciato 3 dell'esperienza 10ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra, che sollevano un peso 2P = 4 chilogr. col ritmo 2R = 2″.

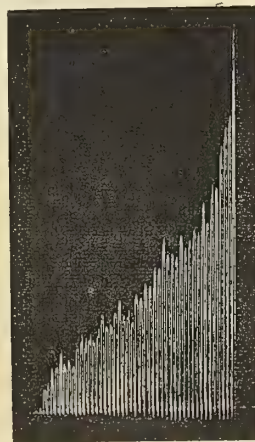



Fig. 23. — Tracciato 1 dell'esperienza 10ª. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra, che sollevano un peso P = 2 chilogr. col ritmo R = 1″.

TABELLA 5ª.

Tracciato	Ore	Peso	Ritmo	MANO SINISTRA		MANO DESTRA	
				altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1 fig. 23	8 ant.	2	1″	m 0,776	m 1,552	m—	m—
2	»	»	»	—	—	0,890	1,780
3 fig. 24	10 ant.	4	2″	0,363	1,452	—	—
4	»	»	»	—	—	0,350	1,400
5 fig. 25	12 mer.	»	3″	0,715	2,860	—	—
6	»	»	»	—	—	0,680	2,730
7	2 pom.	»	4″	1,109	4,436	—	—
8	»	»	4″	—	—	1,030	4,120

Si vede che anche nel caso in cui P = 2 chilogr. ed R = 1″, la quantità di lavoro meccanico data dal muscolo che solleva un peso 2P = 4 chilogr. con il ritmo 2R = 2″, è inferiore al lavoro prodotto dal muscolo che si contrae con P ed R; ma se prolunghiamo le pause di riposo portando il ritmo a 3R = 3″ il muscolo può dare un effetto utile uguale o superiore a quello dato con P ed R, e finalmente se portiamo il ritmo a 4R = 4″ il muscolo è capace di eseguire col peso 2P = 4 chilogr. un lavoro superiore al doppio di quello fatto con P ed R.

Quando si raddoppia il peso P sollevato da un muscolo il quale si contrae con un ritmo R sufficientemente rapido perchè esso non riesca dopo ogni contrazione a ricuperare la sua energia, non basta prolungare del doppio il ritmo, portarlo cioè a 2R, per ottenere dal muscolo la stessa quantità di lavoro meccanico, ma bisogna triplicarlo ossia portarlo a 3R.

Quando poi le pause che intercedono fra le singole contrazioni vengono quadruplicate cioè il ritmo sia 4R la quantità di lavoro prodotta dal muscolo con un peso doppio è molto maggiore di quella che il muscolo è capace di eseguire col peso P ed il ritmo R.

IV.

Periodo di riposo necessario per ottenere in tutto il giorno dal muscolo una curva normale della fatica.

Le ricerche descritte al capitolo II ci hanno dimostrato che per i muscoli flessori del dito medio che sollevano tre chilogrammi occorre una pausa 10 volte più lunga di quella di cui abbisogna il muscolo cardiaco per conservarsi indefinitamente atto al lavoro senza stancarsi. Dobbiamo ora prendere in esame il caso più frequente nei muscoli della vita di relazione che è quello di svolgere in determinate ore della giornata la maggiore energia intercalandovi dei periodi di riposo più o meno lunghi.

Fin dal principio di queste esperienze si era imposto alla mia attenzione il fatto che dopo il riposo della notte i muscoli riacquistano molto rapidamente l'energia primitiva dopo essersi stancati, ma che se continuano a lavorare con periodi di riposo insufficienti dànno nelle ore successive della giornata un lavoro meccanico gradatamente minore.

Esperienza 11ª. (25. VIII. 1886).

A. Maggiora, cominciando alle ore 8 ant. scrive ogni ora sino alle 6 pom. la curva della fatica nei muscoli flessori del medio delle due mani col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

Si ottengono così 22 tracciati dei quali non espongo che tre della mano sinistra, l'uno scritto alle ore 8 antim. fig. 26, l'altro alle 2 pom. fig. 27, l'altro alle ore sei fig. 28.

Alcuni tracciati della fatica scritti dai muscoli flessori del dito medio di sinistra che sollevano un peso di 3 chilogr. col ritmo di 2'' e con periodi di riposo di un'ora.

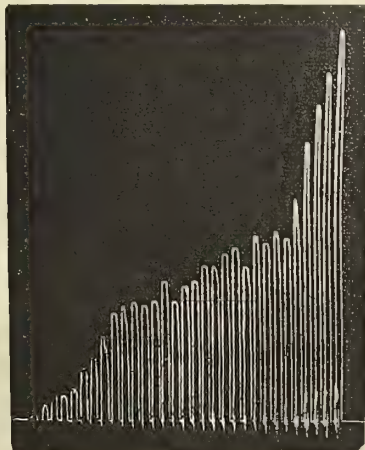
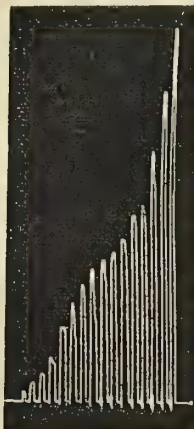
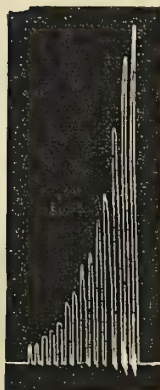



Fig. 28. — Tracciato 21 dell'esperienza 11ª, scritto alle ore 6 pom.

Fig. 27. — Tracciato 13 dell'esperienza 11ª, scritto alle ore 2 pom. Modificazioni presentate dalla curva.

Fig. 26. — Tracciato 1 dell'esperienza 11ª scritto alle ore 8 ant. Curva normale.

Espongo nella seguente tabella i valori in cifre dell'altezza delle contrazioni e del lavoro fatto ciascuna volta.

Tabella 6ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza delle contrazioni 2''. Periodo di riposo 1 ora.*

Tracciato	Ore	Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1 fig. 26	8 ant.	m 0,583	m 1,749	m—	m—
2	»	—	—	0,590	1,770
3	9 ant.	0,570	1,710	—	—
4	»	—	—	0,831	2,493
5	10 ant.	0,657	1,971	—	—
6	»	—	—	0,727	2,181
7	11 ant.	0,514	1,542	—	—
8	»	—	—	0,490	1,380
9	12 mer.	0,381	1,143	—	—
10	»	—	—	0,500	1,500
11	1 pom.	0,400	1,200	—	—
12	»	—	—	0,286	0,858
13 fig. 27	2 pom.	0,300	0,900	—	—
14	»	—	—	0,309	0,927
15	3 pom.	0,254	0,762	—	—
16	»	—	—	0,237	0,711
17	4 pom.	0,228	0,684	—	—
18	»	—	—	0,250	0,750
19	5 pom.	0,227	0,671	—	—
20	»	—	—	0,231	0,693
21 fig. 28	6 pom.	0,220	0,660	—	—
22	»	—	—	0,217	0,651

Vediamo da questa esperienza che il periodo di riposo di un'ora è nelle prime sei osservazioni e nei primi sei tracciati più che sufficiente per dare tempo al muscolo di ristorarsi completamente e dopo per contro non lo è più e per effetto della fatica

che non scompare completamente dal muscolo si ottiene un lavoro meccanico successivamente minore.

Riconosciuto insufficiente il riposo di un'ora un altro giorno ripetei l'esperienza sulla stessa persona lasciando fra un tracciato e l'altro un'ora e mezza di riposo.

Esperienza 12ª. (26. VIII. 1886).

A. M. cominciando alle ore 8 ant. scrive sino alle ore 6 ½ pom. la curva della fatica dei flessori del medio col peso di 3 chilogr., frequenza di contrazione 2″.

Si ottengono così 16 tracciati dei quali espongo solamente il 1 fig. 29, il 9 fig. 30, il 15 fig. 31, della mano sinistra.

Nella seguente tabella riassumo i dati numerici dell'esperienza.

Alcuni tracciati della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra che sollevano un peso di 3 chilogr. col ritmo di 2″ e con periodi di riposo di un'ora e mezza.

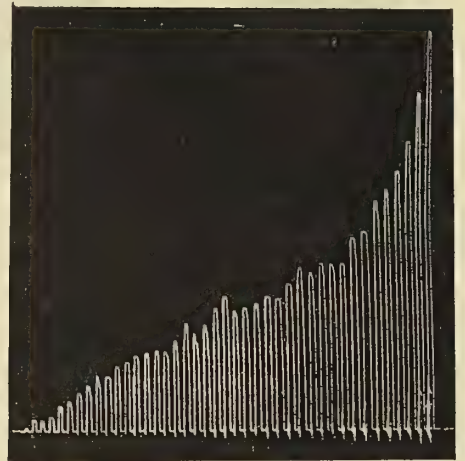
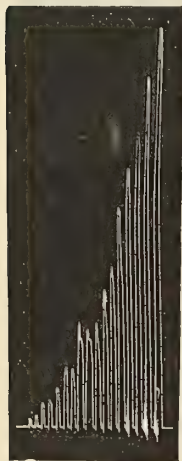



Fig. 31. — Tracciato 15 dell'esper. 11ª, scritto alle ore 6,30 p.

Fig. 30. — Tracciato 9 dell'esper. 12ª, scritto alle ore 2 pom.

Fig. 29. — Tracciato 1 dell'esperienza 12ª, scritto alle ore 8 ant. Curva normale della fatica.

Modificazioni presentate dalla curva della fatica.

Tabella 7ª. — *Peso 6 chil. Frequenza di contraz. 2″. Periodi di riposo di ore 1,30.*

Tracciato	Ore	Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1 fig. 29	8 ant.	m 0,671	m 2,013	m—	m—
2	»	—	—	0,734	2,202
3	9.30 ant.	0,638	1,914	—	—
4	»	—	—	0,760	2,280
5	11 ant.	0,709	2,127	—	
6	»	—	—	0,805	2,415
7	12.30 mer.	0,624	1,872	—	—
8	»	—	—	0,759	2,277
9 fig. 30	2 pom.	0,461	1,383	—	—
10	»	—	—	0,417	1,251
11	3.30 pom.	0,390	1,170	—	—
12	»	—	—	0,373	1,119
13	5 pom.	0,280	0,840	—	—
14	»	—	—	0,405	1,215
15 fig. 31	6.30 pom.	0,310	0,930	—	—
16	»	—	—	0,250	0,750

Risulta dunque che il periodo di riposo di un'ora e mezza il quale è sufficiente nelle prime otto osservazioni per ristorare il muscolo, non lo è più in seguito e la quantità del lavoro meccanico da questo prodotta va man mano diminuendo.

Ho fatto una esperienza prolungando il periodo di riposo a due ore.

Esperienza 12ª. (27. VIII. 1886).

Venne eseguita nelle stesse condizioni di peso e frequenza di contrazione che la precedente; solo il periodo di riposo fu prolungato a due ore.

Si ottennero 12 tracciati che lascio di presentare perchè affatto simili al primo delle due precedenti esperienze figure 26 e 29, e riporto qui le cifre che rappresentano il lavoro fatto dai muscooli.

TABELLA 8ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza di contrazione 2″, periodi di riposo di 2 ore.*

Tracciato	Ore	Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1	8 ant.	m 0,926	m 2,778	—	—
2	»	—	—	m 0,724	m 2,172
3	10 ant.	0,803	2,409	—	—
4	»	—	—	0,830	2,490
5	12 mer.	0,854	2,562	—	—
6	»	—	—	0,782	2,346
7	2 pom.	0,623	1,869	—	—
8	»	—	—	0,645	1,835
9	4 pom.	0,791	2,373	—	—
10	»	—	—	0,858	2,574
11	6 pom.	0,917	2,751	—	—
12	»	—	—	0,749	2,247
			14,742		13,674

Dunque il riposo di 2 ore è sufficiente per impedire l'accumularsi della fatica e per ottenere dal muscolo tanto nel mattino quanto nella sera la quantità normale di lavoro meccanico che esso in condizioni di completo riposo è capace di produrre.

Feci altre osservazioni su parecchie persone e trovai che non per tutti è necessario lo stesso periodo di riposo di due ore perchè i loro muscoli si mantengano in condizioni tali da dare a tutte le ore del giorno una curva normale della fatica. Così ad es. mentre per il dott. Aducco e per me abbisognano due ore, per tre soldati che mi servirono per queste ed altre esperienze un periodo di riposo di un'ora e mezza era sufficiente. È probabile che queste differenze siano in rapporto col genere di vita, l'abitudine dell'esercizio muscolare più o meno attivo ecc., ma su questo fatto mi riservo di ritornare in un prossimo lavoro.

Nella seguente tabella riporto i dati di un esperienza fatta sui soldati Mantovani e Capurro di anni 22, la quale dimostra che pei loro muscoli era sufficiente il riposo di un'ora e mezza.

Esperienza 13ª. (13. VIII. 1886).

TABELLA 9ª. — *Peso 3 chil. Frequenza delle contraz. 2″. Periodi di riposo di ore 1,30.*

Tracciato	Ore	Soldato Mantovani				Soldato Capurro			
		Mano sinistra		Mano destra		Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1	9.30 ant.	m 1,144	m 3,432	—	—	—	—	—	—
2	»	—	—	m 1,080	m 3,240	—	—	—	—
3	»	—	—	—	—	m 1,062	m 3,186	—	—
4	»	—	—	—	—	—	—	m 1,107	m 3,321
5	11 ant.	0,941	2,823	—	—	—	—	—	—
6	»	—	—	1,102	3,306	—	—	—	—
7	»	—	—	—	—	0,900	2,700	—	—
8	»	—	—	—	—	—	—	0,999	2,997
9	12.30 mer.	1,110	3,330	—	—	—	—	—	—
10	»	—	—	0,870	2,610	—	—	—	—
11	»	—	—	—	—	0,856	2,568	—	—
12	»	—	—	—	—	—	—	1,043	3,129
13	2 pom.	0,933	2,799	—	—	—	—	—	—
14	»	—	—	0,885	2,655	—	—	—	—
15	»	—	—	—	—	0,885	2,655	—	—
16	»	—	—	—	—	—	—	0,856	2,658
17	3.30 pom.	1,144	3,432	—	—	—	—	—	—
18	»	—	—	1,031	3,093	—	—	—	—
19	»	—	—	—	—	1,199	3,597	—	—
20	»	—	—	—	—	—	—	0,956	2,874
21	5 pom.	0,809	2,427	—	—	—	—	—	—
22	»	—	—	0,968	2,904	—	—	—	—
23	»	—	—	—	—	0,890	2,670	—	—
24	»	—	—	—	—	—	—	1,174	3,522
25	6.30 pom.	1,171	3,513	—	—	—	—	—	—
26	»	—	—	0,946	2,844	—	—	—	—
27	»	—	—	—	—	1,165	3,495	—	—
28	»	—	—	—	—	—	—	1,230	3,690

Non riporto alcuna figura di questi tracciati perchè tutti normali ed avremo occasione di riprodurne al capitolo VIII di quelli affatto simili.

Ricerche fatte successivamente con pesi diversi su queste ed altre persone dimostrarono che il periodo di riposo sufficiente per ridare al muscolo la sua energia normale si mantiene costante per la stessa persona sia che il muscolo debba sollevare sino a completa stanchezza un peso per esempio di 2 chilogr. oppure un peso di 4 chilogr. — E ciò non ci deve sorprendere perchè allorquando il muscolo solleva un peso maggiore cessa prima di lavorare e così può riposare più a lungo.

Per ottenere in tutto il giorno dal muscolo una serie di curve normali della fatica e la stessa quantità di lavoro meccanico bisogna fin dal principio concedergli un periodo di riposo sufficiente, perchè possa ogni volta ricuperare la sua energia e la stanchezza non venga a sommarsi. Questo tempo di riposo varia per le diverse persone fra un'ora e mezza e due, ma è costante per una stessa persona qualunque sia il peso col quale il muscolo lavora.

V.

Variazioni nella frequenza delle contrazioni e nei periodi di riposo.

Fin qui ritenendo costante la frequenza delle contrazioni abbiamo fatto variare i periodi di riposo fra un gruppo di contrazioni e l'altro per vedere quanto questi periodi di riposo dovevano durare per ottenere il maggior lavoro possibile; si tratta ora di far variare contemporaneamente la frequenza delle contrazioni ed i periodi di riposo per trovare quale sia la condizione più favorevole del lavoro, quando questo non può compiersi in modo continuato.

Esperienza 14ª. (29. V. 1886).

Mantovani e Capurro, soldati di fanteria di anni 22 alle ore 8 ant. scrivono la curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di destra facendo dei gruppi di 30 contrazioni con la frequenza di 2″. A ciascun gruppo si fa seguire una pausa di 1′. Il peso è di 2 chilogr. — Si ottengono così due tracciati nei quali si contano rispettivamente:

	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
Soldato N. Mantovani gruppi di 30 contrazioni n. 8 pari a	5ᵐ,390	10ᵐ,780
Di questi gruppi dò un esempio riproducendone due alla fig. 32.		
Soldato Capurro gruppi di 30 contrazioni n. 10	5ᵐ,490	10ᵐ,980

Fig. 32. — Rappresenta una parte del tracciato 1 dell'esperienza 14ª, ossia due gruppi di 30 contrazioni fatte dai muscoli flessori del dito medio di destra sollevando un peso di 3 chilogr. col ritmo di 2″ e con pause di 1′.

Riportati in condizioni normali i muscoli con un riposo di due ore i soldati scrivono nuovamente la curva della fatica dei flessori di destra facendo delle serie di 15 contrazioni colla frequenza di 1″ e intercalando ad ognuna serie un riposo di 45″. Il peso è ancora di 2 chilogr.

		altezza di sollevamento	lavoro meccanico
Soldato Mantovani gruppi di 15 contrazioni	n. 15	4^m,886	9^m,772
Soldato Capurro » » »	n. 15	2^m,497	4^m,994

Nella fig. 33 riporto quattro di questi gruppi relativi al tracciato del soldato Mantovani.

Fig. 33. — Rappresenta una parte del tracciato 3 dell'esperienza 14ª ossia 4 gruppi di 15 contrazioni fatte dai muscoli flessori del dito medio di destra, sollevando un peso di 3 chilogr. col ritmo di 1″ e con pause di 45″.

Dopo altre due ore di riposo finalmente i due soldati scrivono la curva della fatica dei muscoli flessori del medio contraendoli di seguito ogni quattro secondi senza altre pause di riposo. Si ebbero così altri due tracciati simili a quello rappresentato alla fig. 84 che riproduce un tratto della curva del Mantovani.

	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
Soldato Mantovani	3^m,660	7^m,320
Soldato Capurro	1^m,882	3^m,764

Fig. 34. — Rappresenta una parte del tracciato 5 dell'esperienza 14ª, ossia un tratto della curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di destra, che sollevano un peso di 3 chilogr. col ritmo di 4″ e senza pause di riposo.

In questa esperienza dove i muscoli flessori del médio sollevavano con sforzi massimi sino a stanchezza lo stesso peso di 2 chilogr. con o senza periodi di riposo e con frequenza di contrazione varia ma in modo di dare nello spazio di due minuti primi un egual numero di contrazioni noi vediamo che la quantità del lavoro meccanico prodotta era maggiore quando le contrazioni si facevano in gruppi di 30 ad ogni 2″ e con pause di 1′, era minore per una frequenza di contrazione di 1″ e pause di 45″, era minima quando le contrazioni si susseguivano ogni 4″, senza pause di riposo.

Nel ripetere il giorno successivo questa esperienza sopra le stesse persone e nelle medesime condizioni ottenni un risultato simile al precedente nel soldato Mantovani nelle due mani e nel soldato Capurro solo nella mano sinistra: pei muscoli flessori del dito medio di destra nel soldato Capurro si ebbe:

	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
Gruppi di 30 contrazioni con ritmo di 2″ e periodi di riposo di 1′	4^{m},140	8^{m},280
Gruppi di 15 contrazioni con ritmo di 1″ e periodi di riposo di 45″	5^{m},225	10^{m},450
Serie continua di contrazioni con 4″ . . .	1^{m},774	3^{m},488

Abbiamo dunque pure in questa esperienza una quantità minima di lavoro meccanico pel muscolo che si contrae sempre di seguito colla frequenza di 4″; ma non più una quantità massima pel muscolo che lavora con gruppi di 30 contrazioni in 1′, intercalando pause di riposo di 1′; pei gruppi di 15 contrazioni in 15″ e pause di 45″ abbiamo la quantità massima.

Dinnanzi al differente risultato di questa seconda parte dell'esperienza per stabilire se il massimo lavoro si ottiene dal muscolo colle serie di contrazioni a ritmo di 2″ oppure con quelle a ritmo di 1″, ripetei parecchie volte l'esperienza nelle medesime condizioni sulle stesse persone ed in altre persone, per conchiudere poi facendo una media delle esperienze.

Nella tabella 10ª espongo i risultati e i dati numerici di sei esperienze simili alla 15ª eseguite sopra i soldati Mantovani e Capurro nei giorni 29, 30 maggio e 1, 2, 3, 4 giugno 1886, e di due esperienze eseguite su di me nelle medesime condizioni di peso, frequenza di contrazione, periodi di riposo, nei giorni 5 e 6 giugno 1886; per ultimo nella tabella 11ª riassumo i valori medî di queste osservazioni su ciascuna persona.

TABELLA 10ª. — *Peso 2 chilogr.*

Esperienza N.°		Frequenza di contrazione	Periodi di riposo	Altezza di sollevamento		Lavoro meccanico	
				mano sinistra	mano destra	mano sinistra	mano destra
14ª	Soldato N. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	—	5,390	—	10,780
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	—	4,886	—	9,772
	Id.	4″	0	—	3,660	—	7,320
	Soldato C.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	—	5,490	—	10,980
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	—	2,497	—	4,994
	Id.	4″	0	—	1,882	—	3,764
15ª	Soldato N. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	4,630	4,730	9,260	9,460
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	3,765	4,360	7,530	8,720
	Id.	4″	0	3,251	3,155	6,502	6,310
	Soldato C.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	3,840	4,140	7,600	8,280
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	2,385	5,225	4,760	10,450
	Id.	4″	0	1,726	1,744	3,452	3,488
16ª	Soldato N. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	6,550	5,10	13,100	10,20
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	4,365	5,037	8,730	10,074
	Id.	4″	0	2,430	3,151	4,860	6,301
	Soldato C.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	4,160	5,060	8,320	10,120
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	3,570	4,585	7,140	9,170
	Id.	4″	0	1,782	1,519	3,564	3,038
17ª	Soldato N. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	3,61	3,98	7,220	7,96
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	3,015	4,500	6,030	9,00
	Id.	4″	0	2,302	2,181	4,604	4,362
	Soldato C.	2″. gruppi di 30 contraz.	1 dopo 30 contraz.	3,77	5,900	7,54	11,80
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	3,720	4,910	7,440	9,82
	Id.	4″	0	1,740	1,820	3,480	3,640
18ª	Soldato N. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	4.44	3,84	8,888	7,68
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	4,230	3,915	8,460	7,830
	Id.	4″	0	1,745	1,740	3,490	3,480
	Soldato C.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	4,920	5,250	9,840	10,500
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	3,955	5,805	7,910	11,610
	Id.	4″	0	2,017	1,252	4,034	2,504
19ª	Soldato N. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	4,240	4,333	8,480	8,666
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	3,735	3,505	7,470	7,010
	Id.	4″	0	—	—	—	—
	Soldato C.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	6,74	5,210	—	—
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	4,225	5,040	—	—
20ª	A. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	3,057	4,053	6,114	8,106
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	2,327	3,018	4,654	6,036
	Id.	4″	0	1,308	1,510	2,616	3,020
21ª	A. M.	2″. gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	3,025	3,893	6,050	7,786
	Id.	1″. » 15 »	45″ » 15 »	2,300	3,171	4,600	6,342
	Id.	4′	0	0,898	1,291	1,796	2,582

TABELLA 11ª. — *Peso 2 chilogr.*

Medie delle precedenti Esperienze.

	Frequenza delle contrazioni	Periodi di riposo	Altezza di sollevamento		Lavoro meccanico	
			mano sinistra	mano destra	mano sinistra	mano destra
			m	m	m	m
Soldato N. M.	2″ gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	4,694	4,561	9,388	9,122
»	1″ » 15 »	45″ » 15 »	3,776	4,405	7,552	8,810
»	4″	0	2,432	2,775	4,864	5,540
Soldato C.	2″ gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	4,686	5,175	9,372	10,350
»	1″ » 15 »	45″ » 15 »	3,941	4,368	7,882	8,736
»	4″	0	1,966	1,643	3,932	3,286
A. M.	2″ gruppi di 30 contraz.	1′ dopo 30 contraz.	3,041	3,973	6,082	7,946
»	1″ » 15 »	45″ » 15 »	2,263	3,094	4,526	6,188
»	4″	0	1,030	1,400	2,060	2,800

Dall'esame dei dati numerici della tabella 10ª appare che:

1.° La quantità minima di lavoro meccanico prodotta dai flessori del dito medio si ebbe costantemente quando questi si contraevano di seguito colla frequenza di 4″. Ponendo a confronto le osservazioni fatte su una stessa persona si osserva che anche la maggiore quantità di lavoro meccanico prodotta dal muscolo che si contrae col ritmo di 4″ e senza pause di riposo, è sempre inferiore alla quantità minima di lavoro fatta dal muscolo che si contrae con serie di 15 o di 30 contrazioni con periodi di riposo.

2.° La quantità massima di lavoro meccanico venne data in 24 casi su 28 dal muscolo che fa dei gruppi di 30 contrazioni colla frequenza di 2″, alternati con periodi di riposo di 1′.

Dall'esame della tabella 11ª, che riporta le medie di tutte le osservazioni, risulta poi che:

1.° La quantità massima di lavoro meccanico venne data dai muscoli quando facevano dei gruppi di 30 contrazioni colla frequenza di 2″, alternati con periodi di riposo di 1′.

2.° La quantità minima venne data dai muscoli che si contraevano col ritmo di 4″ e senza periodi di riposo.

VI.

Il lavoro che compie un muscolo quando è già stanco gli nuoce di più che un lavoro maggiore compiuto in condizioni normali.

Colle ricerche di questo capitolo si stabilisce in quale parte della curva della fatica si produca una stanchezza maggiore del muscolo. Per quanto ci siano ignoti i processi intimi dai quali dipendono i fenomeni della fatica è però un fatto accertato che i muscoli si stancano più rapidamente dei nervi, e che per far contrarre un muscolo stanco occorre un eccitamento maggiore per parte dei nervi.

Noi sappiamo dalle precedenti esperienze che un muscolo il quale scriva ogni due ore la sua curva della fatica si trova in condizioni di riposo sufficienti per dare in tutto il giorno sempre il maggiore effetto utile, ma se queste pause sono ridotte ad un'ora le diverse stanchezze parziali vengono a sommarsi per modo che la forza e la resistenza al lavoro nel muscolo restano di molto diminuite, e la fatica si manifesta assai più presto.

Per convincersi di questo fatto basta dare uno sguardo alle tre figure 26, 27, 28 relative all'esperienza 11ª nella quale i fasci muscolari flessori del dito medio scrissero ad ogni ora la loro curva della fatica.

La figura 26 corrisponde al primo tracciato dell'esperienza eseguito alle ore 8 ant. e rappresenta il corso normale della stanchezza nei detti muscoli quando son completamente riposati; vi si contano 31 contrazioni corrispondenti ad un'altezza di sollevamento di $0^{m},583$ e ad un lavoro meccanico di $1^{m},749$.

La figura 27 corrisponde al tracciato 13 dell'esperienza eseguito alle ore 2 pom. quando il muscolo aveva già scritto sei volte la sua curva della fatica; vi si contano 16 contrazioni rappresentanti un'altezza di sollevamento di $0^{m},300$ e un lavoro meccanico di $0^{m},900$. — La figura 28 corrisponde al penultimo tracciato dell'esperienza e fu scritto alle ore 6 pom.; non vi si contano più che 14 contrazioni, le quali rapidamente si abbassano e sono pari ad un'altezza di sollevamento di $0^{m},220$ e ad un lavoro meccanico di $0^{m},660$.

Ora facciamo eseguire dal muscolo col medesimo peso e nelle stesse condizioni di riposo solo la prima parte della curva, cioè le prime quindici contrazioni, e se queste si manterranno simili e non inferiori alle prime quindici contrazioni della curva normale, non ostante il tempo di riposo sia di un'ora, potremo asserire che è la seconda parte della curva, nella quale per un minimo effetto utile da parte del muscolo si richiede il massimo sforzo nervoso, che stanca maggiormente il muscolo.

A maggiore diritto potremo ciò asserire, quando riducendo a mezz'ora i periodi di riposo, si conservasse normale la prima parte della curva durante tutto il giorno.

Esperienza 22ª.

Il giorno 30 giugno 1886 dalle ore 9 ant. alle 6 pom. scrivo ogni ora le prime quindici contrazioni della curva della fatica dei flessori del dito medio col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″. —

Ottengo così 20 tracciati dei quali riproduco solamente il primo fig. 35 e l'ultimo della mano destra fig. 36; e nella seguente tabella riassumo le quantità dell'effetto utile ciascuna volta dato dal muscolo.

2 gruppi di 15 contrazioni massime fatte dai muscoli flessori del dito medio di destra sollevaado un peso di 3 chilogr. col ritmo di 2″ e con periodi di riposo di un'ora.

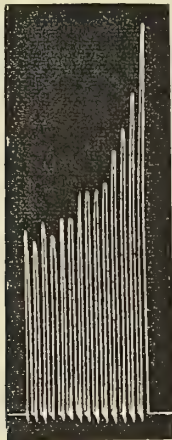



Fig. 36. — Tracciato 20 dell'esperienza 22ª scritto alle ore 6 pom. (1).

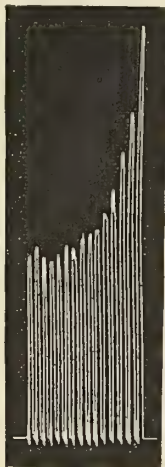



Fig. 35. — Tracciato 2 dell'esperienza 22ª scritto alle ore 9 ant.

(1) Per inavvertenza nell'osservazione del tracciato 22 non vennero fatte che 14 contrazioni. Ciò non costituisce causa di errore.

Tabella 12ª.

Tracciato	Ore	Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1	9 ant.	m 0,400	m 1,200		
2 fig. 35	»	—	—	m 0,433	m 1,299
3	10 ant.	0,383	1,149	—	—
4	»	—	—	0,412	1,236
5	11 ant.	0,431	1,293	—	—
6	»	—	—	0,467	1,401
7	12 mer.	0,408	1,224	—	—
8	»	—	—	0,440	1,320
9	1 pom.	0,414	1,242	—	—
10	»	—	—	0,398	1,194
11	2 pom.	0,460	1,380	—	—
12	»	—	—	0,463	1,389
13	3 pom.	0,427	1,281	—	—
14	»	—	—	0,400	1,200
15	4 pom.	0,397	1,191	—	—
16	»	—	—	0,413	1,239
17	5 pom.	0,451	1,353	—	—
18	»	—	—	0,424	1,272
19	6 pom.	0,447	1,341	—	—
20 fig. 36	»	—	—	0,452	1,356
Quantità totale di lavoro eseguito			12,854		12,906

Dalle figure 35 e 36 e dalla tabella precedente vediamo che le ultime 15 contrazioni fatte dal muscolo alle ore 6 pom. rappresentano un lavoro meccanico punto inferiore a quello prodotto dal muscolo nelle prime 15 contrazioni del mattino.

Dalla cifra che esprime la quantità di lavoro meccanico dato dal muscolo in tutto il giorno contraendosi in questa guisa vediamo che si ha per la mano sinistra $12^{m},854$, per la destra $12^{m},906$. Se paragoniamo questi valori con quelli che rappresentano il lavoro meccanico fatto dal muscolo che scriveva ad ogni ora l'intiera curva della fatica dalle 9 ant. alle 6 pom. (esperienza 11^{a} tabella 6^{a}, mano sinistra $11^{m},243$, mano destra $12^{m},144$), risulta una maggiore quantità di lavoro meccanico pel muscolo che fa solamente le prime 15 contrazioni della curva di $1^{m},611$ per la mano sinistra e per la destra di $0^{m},762$.

Proviamo ora a diminuire ancora il periodo di riposo al muscolo che scrive solo la prima parte della curva della stanchezza.

Esperienza 23ª. (1. VII. 1886).

Qui scrissi ad ogni ½ ora dalle 8 ant. sino alle 6 pom. le prime 15 contrazioni della curva collo stesso peso e lo stesso ritmo che nella precedente esperienza. Ottenni così 42 tracciati di cui riproduco solo il 1° e l'ultimo della mano sinistra figure 37 e 38; e riporto nella tabella 13ª i dati numerici relativi a tutte le osservazioni.

2 gruppi di 15 contrazioni massime fatte dai muscoli flessori del dito medio di sinistra sollevando un peso di 3 chilogr. col ritmo di 2″ e con periodi di riposo di 30′.

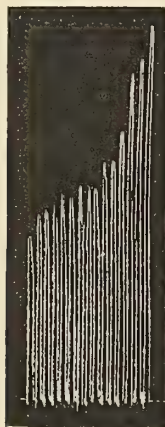



FIG. 38. — Tracciato 41 dell'esperienza 23ª, scritto alle ore 6 pom.

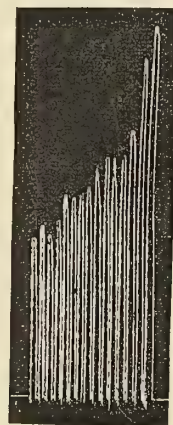



FIG. 37. — Tracciato 1 dell'esperienza 23ª, scritto alle ore 8 ant.

Tabella 13ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza delle contrazioni 2″.*

Tracciato	Ore	Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
		m	m	m	m
1 fig. 37	8 ant.	0,462	1,386	—	—
2	»	—	—	0,445	1,335
3	8.30 ant.	0,408	1,224	—	—
4	»	—	—	0,468	1,404
5	9 ant.	0,420	1,260	—	—
6	»	—	—	0,410	1,230
7	9.30 ant.	0,398	1,194	—	—
8	»	—	—	0,475	1,425
9	10 ant.	0,415	1,245	—	—
10	»	—	—	0,490	1,470
11	10.30 ant.	0,440	1,320	—	—
12	»	—	—	0,451	1,353
13	11 ant.	0,431	1,293	—	—
14	»	—	—	0,412	1,236
15	11.30 ant.	0,473	1,419	—	—
16	»	—	—	0,427	1,281
17	12 mer.	0,401	1,203	—	—
18	»	—	—	0,419	1,257
19	12.30 pom.	0,383	1,149	—	—
20	»	—	—	0,458	1,374
21	1 pom.	0,409	1,227	—	—
22	»	—	—	0,467	1,401
23	1.30 pom.	0,422	1,266	—	—
24	»	—	—	0,481	1,443
25	2 pom.	0,451	1,353	—	—
26	»	—	—	0,437	1,311
27	2.30 pom.	0,434	1,302	—	—
28	»	—	—	0,453	1,359
29	3 pom.	0,403	1,209	—	—
30	»	—	—	0,439	1,317
31	3.30 pom.	0,404	1,212	—	—
32	»	—	—	0,395	1,185
33	4 pom.	0,397	1,181	—	—
34	»	—	—	0,458	1,374
35	4.30 pom.	0,445	1,335	—	—
36	»	—	—	0,431	1,293
37	5 pom.	0,472	1,416	—	—
38	»	—	—	0,459	1,377
39	5.30 pom.	0,418	1,254	—	—
40	»	—	—	0,465	1,395
41 fig. 38	6 pom.	0,469	1,407	—	—
42	»	—	—	0,448	1,344
Quantità totale di lavoro meccanico fatto in tutto il giorno			26,855		28,164

Anche in questa esperienza l'ultimo tracciato scritto alle ore 6 pom. non mostra alcuna diminuzione nella quantità di lavoro meccanico prodotto dal muscolo in confronto con quello fatto nelle prime 15 contrazioni del mattino, cioè nelle condizioni di riposo completo.

Se poi paragoniamo la quantità totale di lavoro meccanico prodotta dal muscolo in tutta l'esperienza con quella da esso data quando scrive ogni due ore l' intera curva della fatica (*Esperienza 12ª*), si ha:

	mano sin.	mano destra
Muscolo che fa ogni 30′ contrazioni 15, lavoro meccanico	26m,855	28m,164
" che scrive ogni 2 ore l' intera curva della fatica lav. mecc.	14m,742	13m,674
Differenza	12m,113	14m,490

ossia nel primo caso una quantità molto maggiore di effetto utile. Potei confermare questi risultati con esperienze simili sui soldati Mantovani e Capurro.

Concludiamo che se non si esaurisce completamente la forza del muscolo e lo si esonera dalle ultime contrazioni che compie per esaurirsi, esso si stanca assai meno e resta così capace di produrre una quantità di lavoro meccanico superiore al doppio di quanto produrrebbe lavorando sino a completa stanchezza nelle condizioni più favorevoli di riposo.

Ho cercato se riducendo ad $\frac{1}{4}$ d'ora i periodi di riposo si poteva ancora ottenere dal muscolo un ulteriore aumento di lavoro e altrettante serie di 15 contrazioni normali; ma in tali condizioni si nota per contro una sensibile diminuzione di effetto utile perchè dopo un certo numero di serie di contrazioni, il quale varia a seconda delle persone, la stanchezza si accumula e le contrazioni si abbassano rapidamente.

VII.

Effetti dell'anemia sulla curva della fatica.

Mi sono limitato a studiare come si modifica la curva della fatica quando si impedisce l'afflusso del sangue nei muscoli della mano e quale influenza esercita sul decorso della fatica una precedente anemia dei muscoli dell'antibraccio.

Esperienza 24ª. (22. V. 1886).

Il giorno 22. V. 1886 scrivo il tracciato della fatica del dito medio di sinistra sollevando un peso di 2 chilogrammi col ritmo di 2″ ed ottengo così il tracciato 39

Altezza di sollevamento 1m,368
Lavoro meccanico . . 2m,736.

Lascio trascorrere due ore finchè sia completamente scomparsa ogni traccia di fatica e dopo mi accingo a scrivere un'altro tracciato nelle stesse condizioni di peso e ritmo, colla differenza che un assistente mi comprime l'arteria omerale, e, quando ci siamo assicurati che è scomparso completamente il polso dalla radiale, scrivo il tracciato riprodotto alla fig. 40

Altezza di sollevamento 0m,326
Lavoro meccanico . . 0m,652.

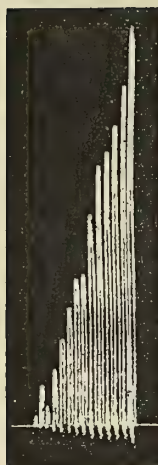



Fig. 40. — Tracciato 2 dell'esperienza 24ª. Curva della fatica degli stessi muscoli anemici.

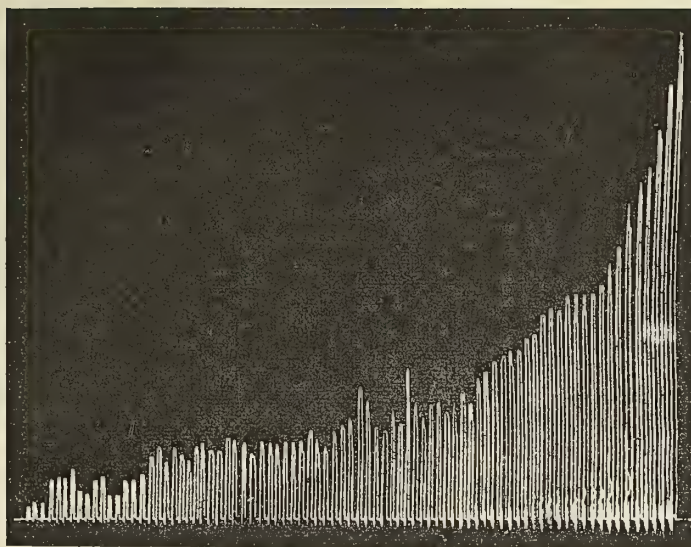



Fig. 39. — Tracciato 1 dell'esperienza 24ª, curva della fatica dei flessori del dito medio di sinistra col peso di 2 chilogr. ed il ritmo di 2″.

Dal paragone di queste figure appare evidente la diminuzione profonda che subisce il lavoro meccanico di un muscolo quando vien sospesa in esso la circolazione del sangue.

È inutile che ci fermiamo a discutere se questo effetto dell'anemia sia dovuto ad un'azione sopra le fibre muscolari o sopra le terminazioni dei nervi nel muscolo; perchè nelle condizioni in cui venne fatta tale esperienza non è possibile distinguere su quale di queste due parti agisca specialmente l'anemia.

Noto però il fatto che mentre sopra di me e sopra altre persone l'effetto dell'anemia era istantaneo e potentissimo in altre persone era assai meno grande.

Basta a tale proposito riferire un'esperienza che ho fatto sopra Giorgio Mondo inserviente del laboratorio di fisiologia, la quale rassomiglia molto per il suo risultato ad un'altra fatta sopra il dott. Aducco.

Esperienza 25ª. (22. V. 1886).

Giorgio Mondo anni 27 scrive il tracciato della fatica del dito medio di destra col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″ fig. 41

Altezza di sollevamento 1^m,323
Lavoro meccanico . . 3^m,969.

Dopo due ore di riposo scrive nuovamente il corso della stanchezza dello stesso muscolo col medesimo peso e la stessa frequenza di contrazione ma sotto l'azione dell'anemia per compressione dell'arteria omerale fig. 42

Altezza di sollevamento 0^m,669
Lavoro meccanico . . 1^m,907.

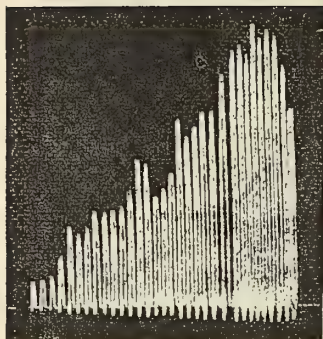



Fig. 42. — Curva della fatica degli stessi muscoli anemici.

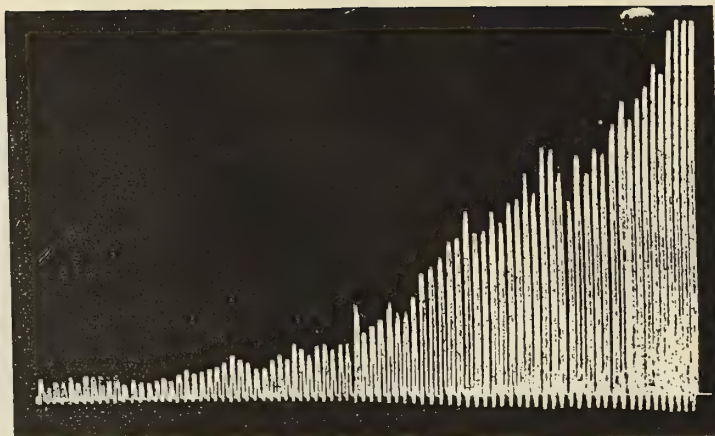



Fig. 41. — Curva normale della fatica dei muscoli flessori del dito medio di destra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″. (Giorgio Mondo).

In questa esperienza l'effetto dell'anemia fu assai meno evidente che nella precedente. In qualche altro caso lo fu anche meno.

Tanto in questa come nella precedente esperienza immediatamente dopo scritti i tracciati 42 e 40 si cessava di comprimere l'arteria e si diceva alla persona impiegata per l'esperimento di sforzarsi a contrarre il muscolo ma i tentativi fatti riuscivano vani. Occorreva un tempo di riposo assai lungo prima che i muscoli ritornassero capaci a sollevare il peso.

Nell'esperienze 24ª e 25ª le curve 40 e 42 sono la risultante di due cause, il lavoro del muscolo e l'anemia, che tendono entrambe ad esaurire la forza del muscolo. È naturale di supporre che quanto più lunga è la durata dell'anemia altrettanto il muscolo diventi meno capace di contrarsi.

Per farmi un'idea più esatta dell'azione che ha l'anemia ho fatto la seguente esperienza.

Esperienza 26ª. (13. XII. 1887).

A. Maggiora scrive la curva normale della fatica col peso di 3 chilogr. la frequenza di contrazione di 2″. Mano sinistra (fig. 43)

Altezza di sollevamento $0^m,669$

Lavoro meccanico . . $2^m,007$.

Dopo due ore di riposo un assistente gli fissa nuovamente la mano sinistra nell'ergografo come per scrivere nello stesso modo di prima la curva della fatica del medio, gli comprime l'arteria omerale durante tre minuti primi, poi cessa di comprimere e gli dice di contrarre il muscolo con sforzi massimi (fig. 44)

Altezza di sollevamento $0^m,108$

Lavoro meccanico . . $0^m,324$.

Fig. 44. — Curva della fatica degli stessi muscoli dopo 3′ di anemia.

Fig. 43. — Curva normale della fatica dei flessori del dito medio (mano sinistra) col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″.

Dopo otto contrazioni progressivamente più basse A. M. non riesce più a smuovere il peso e la quantità di lavoro meccanico data dal muscolo rimaneva inferiore ad $^1/_5$ della quantità che normalmente poteva produrre.

La fig. 44 ci fa vedere che i flessori delle dita malgrado che l'anemia fosse durata 3′ non perdettero l'attitudine ad eseguire una prima contrazione massima. Vediamo se questo fatto persiste quando l'anemia venne mantenuta durante un tempo più lungo.

Esperienza 27ª. (14. XII. 1887).

Faccio una esperienza nelle stesse condizioni della precedente e che ne differisce solo in ciò che qui l'anemia venne protratta a 10 minuti primi.

Ottengo il tracciato seguente fig. 45; il quale dimostra che i muscoli anche dopo un'anemia così protratta non perdettero del tutto l'attitudine a contrarsi; la prima contrazione era però già molto più bassa del normale, e dopo tre contrazioni il muscolo era stanco.

Fig. 45. — Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra col peso di 3 chilogr. il ritmo di 2″, e dopo 10′ di anemia.

Per meglio dimostrare l'azione dell'anemia sulla contrazione muscolare e come vengano a ripristinarsi le condizioni normali nei muscoli quando ritorna la circolazione sanguigna ho fatto un'altra serie di ricerche. — Abbiamo veduto al capitolo II che l'altezza delle contrazioni è costante quando la frequenza con la quale esse si succedono è di 10″.

Ora in un muscolo che si contrae in queste condizioni produciamo l'anemia e se si vedrà un abbassamento nell'altezza delle contrazioni ciò sarà esclusivamente dovuto all'anemia.

Esperienza 28ª. (23. V. 1886).

Giorgio Mondo coi muscoli flessori del dito medio di destra fa ogni 10″ contrazioni massime col peso di 3 chilogr. — Le contrazioni si mantengono tutte pressapoco egualmente atte e si dispongono secondo una linea orizzontale. Dopo alcuni minuti gli comprimo l'arteria omerale alla faccia interna del braccio, punto A fig. 46; le contrazioni vanno gradatamente abbassandosi sino a

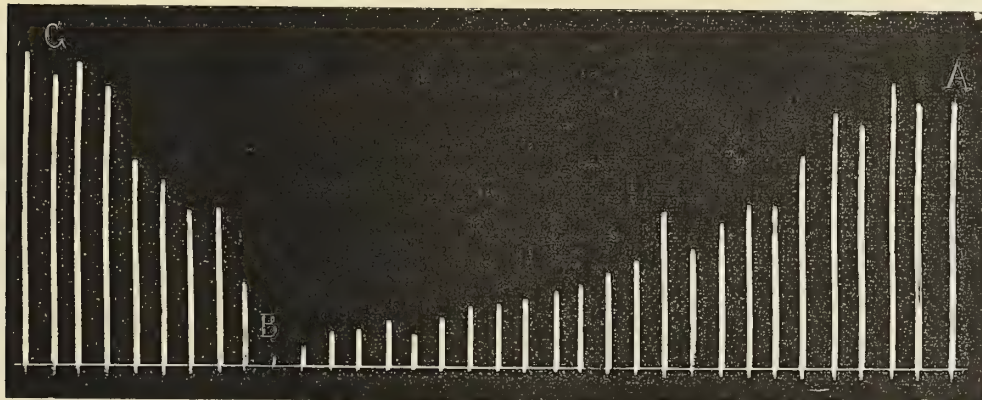



Fig. 46. — Rappresenta una parte del tracciato dell'esperienza 28ª, ridotto alla metà della grandezza normale per ragione di spazio. I flessori del dito medio della mano destra fanno contrazioni massime sollevando un peso di 3 chilogr. col ritmo di 10″. Nel punto A comincia l'anemia, in B cessa; si ha così la *curva dell'anemia;* in C le contrazioni sono ritornate normali.

scomparire e colle loro estremità superiori segnano una linea simile ad un arco di iperbole non già ad una linea retta. A questa linea che segna il decrescere delle contrazioni muscolari per effetto dell'anemia dò il nome di *curva dell'anemia.*

Nel punto B cessa l'anemia e si vede che dopo 10″ il muscolo è già capace di dare una debole contrazione e dopo circa 1 minuto è ritornato in condizioni normali, come dimostra l'altezza delle contrazioni dopo C.

Paragonando la curva ascendente colla quale si ristabiliscono le forze del muscolo quando vi affluisce nuovamente il sangue con quella decrescente colla quale la forza si spegne, si vede che sale più rapidamente la prima di quanto non sia discesa la seconda per effetto dell'anemia, in altre parole che il muscolo riacquista più rapidamente coll'afflusso del sangue la sua energia di quanto non l'abbia perduta per l'anemia compiendo il medesimo lavoro.

In altre esperienze simili a questa il ritorno del muscolo allo stato normale avveniva più rapidamente ancora. Già 20″ dopochè era cessata la compressione dell'arteria omerale si vedevano le contrazioni rifarsi alte come prima dell'anemia.

Talora l'effetto dell'anemia non ha tempo a manifestarsi con un abbassamento nelle contrazioni così evidente, perchè insorge prima un altro fenomeno che obliga a troncare l'esperienza. E questo fenomeno è un formicolio che lieve da prima si cangia tosto in un crampo intenso e doloroso da dover sospendere l'anemia.

Conchiudo

1.° Che l'anemia produce da sola dei fenomeni simili a quelli della fatica.

2.° Che quando per mezzo dell'anemia un muscolo è divenuto incapace a contrarsi, cessando l'anemia le contrazioni aumentano più rapidamente in altezza di quanto prima non fossero discese gradatamente sollevando il medesimo peso. Ciò vuol dire che il materiale di lavoro del muscolo si guasta lentamente e può essere rinnovato rapidamente colla circolazione del sangue [1]

VIII.

Come i muscoli che non lavorano direttamente risentano la fatica di quelli che lavorano.

R. Mayer nel suo celebre scritto sopra il movimento organico ne' suoi rapporti col ricambio della materia [2] aveva già detto che « la stanchezza quando non è prodotta da un eccesso momentaneo di lavoro si diffonde uniformemente sull'intiero sistema dei muscoli; che il lavoro momentaneo di un braccio non si estende a quello del lato opposto affaticandolo, ma che dopo una marcia faticosa le braccia sono come le gambe meno disposte ad un ulteriore lavoro ».

[1] Ho ripetuto le esperienze di Zabludowski col massaggio (Centralblatt f. m. Wiss. 1883, n. 14) e di questo argomento parleremo al capitolo XI.

[2] Mayer, *Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel*, p. 110.

Questo fatto il quale già si intravede colla semplice osservazione di noi stessi ho studiato col metodo grafico.

Esperienza 29ª.

Il giorno 14 marzo 1886 fissata nel solito modo la mano destra nell'ergografo stancai col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″ i fasci muscolari flessori del dito medio; subito dopo un assistente mi sprigionò dall'astuccio il dito indice, vi fissò l'anello, mi fermò il dito medio, ed io stancai l'indice collo stesso peso ed intervallo; immediatamente dopo stancai l'anulare della stessa mano. Appena finito l'assistente voltò prontamente l'apparecchio disponendolo per la mano sinistra ed allora scrissi la curva del dito medio di sinistra.

Per fare questi cangiamenti non si impiegava più di 10″ a 20″.

Quindi si lasciarono ai muscoli due ore di riposo per portarsi in condizioni normali e si ripetè la 2ª curva cioè quella dell'indice, altre due ore e si ripetè la curva dell'anulare destro, altre due e si rifece la curva del dito medio di sinistra. — Per brevità non riproduco qui che due dei sette tracciati ottenuti, quelli della fatica del dito anulare quando lavora in condizioni normali di riposo e quando lavora dopo del medio e dell'indice, figure 47 e 48: e riporto nella seguente tabella i dati numerici dell'esperienza.

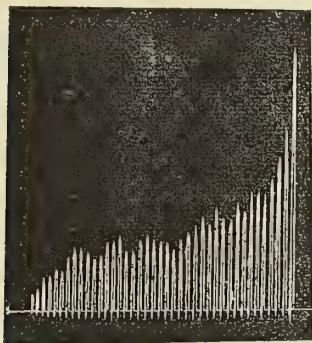



Fig. 48. — Curva della fatica dei flessori del dito anulare di destra, scritta immediatamente dopo stancati i fasci flessori del dito medio, e dell'indice.

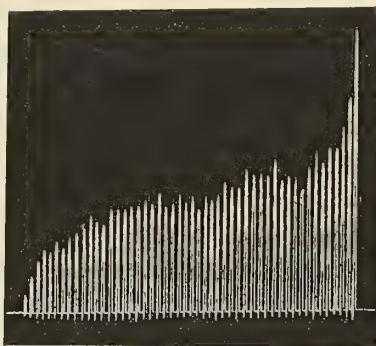



Fig. 47. — Curva normale della fatica dei flessori del dito anulare di destra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″

Tabella 14ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza delle contrazioni 2″.*

Tracciato	Ore	Muscoli flessori del dito	Altezza di sollevamento	Lavoro meccanico	Osservazioni
1	9 antim.	Medio di destra	m 1,153	m 3,459	Condizioni normali di riposo
2	20″ dopo	Indice di destra	1,893	5,679	
3 fig. 48	10″ dopo	Anulare di destra	0,441	1,323	
4	2 ore dopo	Medio di sinistra	0,983	2,949	
5	20″ dopo	Indice di destra	2,252	6,756	Condizioni normali di riposo
6 fig. 47	id.	Anulare di destra	0,802	2,406	Id.
7	id.	Medio di sinistra	1,031	3,093	Id.

Si vede che i muscoli flessori dell' indice contraendosi in condizioni normali di riposo compirono un lavoro meccanico di 6^m,756 mentre quando si stancavano dopo affaticato il dito medio non diedero più che un lavoro di 5^m,769 con una perdita di 1^m,077; che il dito anulare il quale lavorando in condizioni normali di riposo fece un lavoro meccanico di 2^m,406, dopo non ne diede più che 1^m,323 con perdita di 1^m,183, finalmente che il dito medio di sinistra lavorando immediatamente dopo che si son stancate le dita dell'altra mano perdette 0^m,366 della quantità di lavoro meccanico ch'esso diede due ore dopo lavorando pel primo.

Nel ripetere altre volte questa esperienza dovetti convincermi che n'è condizione necessaria della riuscita il frapporre un tempo minimo nel cangiare le posizioni delle dita o del braccio nell'apparecchio. — Bastava talvolta che fra l'una e l'altra curva intercedesse una pausa un po' maggiore di quelle frapposte fra i singoli tracciati della presente esperienza perchè non si potesse più riconoscere l'effetto della fatica dei muscoli che si stancarono una sola volta su quelli che non lavorano direttamente.

Ho pure osservato che il dito anulare risente assai più che l' indice l'effetto della stanchezza dei fasci del medio; e ciò evidentemente per essere l'indice dotato oltre che di un fascio comune col dito mignolo del flessor superficiale, di un robusto fascio muscolare proprio del flessor profondo, che gli dà eziandio maggior forza e resistenza al lavoro.

La stanchezza dei fasci muscolari che flettono un dito accelera il manifestarsi della fatica nei fasci muscolari flessori delle altre dita della stessa mano che lavorano immediatamente dopo di esso e la stanchezza dei flessori delle dita di una mano accelera il manifestarsi della fatica nell'altra quando lavori immediatamente dopo. Questo fenomeno scompare molto rapidamente.

Effetto della stanchezza delle gambe sulla curva della fatica dei muscoli flessori delle dita della mano.

Esperienza 30ª.

Il giorno 9 maggio 1886 dopo avere al mattino alle ore 8, alle 10, alle 12 successivamente scritto le curve normali della fatica nei flessori del medio delle due mani col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″, feci colazione e quindi in compagnia di due amici percorsi lo stradale che da Torino conduce a Casale per cinque chilometri nell'andata ed altrettanti nel ritorno. Durante tale cammino a passo non celere tenni quasi sempre le mani in tasca per non istancare le braccia col ciondolarle. Ritornato alle ore 5 ½ in laboratorio mi sentivo stanco; scrissi subito le curve della fatica dei flessori suddetti. — Escito quindi verso le 6 ¼ dal laboratorio andai a pranzo, mangiai con appetito e bevetti vino, ed alle 7.30 rientrai in laboratorio ove scrissi nuovamente la curva della fatica coi muscoli flessori del dito medio delle due mani.

Per esser breve dei 10 tracciati ottenuti non riporto che tre relativi alla mano sinistra uno indicante la curva normale della fatica nei flessori del medio di destra fig. 49; l'altro segnante il corso della stanchezza in questi muscoli alle ore 5 ¼ quando ritornavo dalla passeggiata ed avevo stanche le gambe, fig. 50; l'ultimo poi eseguito alle ore 7 dopo il pranzo (fig. 51).

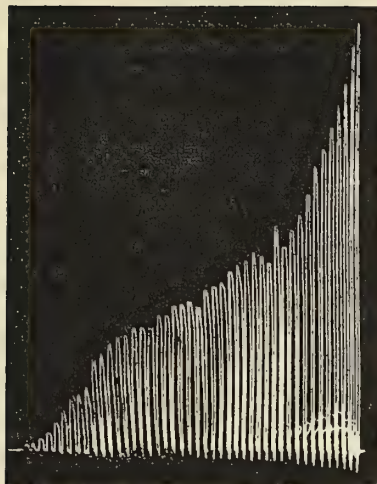



Fig. 51. Fig. 50. Fig. 49.

Fig. 49, tracciato 5 dell'esperienza 30ª. Curva normale della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2''.

Fig. 50, tracciato 7 dell'esperienza 30ª. Modificazione presentata dalla curva degli stessi muscoli dopochè vennero stancate le gambe.

Fig. 51, tracciato 9 dell'esperienza 30ª, mostra il ritorno alle condizioni normali nei muscoli flessori delle dita per effetto del riposo di 2 ore e del cibo.

E riassumo nella seguente tabella i dati numerici dell'esperienza.

Tabella 15ª. — *Peso 3 chilogr. Ritmo 2''.*

Tracciato	Ore	Mano sinistra		Mano destra		Osservazioni
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	
1	8 ant.	m 0,910	m 2,730	—	—	
2	10 ant.	—	—	m 1,020	m 3,060	
3	»	0,799	2,397	—	—	
4	»	—	—	0,925	2,775	
5 fig. 49	12 mer.	0,875	2,625	—	—	
6	»	—	—	0,870	2,610	
7 fig. 50	5.30 pom.	0,290	0,870	—	—	Dopo 10 chilometri di cammino
8	»	—	—	0,305	0,915	2 ore di riposo e pranzo
9 fig. 51	7.30 pom.	0,964	2,892	—	—	
10	»	—	—	1,050	3,150	

Paragonando la fig. 50 colla 49 e la 51 e le cifre di questa tabella si vede che:

1.° I muscoli dell'antibraccio si stancano più rapidamente e dànno una quantità di lavoro meccanico minore in seguito alla stanchezza generale prodotta da una passeggiata di 10 chilometri.

2.° Dopo aver fatto una passeggiata di 10 chilometri basta il riposo di due ore ed il ristoro del cibo, perchè i muscoli del braccio riacquistino la loro energia normale.

Influenza delle marcie forzate.

Per rendere evidente la grande diversità che esiste fra varie persone nella resistenza alla fatica e come l'esercizio modifichi profondamente le condizioni dell'organismo, riferisco una esperienza nella quale una marcia di 32 chilometri fatta da due soldati non produsse alcun effetto sui muscoli della mano e ci volle una marcia di 64 chilometri per rendere evidenti gli effetti della stanchezza generale, mentre sopra di me in un epoca dell'anno nella quale facevo una vita molto sedentaria bastava già una passeggiata di 10 chilometri per diminuire la quantità del lavoro meccanico dei flessori delle dita nella mano.

Esperienza 31^a.

Mantovani e Capurro di anni 22 soldati dell'81° reggimento di fanteria, i quali mi servirono già per altre esperienze, alle ore 8 antim. del 27 maggio 1886 scrivono la curva della stanchezza dei muscoli flessori del dito medio delle due mani, indi mangiano la prima parte della loro razione da soldato [1] e poi senz'armi e senza bagaglio se ne vanno da Torino al Castello di Rivoli e ritornano percorrendo così 32 chilometri di cammino, durante i quali tennero quasi sempre le mani in tasca.

Alle ore 3 $\frac{1}{2}$ in cui sono di ritorno dicono che non si sentono stanchi, scrivono la loro curva della fatica coi muscoli flessori suddetti la quale presenta ancora i suoi caratteri normali sia per la forma sia per la quantità del lavoro meccanico prodotto. — Subito dopo mangiano la seconda parte della razione e poscia si rimettono in strada e rifanno lo stesso viaggio da Torino a Rivoli, cioè altri trentadue chilometri [2].

Quando ritornarono la seconda volta a Torino eran le nove pomeridiane, dissero di sentirsi molto stanchi. Scrissero le loro curve della fatica dei flessori e poscia si coricarono. Ma durante la notte essi furono agitati e non poterono quasi dormire; al 28 mattina alle ore sette vennero di nuovo in laboratorio, dissero che si sentivano ancora stanchi e scrissero la curva della fatica dei flessori del dito medio delle due mani. Lo stesso fecero alle 11 $\frac{1}{2}$ antim. ed alle 3 pom.

Questa esperienza consta di 24 tracciati dei quali non riproduco che tre del soldato Capurro, per la mano sinistra. Il primo, fig. 52, rappresenta il corso normale della stanchezza nei flessori del dito medio di destra col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″, corrisponde al 2° tracciato dell'esperienza, altezza di sollevamento $1^m,737$, lavoro meccanico $5^m,211$; il secondo, fig. 53, corrisponde al 10° tracciato dell'esperienza e rappresenta la curva della fatica degli stessi muscoli dopo la marcia di 64 chilometri, altezza di sollevamento $0^m,375$, lavoro meccanico 1,125; il terzo, fig. 54, corrisponde al 14° tracciato dell'esperienza e mostra il corso della stanchezza nei flessori del dito medio alle ore 7 ant. del giorno 28 maggio, altezza di sollevamento $0^m,640$, lavoro meccanico $1^m,920$.

[1] La razione che il laboratorio passava ai soldati era quella di marcia: carne gr. 300, pane da munizione gr. 900, pasta gr. 150, condimenti 35, sale a piacimento; inoltre vino 500 c.c.

[2] I nostri soldati si prestavano di buon grado a questi esperimenti che preferivano al servizio di caserma ed io non avevo alcun dubbio percorressero realmente la strada loro indicata; ad ogni modo avevo loro consegnato un foglio di via che essi, giunti a Rivoli presentavano all'ufficiale di picchetto in quartiere; questi vi apponeva il visto e vi segnava l'ora in cui i soldati si erano presentati e li rimandava a noi.

Esperienza 32ª.

TABELLA 16ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza di contrazione 2″.*

Tracciato	Giorno ed ore	Soldato CAPURRO				Soldato MANTOVANI				Osservazioni
		Mano sinistra		Mano destra		Mano sinistra		Mano destra		
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	
1	27. V. 86 8 ant.	m 1,203	m 3,609	—	—	—	—	—	—	Normale
2	»	—	—	m 1,737	m 5,211	—	—	—	—	»
3	»	—	—	—	—	m 0,930	m 2,790	—	—	»
4	»	—	—	—	—	—	—	m 0,959	m 2,877	»
5	3.30 pom.	1,150	3,450	—	—	—	—	—	—	Dopo una marcia di 32 chilometri
6	»	—	—	1,500	4,500	—	—	—	—	»
7	»	—	—	—	—	1,020	3,060	—	—	»
8	»	—	—	—	—	—	—	0,875	2,625	»
9	9 pom.	0,300	0,900	—	—	—	—	—	—	Dopo 64 chilometri
10	»	—	—	0,375	1,125	—	—	—	—	»
11	»	—	—	—	—	0,320	0,960	—	—	»
12	»	—	—	—	—	—	—	0,280	0,840	»
13	28. V. 86 7 ant.	0,500	1,680	—	—	—	—	—	—	Riposo della notte
14	»	—	—	0,640	1,920	—	—	—	—	»
15	»	—	—	—	—	0,609	2,027	—	—	»
16	»	—	—	—	—	—	—	0,600	1,800	»
17	11.30 ant.	0,890	2,670	—	—	—	—	—	—	
18	»	—	—	1,050	3,150	—	—	—	—	
19	»	—	—	—	—	0,830	2,420	—	—	
20	»	—	—	—	—	—	—	0,900	2,700	
21	3 pom.	1,307	3,921	—	—	—	—	—	—	Normale
22	»	—	—	1,680	5,040	—	—	—	—	»
23	»	—	—	—	—	1,203	3,609	—	—	»
24	»	—	—	—	—	—	—	1,300	3,900	»

I rimanenti tracciati sono ommessi. Le curve date dai soldati alle ore 3 ½ del 1º giorno dell'esperienza sono affatto simili alla fig. 52 cioè del tutto normali sia per la forma, come per la quantità di lavoro meccanico da esse rappresentata. Mantovani e Capurro avvezzi a lunghe passeggiate militari portando un peso di circa chilogrammi 25 [1] non si erano stancati per un viaggio di 32 chilometri senza armi e senza bagaglio, mentre io che faceva vita sedentaria mi ero stancato assai più per un viaggio di 10 chilometri, come mostrò la precedente esperienza. Per contro le curve scritte dai soldati dopo il viaggio di 64 chilometri, delle quali dà un esempio la figura 53, mostravano notevole diminuzione nella forza e nella resistenza al lavoro dei loro muscoli della mano, diminuzione

[1] Moschetto Wetterly chilogr. 4, sciabola baionetta, cartuccie, zaino, altri arredi, viveri di riserva, complessivamente 15 a 22 chilogr.

che persisteva ancora molto manifesta alle 7 ant. del giorno successivo dopo il riposo della notte, un po' meno evidente alle 9 ant. dopo la colazione, ed alle 11, e solo cessava affatto alle 3 pom. prima del pranzo. A questa ora i soldati diedero 4 tracciati normali della fatica coi muscoli flessori della mano, mentre dicevano sentirsi ancora stanche e dolenti le gambe.

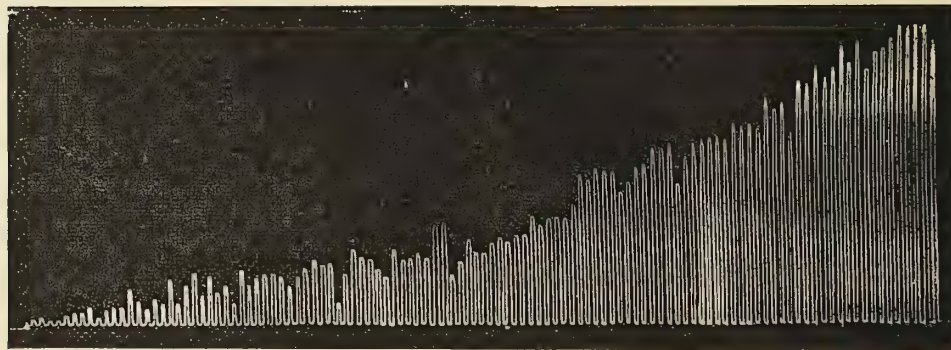



Fig. 52. — Tracciato 1 dell'esperienza 31ª. Soldato Capurro. Curva normale della fatica nei muscoli flessori del dito medio di destra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″.

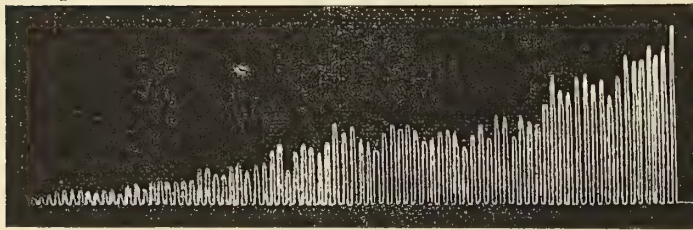



Fig. 54. — Tracciato 14 dell'esperienza. Curva della fatica degli stessi muscoli dopo il riposo della notte. Si vede che questo non aveva bastato per ristabilire le condizioni normali nei muscoli.

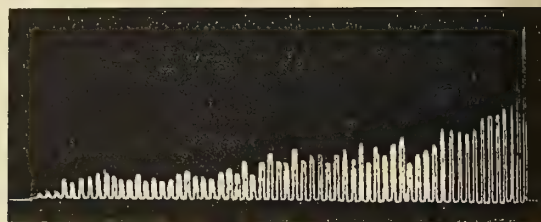



Fig. 53. — Tracciato 10 dell'esperienza. Soldato Capurro. Curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di destra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″, dopo 64 chilometri di cammino.

Da queste esperienze risulta che:

La fatica delle gambe accelera il manifestarsi della stanchezza nelle braccia, più o meno a seconda delle diverse persone e della minore o maggiore loro abitudine alle marcie.

Cercheremo nell'ultimo capitolo di conoscere con altre esperienze quale sia la natura della fatica e vedremo che si tratta di un fenomeno molto complesso. È probabile che il muscolo, il quale lavora, produca per effetto della disassimilazione sostanze che trasportate poi dal sangue e dalla linfa in tutto il corpo esercitano un'azione nociva sui muscoli, sui centri nervosi e sui nervi.

IX.

Effetto della veglia e del sonno.

Durante parecchi giorni registrai le curve della fatica nei muscoli flessori della mano di varie persone (dottori Vittorio Aducco, Ugolino Mosso, Valentino Grandis, di Giorgio Mondo ecc.), al mattino appena giunti in laboratorio e la sera prima di uscirne; ma non ho trovato che vi fosse una differenza nei tracciati, perchè la forma della curva

e la quantità di lavoro meccanico dato dai muscoli era pressappoco la stessa o presentava variazioni simili tanto al mattino quanto alla sera.

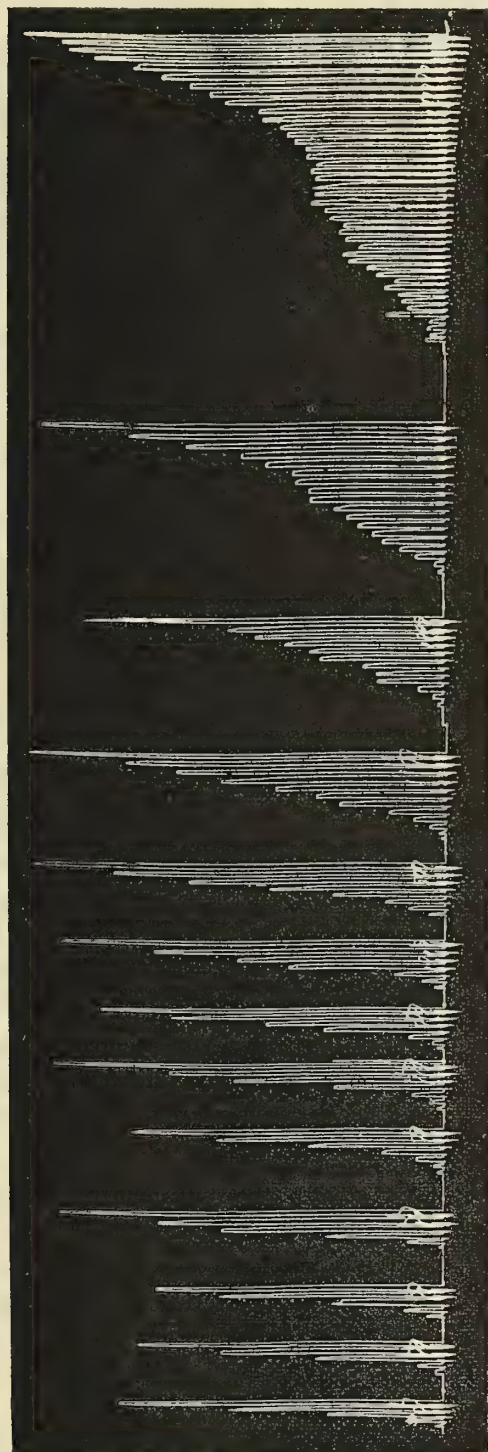



Fig. 55. Fig. 56. Fig. 57. Fig. 58. Fig. 59. Fig. 60. Fig. 61. Fig. 62. Fig. 63. Fig. 64. Fig. 65. Fig. 66. Fig. 67.

Fig. 55. Curva normale della fatica nei muscoli flessori del dito medio di destra col peso di 3 chilogr., ritmo 2″.
Fig. 56 a 67. Modificazioni avvenute nella curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio delle due mani per effetto della veglia di una notte. Peso 3 chilogr., ritmo 2″, periodi di riposo di 2 ore.

Queste osservazioni, se noi le raffrontiamo a quanto si è veduto nel precedente capitolo sulla stanchezza prodotta dalle grandi marcie, la quale non scompare durante il riposo della notte, ci dimostrano, che per un lavoro moderato, quale occorre nelle occupazioni ordinarie della nostra vita, non si esauriscono nella giornata le provviste dell'energia muscolare, e che per ciò il riposo della notte ha poca influenza sui muscoli, mentre che per contro è più spiccata l'azione del sonno sui centri nervosi.

Si presentavano pertanto due mezzi per conoscere l'azione del sonno, l'uno di accrescere la fatica nella giornata, l'altro di diminuire la durata del sonno.

Esaminiamo questo secondo caso.

Esperienza 33ª.

Il giorno 11 maggio 1886 scrissi ogni due ore dalle 8 ant. alle sei pom. le curve normali della fatica nei muscoli flessori del dito medio delle due mani, col peso di 3 chilogr. e frequenza di contrazione di 2″. Ottenni così 12 tracciati dei quali riporto solamente l'ultimo, figura 55, essendo i rimanenti affatto simili a questo. Alle sei pom. cessai; pranzai come di solito e poscia in luogo di coricarmi vegliai durante tutta la notte che passai sino alle 12 in teatro e quindi in laboratorio.

Il giorno successivo dalle ore 8 ant. alle 6 pom. rifeci come nel giorno 11 le curve della fatica dei flessori del medio delle due mani nelle medesime condizioni di peso, frequenza di contrazione e periodi di riposo. — Riporto tutti i 12 tracciati di questo giorno figure 56 a 67, e riassumo nella tabella 17 i dati numerici

dell'esperienza. — La sera del 12 mi coricai di buon'ora ed il giorno 13 ripetei le curve come nel primo giorno dell'esperienza; lascio di pubblicare questi tracciati perchè tutti normali, simili cioè alla figura 55.

TABELLA 17ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza di contrazione 2″.*

Tracciato	Data ed Ora	Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
11	11. V. 1887. ore 6 pom.	m 0,528	m 1,584	—	—
12 fig. 55	» » »	—	—	m 0,796	m 2,388
1 » 56	12. V. 1887. ore 8 ant.	0,310	0,930	—	—
2 » 57	» » »	—	—	0,186	0,558
3 » 58	» 10 »	0,233	0,699	—	—
4 » 59	» » »	—	—	0,191	0,573
5 » 60	» 12 mer.	0,147	0,441	—	—
6 » 61	» » »	—	—	0,127	0,381
7 » 62	» 2 pom.	0,137	0,411	—	—
8 » 63	» » »	—	—	0,111	0,333
9 » 64	» 4 »	0,118	0,354	—	—
10 » 65	» » »	—	—	0,090	0,270
11 » 66	» 6 »	0,090	0,270	—	—
12 » 67	» » »	—	—	0,102	0,306

Dai tracciati e dalla tabella riassuntiva dell'esperienza 32ª appare che basta non dormire una notte, perchè nel giorno successivo il muscolo si stanchi molto più rapidamente, cosicchè alle 8 ant. del giorno successivo troviamo che la quantità di lavoro meccanico è ridotto alla metà di ciò che si produceva in condizioni normali. Nel giorno che segue la veglia i muscoli flessori delle dita sono ancora capaci di dare una prima contrazione normale, o poco modificata, ma l'altezza delle contrazioni successive diminuisce con insolita rapidità. La diminuzione del lavoro meccanico che dà un muscolo spesse volte è maggiore che nell'esaurimento prodotto dall'anemia. Ciò succedeva non ostante che i periodi di riposo fossero di due ore ed io avessi alle ore 12 mangiato con molto appetito.

I tracciati scritti il giorno 13 dopo il riposo della notte, qui non riprodotti, mostrarono che s'erano completamente ripristinate le condizioni normali nei muscoli.

Si vede per ciò che la veglia, producendo un generale esaurimento nell'organismo, ha per effetto di accelerare assai il manifestarsi della fatica nei nostri muscoli; i quali rimangono bensì atti a dare una prima contrazione normale, o poco modificata, ma rapidamente si stancano dando così una quantità molto piccola di effetto utile.

Quest'effetto esauriente della veglia non resta modificato dal cibo e scompare solo dietro l'azione riparatrice del sonno.

X.

Influenza del digiuno e del cibo sulla stanchezza muscolare.

Fin qui non ho parlato dei processi intimi dai quali dipende la contrazione muscolare e che diventano poi la causa immediata della stanchezza; ma le esperienze che stò ora esponendo mi obligano a toccare questo problema importante. Dopochè Hermann dimostrò che un muscolo può rimanere attivo senza bisogno di ossigeno, sono cambiate le idee che prima si avevano sulla attività dei muscoli, e questa crediamo ora dipenda essenzialmente dalla trasformazione chimica della materia che costituisce il muscolo. Lasciamo per ora in disparte la grave complicazione che nasce nello studio della fatica per non saper dire quanta parte di questa dipenda dai fatti che succedono nelle cellule nervose dei centri e dentro ai nervi, e limitiamoci a considerare il muscolo.

Dall'esperienze esposte sin qui parrebbe lecito supporre che si esaurisca nei muscoli per effetto della contrazione una delle parti che li costituisce. Vedremo nell'ultimo capitolo che la fatica si produce anche in altro modo e specialmente per la presenza nel muscolo dei prodotti di regressione dovuti alla trasformazione chimica che producono le contrazioni.

Si tratta ora di studiare coll'ergografo come si esaurisca l'energia nei muscoli dell'uomo, e quali modificazioni subisca la loro funzione quando si indebolisce l' intero organismo per mezzo del digiuno.

Ho eseguito due serie di osservazioni: la prima sul dott. Aducco, sul dott. Grandis e su di me facendo colazione alle 11 $\frac{1}{2}$ e pranzando poi alle sei e scrivendo durante tutto il giorno ogni due ore la curva della fatica nei flessori del medio delle due mani con uno stesso peso ed il medesimo ritmo; l'altra serie sui soldati Mantovani e Attolini che mangiavano alle 8 $\frac{1}{2}$ antim. ed alle 3 pom. In amendue queste serie di esperienze nelle ore che precedono e in quelle che seguono l' introduzione del cibo, tanto la forma della curva della fatica, quanto la quantità di lavoro meccanico prodotta dal muscolo è pressapoco la stessa o presenta variazioni simili.

Una sola volta, facendo scrivere per altro scopo dai soldati Mantovani e Capurro la curva della fatica dei flessori del medio ogni due ore durante tutto il giorno, potei riconoscere nelle curve che susseguivano l'ora del pranzo, fatte alle ore 5 ed alle 7 pom. un sensibile aumento nella quantità di lavoro meccanico prodotto dal muscolo; ma questo fatto rimase isolato e per quanto io abbia ripetuto tale esperienza non mi riuscì di confermarla. Ciò vuol dire che l'effetto del breve digiuno che intercede fra la colazione ed il pranzo, quando la nutrizione si faccia a sufficienza, non basta a diminuire la resistenza del muscolo al lavoro.

Dovetti allora ricorrere ad un digiuno più lungo; in questo modo mi si presentava l'occasione di vedere anche con quale rapidità il cibo può ristorare le forze dell'organismo indebolito dal digiuno.

Esperienza 34ª.

I soldati Attolini e Mantovani, di anni 22, che sono avvezzi a mangiare alle ore 8 ½ ant. ed alle 3 ½ pom., il giorno 24. IV. 1886 ommettono il pasto del mattino e scrivono ogni due ore dalle 7 ant. alla sera, le curve della fatica nei flessori del medio col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″.

Alle tre mangiano quasi tutta la razione giornaliera e subito dopo scrivono le loro curve della fatica.

L'esperienza consta di 24 tracciati dei quali non riporto che due del soldato Attolini. Il primo di questi, fig. 68, corrisponde al 3º dell'esperienza, venne scritto alle ore 7 ant. e rappresenta il corso normale della stanchezza nei flessori del dito medio di sinistra, altezza di sollevamento $1^{m},259$, lavoro meccanico $3^{m},777$. — Le curve si mantengono tutte normali sino alle ore 11, all'una pomerid. la stanchezza comincia a manifestarsi più presto nei muscoli su cui sperimentiamo. Finalmente alle 3 pomeridiane l'effetto del digiuno di accelerare l'esaurimento del muscolo è evidentissimo; la fig. 69 rappresenta appunto il tracciato della fatica del dito medio di sinistra di Attolini scritto alle ore tre, altezza di sollevamento $0^{m},881$, lavoro meccanico $2^{m},643$, con una diminuzione dalle condizioni normali di $1^{m},134$.

Gli ultimi quattro tracciati furono scritti alle 3,45 cioè subito dopo il pranzo e mostrarono come il muscolo avesse ricuperato la primiera energia. Vengono ommessi perchè affatto simili alla fig. 68.

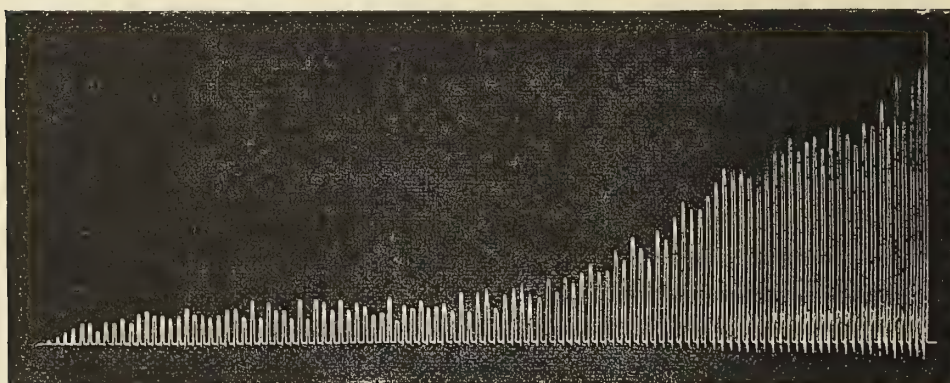



Fig. 68. — Tracciato 3 dell'esperienza 34ª. Soldato Attolini. Curva normale della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra; peso 3 chilogr., ritmo 2″.

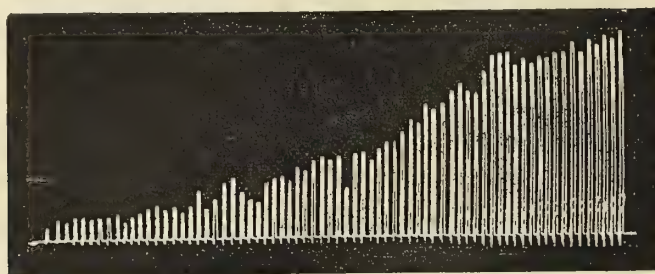



Fig. 69. — Tracciato 17 dell'esperienza 34ª. Soldato Attolini. Curva della fatica degli stessi muscoli nel digiuno. Peso 3 chilogr., ritmo 2″.

Si è così veduto che per effetto del digiuno diminuisce assai la resistenza al lavoro nei muscoli flessori delle dita della mano, e che per effetto del cibo possono rapidamente ristabilirsi le condizioni normali.

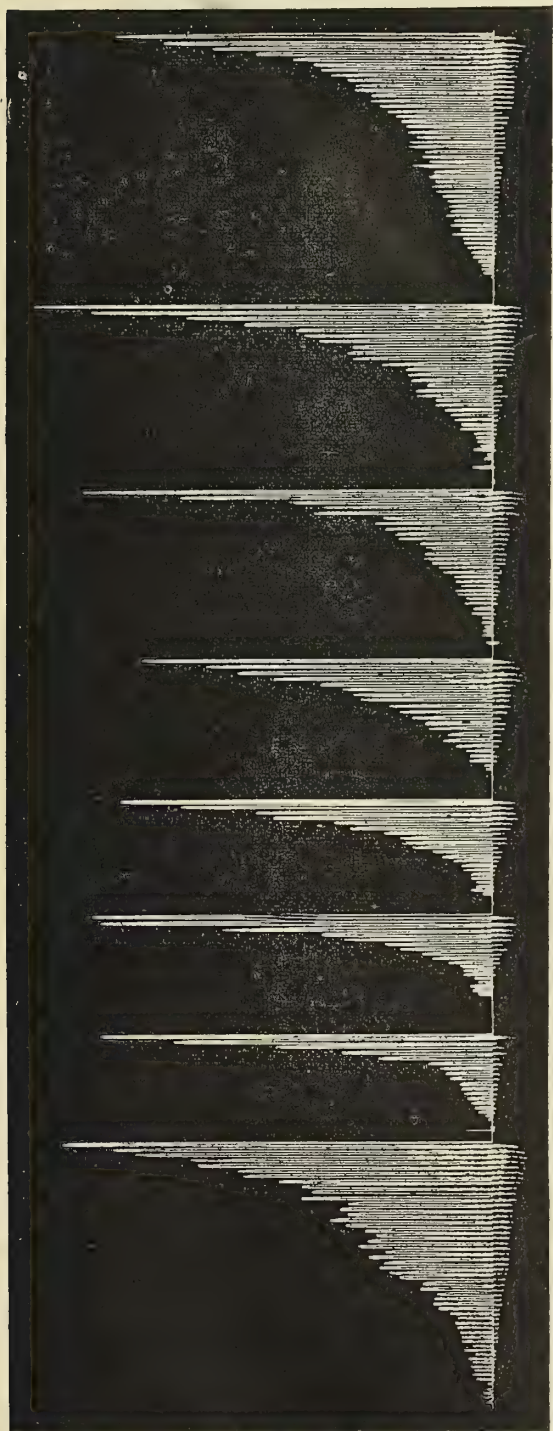



Fig. 70, tracciato 6 dell'esperienza 24ª. Curva normale della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″.
Fig. 71 a 76, tracciati 7 a 12 dell'esperienza 24ª. Modificazioni che presenta la curva della fatica degli stessi muscoli nelle due mani, per effetto del digiuno; peso chilogr. 3, ritmo 2″.
Fig. 77, tracciato 13 dell'esperienza 34ª. Curva della fatica degli stessi muscoli ritornata normale per effetto del cibo.

La precedente esperienza mostra l'effetto esauriente del digiuno sui nostri muscoli e come il cibo ridoni rapidamente ad essi la energia primitiva. Importa ora di conoscere se l' effetto del cibo oltre ad essere rapido sia pure durevole.

Esperienza 35ª.

Avvezzo a mangiare alle ore 11 ½ antim. ed alle 6 pom. il giorno 22 dicembre 1886 tralascio il pasto del mattino e resto così digiuno durante 24 ore. Dalle 8 ant. sino alle 6 pom. scrivo ogni due ore, col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″, la curva della fatica dei muscoli flessori del medio delle due mani. Alle ore sei vado a pranzo ed alle 6.45 sono di ritorno in laboratorio ove scrivo la curva della fatica del dito medio delle due mani. E lo stesso faccio alle ore 9 pomeridiane.

Ottengo in tutto 16 tracciati dei quali ometto i 5 primi ed i tre ultimi tutti normali e riproduco i rimanenti fig. 70 a 77, e nella tabella 18ª dò le cifre del lavoro fatto ciascuna volta dai muscoli, rappresentato in tali figure.

TABELLA 18ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza di contrazione 2″.*

Tracciato	Ore	Mano sinistra		Mano destra		Osservazioni
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	
1	8 ant.	—	—	m 0,736	m 2,208	Normale
2	»	m 0,700	m 2,100	—	—	»
3	10 ant.	—	—	0,725	2,175	»
4	»	0,720	2,160	—	—	»
5	12 merid.	—	—	0,674	2,022	»
6 fig. 70	»	0,629	1,887	—	—	»
						Digiuno
7 » 71	2 pom.	—	—	0,456	1,368	»
8 » 72	»	0,331	0,993	—	—	»
9 » 73	4 pom.	—	—	0,301	0,903	»
10 » 74	»	0,272	0,816	—	—	»
11 » 75	6 pom.	—	—	0,248	0,744	»
12 » 76	»	0,205	0,615	—	—	»
						Pranzo
13 » 77	6.45 pom.	—	—	0,755	2,265	Normale
14	»	0,695	2,085	—	—	»
15	9 pom.	—	—	0,773	2,319	»
16	»	0,765	2,295	—	—	»

Il tracciato 6 corrispondente alla figura 70 è scritto alle ore 12 meridiane cioè ancora in condizioni normali, e serve pel paragone cogli altri.

I tracciati 7, 8, 9, 10, 11, 12, corrispondenti alle figure 71, 72, 73, 74, 75 e 76, mostrano l'effetto del digiuno; la curva della fatica si è modificata nella forma; essa discende assai più rapidamente; la quantità di lavoro meccanico prodotta dai muscoli, già inferiore alla normale alle 2 pom. diminuisce ancora alle 4 ed alle 6. L'altezza della prima contrazione è normale o pochissimo modificata; nei tracciati dell'esperienza precedente la diminuzione in altezza nella prima contrazione dopo il digiuno appare un po' maggiore, ma nella curva fatta coll'altra mano dallo stesso soldato Attolini ed in quelle del Mantovani si nota lo stesso fatto che nelle mie cioè poco o punto diminuzione nel primo sforzo fatto dal muscolo.

I tracciati 13, 14, 15, 16 scritti alle ore 6.45 subito dopo il pranzo, ed alle ore 9, mostrano come il muscolo avesse ricuperato in modo stabile, la primitiva energia.

Rimane così accertato che:

1.° Il digiuno diminuisce la resistenza dei muscoli al lavoro, quantunque modifichi poco la forza della prima contrazione.

2.° L'esaurimento nella forza dei muscoli prodotta dal digiuno scompare rapidamente per mezzo del cibo, e il muscolo conserva in seguito l'energia primitiva.

Si potrebbe supporre, vedendo la prontezza con cui appare la fatica durante il digiuno, che questo fatto dipenda da ciò che il muscolo dopo essersi affaticato, abbia bisogno di un tempo più lungo per ristabilirsi. Ma questa ipotesi non viene confermata dall'esperienza, perchè nell'uomo che digiuna, anche se non lo si è stancato prima con uno o più tracciati di prova, noi vediamo che il muscolo si esaurisce più rapidamente.

Esperienza 36ª.

Il 15 aprile 1886 non mangio al mattino e resto così digiuno durante 24 ore a cominciare dalle 6 pom. del giorno innanzi.

Durante tutto il giorno sto quasi sempre seduto a leggere ed alle sei di sera scrivo la curva della fatica dei flessori del dito medio delle due mani col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2″, fig. 78 e fig. 79.

	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
Mano destra fig. 78	0ᵐ,292	0ᵐ,876
Mano sinistra fig. 79	0ᵐ,163	0ᵐ,489

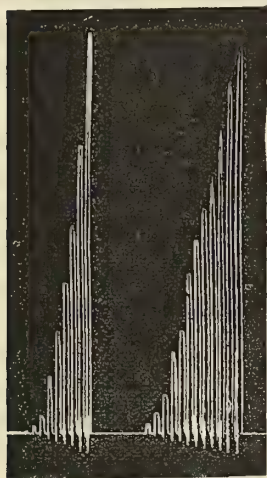



Fig. 79. Fig. 78.

Curva dei muscoli flessori del dito medio di destra e di sinistra, non stancate da precedenti lavori ma nel digiuno. Peso 3 chilogr. Ritmo 2″.

Basta di paragonare queste figure e questi dati con due tracciati normali della fatica eseguiti nelle medesime condizioni di peso e frequenza di contrazione, ad es. colle figure 70 e 77, per vedere che la curva della stanchezza del muscolo digiuno, sebbene riposato durante tutto il giorno, è affatto diversa dalla normale. L'altezza delle contrazioni, normale sul principio, discende rapidamente e si manifesta tosto l'esaurimento. La quantità di lavoro meccanico fatta dal muscolo dopo un digiuno di 24 ore è inferiore alla metà di quello dato in condizioni fisiologiche.

XI.

Irritazione diretta dei nervi e dei muscoli nel digiuno.

Per spiegare i risultati di queste esperienze si può supporre che le sostanze esplosive contenute nel muscolo siansi distrutte per effetto del digiuno e che l'introduzione del cibo abbia restituito queste sostanze alle fibre muscolari.

Questa ipotesi ci obbliga ad ammettere che lo spazio di mezz'ora sia già sufficiente per restituire tali sostanze ai muscoli. Basta rammentare quanto duri la digestione degli alimenti introdotti nello stomaco, la necessità dell'assorbimento e la trasformazione delle sostanze introdotte nel sangue per renderci cauti nell'accettare questa supposizione.

Un'altra ipotesi è che la diminuzione della forza nel digiuno non dipenda tanto dalla diminuzione delle provviste di sostanza esplosiva nel muscolo, quanto dalla diminuita capacità del nervo ad eccitare le trasformazioni chimiche, che sono la causa del raccorciamento muscolare.

Con tale ipotesi non si elimina la difficoltà, perchè resterebbe egualmente incomprensibile come in così breve spazio di tempo possa rinfrancarsi il sistema nervoso in modo da rialzare così notevolmente la forza delle contrazioni.

Anche in queste esperienze noi vediamo ripetersi il fatto già accennato al paragrafo X che cioè la prima contrazione conserva la sua altezza normale, malgrado il digiuno. Non è quindi la forza del muscolo, o l'eccitamento del nervo che faccia difetto, perchè nel primo istante la contrazione si estrinseca co' suoi caratteri normali. Quello che manca al muscolo è la costanza dell'energia, ossia l'attitudine a riprodurre altre contrazioni egualmente forti. L'ipotesi che i residui della trasformazione di queste materie esplosive diventino funesti in maggior grado al nervo ed al muscolo non ci sembra altrettanto probabile.

Un fatto che ci sorprende in queste ricerche è la rapidità colla quale il muscolo riprende la sua forza per effetto del cibo, perchè, come si vede dalle tabelle delle precedenti esperienze, il muscolo che alle ore sei pom. non dava più che un lavoro meccanico uguale a circa la metà del normale, mezz'ora o tre quarti d'ora dopo, si era già ristabilito completamente e dava un lavoro meccanico simile a quello che esso produce in condizioni fisiologiche.

Finalmente può sorgere il dubbio che si tratti di un fatto cerebrale, dipendente dalla volontà. — Per risolvere questo problema ho eseguito la seguente esperienza nella quale l'eccitamento al muscolo che si contrae, non è più portato dal sistema nervoso centrale, ma da una corrente indotta applicata su di un nervo periferico.

Esperienza 37ª. (1. 2 e 3. IX. 1887).

Disposta la mano destra nel sostegno dell'ergografo, fisso nei rispettivi astucci il dito indice il medio e l'anulare lasciando in libertà il pollice. Il dott. Grandis mi applica sull'eminenza tenare la pinza miografica del Marey nel modo descritto da questo fisiologo (1). La penna del tamburo di Marey col quale la pinzetta comunica scrive su un cilindro di Baltzar a piccola velocità, 1 giro in 8′. — L'eccitamento elettrico è portato da un eccitatore che riunisce i due reofori di una corrente indotta di una slitta Du Bois-Reymond animata da due elementi Leclanché. — L'eccitamento è costante, avviene ogni 1″ ed è applicato sul nervo mediano circa 14 mm. al di sopra del piego inferiore del gomito nello spazio compreso fra i tendini del grande e del piccolo palmare. Ad ogni scossa si vedono i muscoli dell'eminenza contrarsi.

(1) Marey, *Études graphiques sur la nature de la contraction musculaire*, Journal de l'Anatomie et de la Physiologie de C. Robin, 1866. pag. 225.

Prima parte dell'esperienza (1. IX. 1887).

Condizioni normali.

Comincio alle ore 3.25 pom. e termino alle 5.35′ contraendo sempre di seguito col ritmo di 1″. Occupo tutto il foglio del cilindro con 16 ordini di contrazioni che complessivamente salgono al numero di 8000.

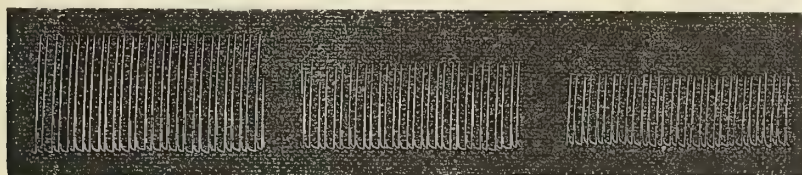
Non riproduco questo tracciato perchè del tutto simile alla parte I della fig. 80. Le contrazioni si mantengono dalla prima all'ultima sempre egualmente alte; la qual cosa significa che i muscoli dell'eminenza tenare nelle nostre condizioni di esperimento cioè con libero afflusso sanguigno e privi di peso, possono continuare a contrarsi per un tempo indefinitamente lungo colla frequenza di 2″ senza stancarsi (1).

Seconda parte dell'esperienza (2. IX. 1887).

Digiuno.

In questo giorno ho ommesso il pasto che soglio fare alle 11 ½ ant. e sono rimasto digiuno sino alle 6 pom. Alle 3.35′ pom. comincio a scrivere le contrazioni dei muscoli dell'eminenza tenare ad ogni 1″ come nella prima parte dell'esperienza. Ottengo così un tracciato con 14 ordini di contrazioni che rappresentano in complesso circa 7100 contrazioni. L'esperienza termina alle 5.30.

Riproduco alcune parti di questo tracciato, cioè un tratto della 1ª linea, fig. 80, I; un tratto della 7ª, fig. 80, II; un tratto della 13ª, fig. 80, III.

Fig. 80.

I. II. III.

Modificazioni che avvengono nelle contrazioni dei muscoli dell'eminenza tenare per effetto del digiuno. Le contrazioni sono scritte colla pinzetta miografica del Marey.

I. Contrazioni normali al principio dell'esperienza. — II. Verso la metà dell'esperienza. — III. Verso la fine dell'esperienza.

Come si vede da queste figure si ha una progressiva diminuzione nell'altezza delle contrazioni; queste, che sul principio sono alte 16^{mm}, nella 7ª linea non misurano più che 11^{mm}, e nella 13ª $9^{mm},5$. Ciò vuol dire che per effetto del digiuno il muscolo, il quale in condizioni normali può contrarsi per un tempo lunghissimo senza stancarsi, qui procede verso l'esaurimento.

Terza parte dell'esperienza (3. IX. 1887) (2).

Cibo dopo il digiuno.

Oggi tralascio il pasto del mattino e resto digiuno sino alle 4 ½ pom.; alle 4 ½ vado a mangiare, alle 5.8′ comincio l'esperienza come nei due giorni precedenti.

(1) Marey, loc. cit., pag. 238.

(2) L'esperienza venne fatta in tre parti ciascuna in diverso giorno, e non prolungata ogni volta oltre due ore, perchè l'applicazione per un tempo più lungo della scossa d'induzione dà luogo a stravasi sottocutanei ed a lesioni della pelle che possono nuocere all'andamento dell'esperienza. Del pari riesce difficile mantenere per oltre due ore immobile l'arto senza che si manifestino crampi.

Ottengo un tracciato nel quale si contano 14 linee di contrazioni e in tutto contrazioni 7000. Non riporto questo tracciato perchè in tutto simile a quello del 1° giorno dell'esperienza ed alla parte I della fig. 80.

L'altezza delle contrazioni si mantiene la stessa tanto sul principio, quanto alla metà, quanto al fine dell'esperienza; il che dimostra che i muscoli dell'eminenza tenare indeboliti dal digiuno sono ritornati in condizioni normali già 38 minuti dopo preso il cibo.

L'esperienza precedente è una di quelle che ho fatto con metodo diverso dell'ergografo. Il Prof. A. Mosso ha già rammentato nella precedente Memoria che prima di costruire l'ergografo nella sua forma attuale si eseguirono dei tentativi su varii muscoli con strumenti diversi: questo esempio mostra quale risultato possa ottenersi colla pinza miografica di Marey. Il numero delle contrazioni quando un muscolo lavora a vuoto può essere di parecchie migliaia, prima che si manifesti con evidenza una diminuzione nell'altezza. Questo è un grave inconveniente nello studio della fatica, ma non è il solo; dovendo tenere immobili per un tempo così lungo la mano ed il braccio, insorge qualche volta un formicolio che obbliga a smettere prima che sia finita l'esperienza. Un altro grave incomodo sta nell'applicazione degli elettrodi, perchè non si può prolungare l'eccitamento delle correnti indotte quanto occorrerebbe, senza produrre una irritazione molesta della pelle con infiammazione e stravasi sanguigni.

I tracciati che si ottengono coll'ergrografo irritando nell'uomo i nervi ed i muscoli attraverso la pelle sono imcomparabilmente più istruttivi, come lo dimostra la seguente esperienza:

Esperienza 38ª.

Il giorno 30 luglio 1888 alle ore 8 ant. fissai nel modo consueto l'antibraccio sinistro nel sostegno dell'ergografo come per iscrivere la curva della fatica dei flessori del dito medio. Un aiuto per mezzo di una bendarella elastica mi applicò contro la parete esterna o scapolo-omerale dell'ascella, sul fascio nerveo-vascolare, uno degli elettrodi di una corrente indotta, e fermò collo stesso mezzo l'altro elettrodo sulla faccia anteriore dell'antibraccio verso la metà del decorso dei fasci muscolari flessori del dito medio. La corrente indotta proveniva da una slitta di Du Bois-Reymond nella quale il rocchetto primitivo si trovava a distanza di cm. 11,5 dal rocchetto indotto. Il circuito primitivo era animato da due elementi Bunsen. Un orologio di Baltzar chiudeva ad ogni due secondi il circuito primitivo per la durata di mezzo secondo e così la corrente per mezzo dei nervi eccitava alla contrazione tutti i muscoli dell'antibraccio e del braccio e per ciò anche i flessori del dito medio. A questo modo registrai la curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra eccitati sui loro nervi.

Dopo due ore di riposo scrissi nuovamente nello stesso modo la curva della fatica degli stessi muscoli, e così successivamente alle ore 12 merid., ottenendo due altri tracciati normali della fatica [1].

[1] Gli elettrodi erano formati da due piastrine metalliche aderenti ai serrafili, rivestite da una fine spugnetta e da uno strato di cotone idrofilo, ricoperto di pelle di guanto scamosciata. L'uno, quello applicato al cavo ascellare, aveva il diametro di 5 centim., l'altro applicato sull'antibraccio di soli 3 centim. Per evitare uno spostamento dei medesimi ne avevo segnato la posizione sulla pelle dell'arto a mezzo del nitrato d'argento. Nell'intervallo fra un'osservazione e l'altra gli elettrodi erano mantenuti in un bagno di acqua acidulata. Operando con tutte le cautele necessarie ho potuto determinare che scrivendo nelle differenti ore della giornata con periodi di riposo sufficienti (2 ore) la curva della fatica di un muscolo in condizioni normali, ne ottenevo sempre lo stesso tracciato con una quantità pressapoco eguale di lavoro meccanico: ciò, ben inteso, quando rimanessero costanti il peso e la distanza dei due circuiti nella slitta.

Dopo il 3° tracciato invece di andare a colazione rimasi digiuno e così sino alle ore 6 di sera, cioè in tutto 24 ore. Alle 2, alle 4, alle 6 pom. scrissi nuovamente la curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio; alle ore 6.5 andai a pranzo, alle 6.35 era già di ritorno in laboratorio e scrissi l'ultima curva della fatica. Dei 7 tracciati relativi a questa esperienza ommetto i due primi, perchè del tutto normali e simili al 3° fig. 81, e riproduco i rimanenti fig. 81 a 85. Questo ed il seguente tracciato sono scritti da sinistra a destra.

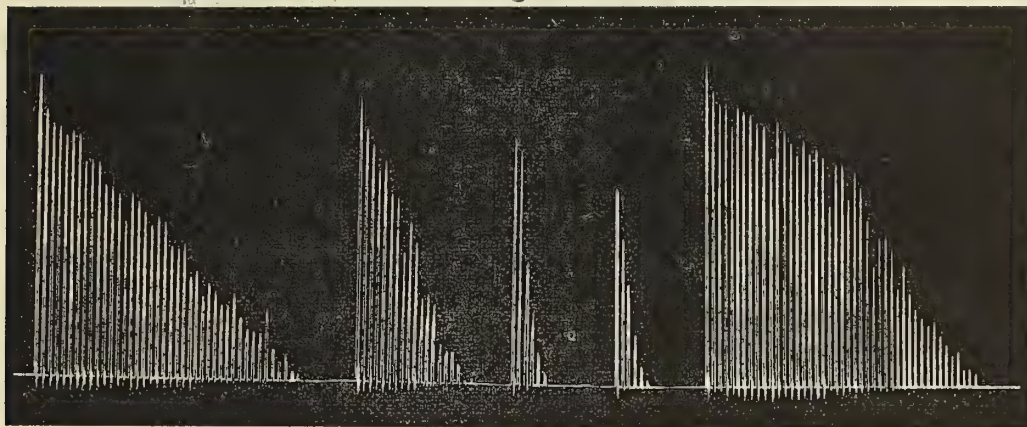



Fig. 81. Fig. 82. Fig. 83. Fig. 84. Fig. 85.

Fig. 81, tracciato 1 dell'esperienza 38. Curva normale della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra eccitati sui loro nervi. Peso gr. 1000. Ritmo 2″.
Fig. 82, 83, 84, modificazioni che presenta la curva della fatica degli stessi muscoli nel digiuno.
Fig. 85, curva della fatica immediatamente dopo il pranzo.

Nella seguente tabella riassumo i dati numerici dell'esperienza.

Tabella 19ª. — *Mano sinistra. Peso gr. 1000. Ritmo 2″.*

Tracciato N.ro	Ore	Altezza di sollevamento	Lavoro meccanico	Osservazioni
		m	m	
1	8 ant.	0,810	0,810	Normale
2	10 »	0,820	0,820	Normale
3 fig. 81	12 merid.	0,775	0,775	Normale
4 fig. 82	2 pom.	0,308	0,308	Digiuno
5 fig. 83	4 »	0,092	0,092	Digiuno
6 fig. 84	6.5 »	0,062	0,062	Digiuno
7 fig. 85	6.35 »	0,994	0,994	Dopo il cibo

Dai tracciati sovra esposti appare evidente che la debolezza che noi sentiamo nel digiuno non è dovuta esclusivamente ad una minore energia del cervello e del midollo spinale. Irritando direttamente i nervi si manifestano egualmente delle differenze profonde per un digiuno relativamente breve come quello che deriva dal non aver fatto colazione. La diminuzione del tracciato scritto alle due pom. in confronto con quello scritto a mezzogiorno è assai più grande di quanto non si sarebbe creduto. La prima contrazione come nelle curve scritte con la volontà è poco inferiore

a quella fatta in condizioni normali, ma nel muscolo si esaurisce più rapidamente l'energia. Questa diminuzione del lavoro meccanico è ancora più evidente nei tracciati scritti alle 4 ed alle 6 pom. dove neanche più la prima contrazione raggiunge l'altezza normale. Appena pranzato e dopo mezzora che incominciai a mangiare i muscoli hanno già ricuperato la loro energia. Questo prova che l'assorbimento nella digestione degli alimenti si compie con grande rapidità, e che deve bastare una porzione piccolissima delle sostanze digerite per restituire ai nervi ed ai muscoli l'energia primitiva.

Riferisco un' altra esperienza nella quale l'eccitamento colla corrente indotta si faceva sui muscoli flessori del dito medio.

Esperienza 39ª.

Il giorno 2 agosto 1888 ho ripetuto un'esperienza sul digiuno in condizioni simili alla precedente nella quale però l'eccitamento elettrico era portato direttamente sui muscoli flessori del dito medio. Gli elettrodi erano applicati sull'antibraccio, il maggiore verso l'inserzione fissa dei detti muscoli, tre centim. al di sotto della piega del gomito, il minore 5 centim. più in basso. Anche questa volta la corrente era data da due pile Bunsen; la distanza dei due rocchetti cm. 10,5, il peso di gr. 1200, il ritmo di 2″.

Ho scritto ogni 2 ore dalle 8 ant, alle 6 pom. il tracciato della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra.

Alle 6.5 andai a pranzo, alle 6.35 ritornato in laboratorio scrivevo ancora una volta la curva della fatica.

L'esperienza ha dato 7 tracciati dei quali riporto solamente i n. 1, 4, 5, 6, 7, fig. 86 a 90 omettendo i n. 2 e 3 perchè affatto simili al primo.

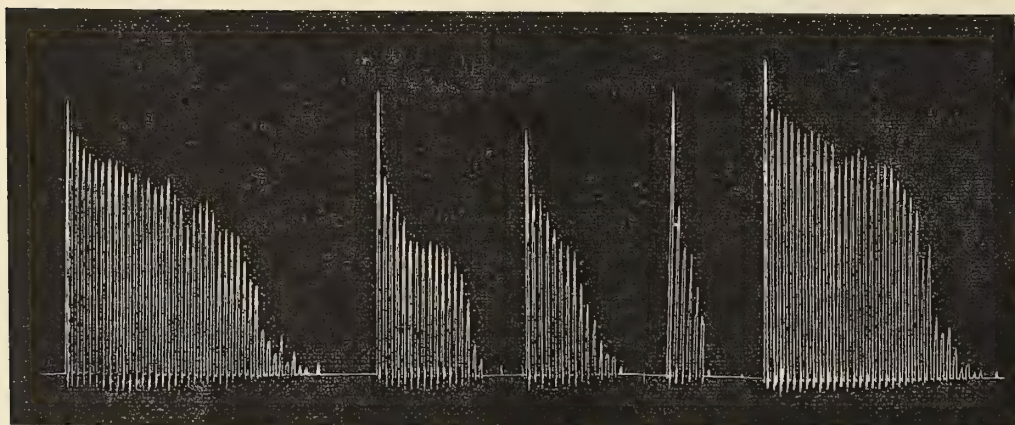



Fig. 86. Fig. 87. Fig. 88. Fig. 89. Fig. 90.

Fig. 86, tracciato 1 dell'esperienza 38ª. Curva normale della fatica dei muscoli flessori del dito medio. L'eccitamento è portato direttamente sui muscoli. Peso gr. 1200. Ritmo 2″.
Fig. 87, 88, 89, modificazioni che presenta la curva della fatica degli stessi muscoli nel digiuno.
Fig. 90, curva della fatica immediatamente dopo il pranzo.

Nella tabella seguente espongo i valori numerici di questa esperienza.

TABELLA 20ª. — *Mano sinistra. Peso gr. 1200. Ritmo 2″.*

Tracciato N.ro	Ore	Altezza di sollevamento	Lavoro meccanico	Osservazioni
1 fig.	8 ant.	m 0,748	m 0,8976	Normale
2	10 »	0,813	0,9756	Normale
3	12 merid.	0,800	0,9600	Normale
4 fig.	2 pom.	0,284	0,3408	Digiuno
5 fig.	4 »	0,204	0,2448	Digiuno
6 fig.	6.5 »	0,110	0,1320	Digiuno
7 fig.	6.35 »	0,791	0,9492	Dopo il pranzo

Anche qui per la semplice mancanza della colazione si ripetè in me alle ore 2 pom. una forte diminuzione nella resistenza del muscolo alla fatica, e tale diminuzione si fece anche più evidente alle ore 4 ed alle 6 pom., sebbene il muscolo fosse ancora capace di dare una prima contrazione normale o poco inferiore. Infine alle ore 6,35, cioè immediatamente dopo il cibo, il muscolo flessore delle dita aveva del tutto ricuperato la sua forza, ed era nuovamente capace di dare un lavoro meccanico uguale ed anche un pò superiore a quello fatto nelle prime ore del mattino.

Il metodo della eccitazione diretta dei nervi e dei muscoli ci ha permesso di separare l'azione dei centri nervosi da quella degli organi periferici cioè dei nervi e dei muscoli. L'importanza del metodo per le ricerche di psicologia sperimentale appare evidente senza che io abbia bisogno di fermarmi con speciali considerazioni. Qui si vede che la debolezza prodotta dal digiuno non è un fatto che dipenda dalla minore resistenza che hanno i nervi ed i muscoli. Non possiamo ammettere che i centri nervosi resistano indefinitivamente al digiuno, ma contrariamente a quanto si poteva aspettare noi siamo ora sicuri che i muscoli ed i nervi si esauriscono e perdono la loro forza nella denutrizione prima dei centri nervosi. Rimane ancora indeciso se ne soffrano di più le fibre dei muscoli, o le terminazioni dei nervi, ma forse questo problema è insolvibile. Quello che ci sorprende in queste esperienze è la grande rapidità con cui nel muscolo esaurito dal digiuno si ristabiliscono le condizioni normali dell'energia primitiva pochi minuti dopo l'introduzione degli alimenti nello stomaco. Questo fatto mentre ci da un idea della prontezza dell'assorbimento dei prodotti della digestione, ci mostra pure con quale facilità venga assimilata la materia degli alimenti e si ristabiliscano immediatamente le condizioni normali per il lavoro dei muscoli.

XII.

Influenza del massaggio sulla contrazione muscolare.

Abbiamo studiato nel capitolo VII l'influenza che l'anemia esercita sulla contrazione dei muscoli, cerchiamo ora di vedere quali effetti produca un aumento della circolazione. Si comprende che vi sono qui delle gravi difficoltà a superare, perchè

è assai più facile diminuire l'afflusso del sangue in un muscolo che di aumentarlo senza produrre altre complicazioni. Ad esempio nell'ultima esperienza del precedente capitolo, potrebbe darsi che l'aumento nella forza delle contrazioni che succede per effetto del cibo nel muscolo esaurito dal digiuno, dipenda anche in parte dall'attività maggiore della circolazione sanguigna, che sussegue l'introduzione degli alimenti. Il fatto che l'aumento nella forza dei muscoli si verifica così rapidamente rende tanto più attendibile questo dubbio. Per decidere tale questione ho pensato di modificare la circolazione in un muscolo indebolito dal digiuno, per mezzo del massaggio.

Esperienza 40ª.

Il giorno 1° settembre 1888 resto digiuno e cominciando alle ore 8 ant. scrivo ogni due ore la curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio delle due mani. col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″; alle 5.45′ prego il dott. Aducco ed il dott. Morpurgo di farmi durante 15′ il massaggio sulle due antibraccia, ed alle sei scrivo gli ultimi due tracciati della fatica.

Questa esperienza si compone di 12 tracciati dei quali riproduco solamente il 1° ed il 2°, il 7°, 8°, 9°, 10°, 11°, 12°, figure 91 a 98, e riproduco nella seguente tabella i dati numerici dell'esperienza.

Tabella 21ª. — *Peso 3 chilogr. Ritmo 2″.*

Tracciato N.ro	Ore	Mano sinistra		Mano destra		Osservazioni
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico	
1 fig. 91	8 ant.	m 0,669	m 2,007	—	—	Digiuno
2 » 92	»	—	—	m 0,639	m 1,917	
3	10 ant.	0,709	2,127	—	—	
4	»	—	—	0,720	2,160	
5	12 mer.	0,730	2,190	—	—	
6	»	—	—	0,750	2,250	
7 fig. 93	2 pom.	0,316	0,948	—	—	
8 » 94	»	—	—	0,253	0,753	
9 » 95	4 pom.	0,140	0,420	—	—	
10 » 96	»	—	—	0,203	0,609	15′ massaggio
11 » 97	6 pom.	0,455	1,365	—	—	
12 » 98	»	—	—	0,610	1,830	

Dall'esame di queste figure e della precedente tabella appare che lo stato di indebolimento del muscolo consecutivo al digiuno diminuisce molto, o scompare quasi del tutto dopo il massaggio praticato per 15 minuti.

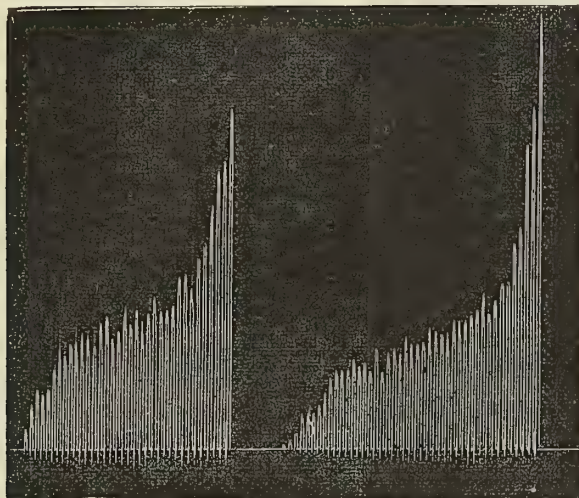



Fig. 92. Fig. 91.

Fig. 91 e 92. Tracciati 1 e 2 dell'esperienza 40. Curve normali della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra e di destra, col peso di 3 chilogr. ed il ritmo di 2''.

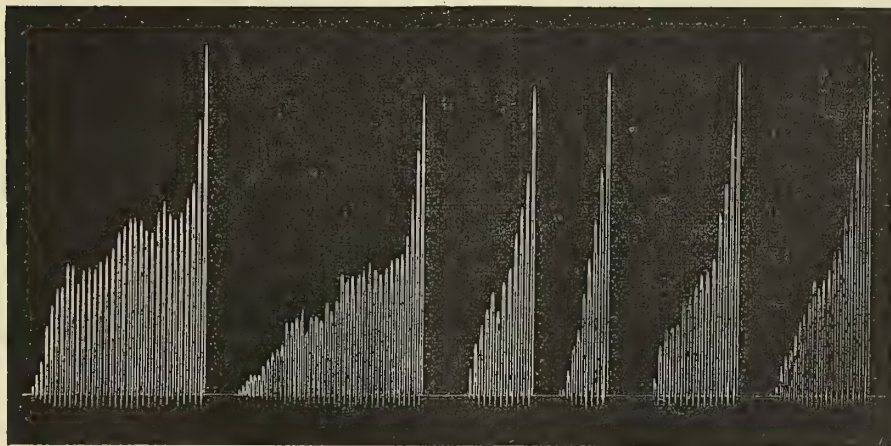



Fig. 98. Fig. 97. Fig. 96. Fig. 95. Fig. 94. Fig. 93.

Fig. 93 a 96. Tracciati 7 a 10 dell'esperienza 40. Modificazioni presentate dalla curva della fatica dei detti muscoli del digiuno.
Fig. 97 e 98. Tracciati 11 e 12 dell'esperienza 40. Influenza del massaggio sui muscoli indeboliti dal digiuno.

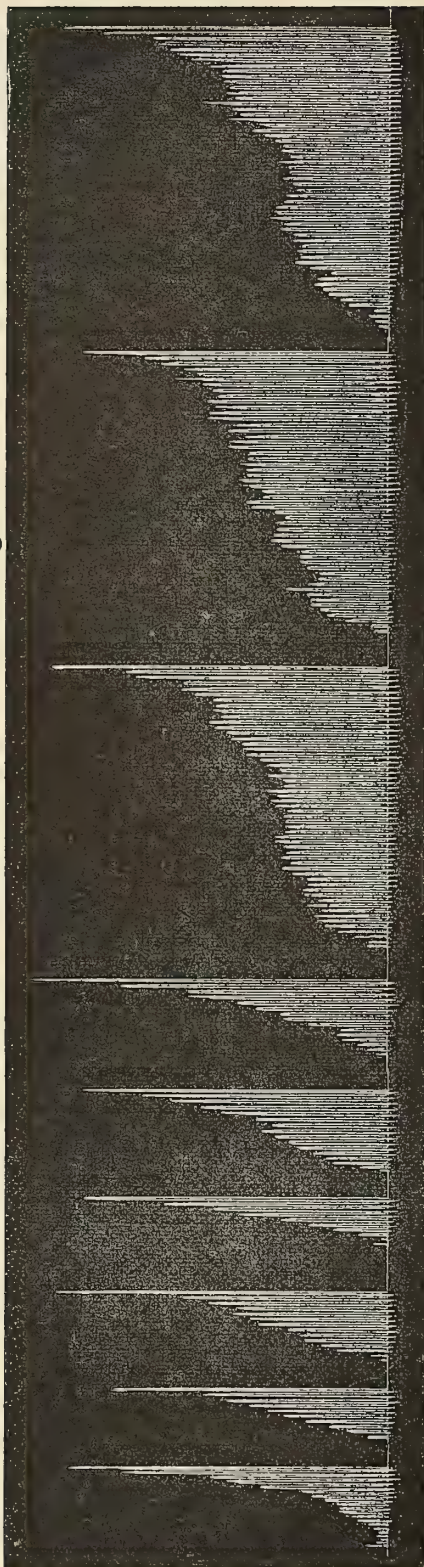



Fig. 107. Fig. 106. Fig. 105. Fig. 104. Fig. 103. Fig. 102. Fig. 101. Fig. 100. Fig. 99.

Le fig. 99 a 107 corrispondenti ai tracciati 2 a 10 del 1° giorno dell'esperienza 40ª rappresentano le curve della fatica dei muscoli flessori del dito medio di destra e di sinistra col peso di 3 chilogr., ritmo = 2″ e *periodi di riposo di 15′*. Dopo tre tracciati normali della fatica si vedono le modificazioni che il corso della stanchezza subisce per effetto di insufficiente periodo di riposo.

I muscoli flessori del medio che alle ore 4 pom. non diedero più che un lavoro meccanico di $0^m,609$ per la mano destra e di $0^m,420$ per la sinistra, in luogo di presentare agli ultimi due tracciati, scritti alle ore sei, un ulteriore diminuzione dell'effetto utile prodotto, diedero un lavoro di $1^m,830$ per la mano destra e $1^m,365$ per la mano sinistra. Ciò vuol dire che nel muscolo indebolito dal digiuno, perchè non ha ricevuto la quantità sufficiente di materiali utili per la contrazione, si può pel semplice fatto dell'attivata circolazione migliorare notevolmente le condizioni di resistenza al lavoro.

Per studiare meglio l'azione fisiologica del massaggio nella fatica ho fatto una serie di esperienze delle quali riporto qui la seguente: (1)

Esperienza 41ª.

Il giorno 3 settembre 1888 alle ore 8 antim. scrivo la curva della fatica nei muscoli flessori del dito medio delle due mani col peso di 3 chilogr. e la frequenza di contrazione di 2″; dopo un periodo di riposo di 15′ scrivo nuovamente la curva della fatica degli stessi muscoli nelle medesime condizioni di peso e di ritmo, e così successivamente per altre tre volte, intercalando periodi di riposo di 15 minuti.

Ottengo per tal modo 10 tracciati, dei quali per brevità ommetto il primo affatto simile al secondo; fig. 99 a 107.

Il giorno successivo alle 8 ant. registro ancora la curva della fatica dei muscoli flessori del dito medio di sinistra e di destra.

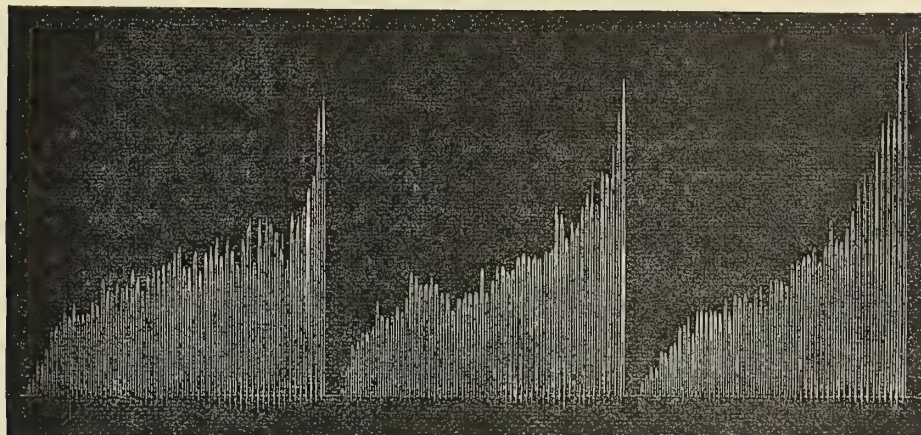
Appena terminato, il dott. Aducco ed il sig. Colla mi fanno un energico massaggio lungo tutto l'antibraccio durante 15′ e quindi scrivo nuovamente il tracciato della fatica

(1) Publicherò quanto prima le rimanenti esperienze in una Memoria a parte sull'azione fisiologica del massaggio.

degli stessi muscoli; subito dopo altro massaggio pel periodo di 15′, e quindi altra curva e così di seguito per 9 volte, alternando le curve della fatica con periodi di 15′ di massaggio.

Succede un periodo di riposo di due ore e dopo scrivo per l'ultima volta il tracciato della fatica nei detti muscoli.

Questa 2ª parte dell'esperienza consta di 22 tracciati dei quali riproduco solamente i n. 11, 12, 13, fig. 108, 109, 110 ed i n. 17, 18, 19, 20, 22, fig. 111, 112, 113, 114, 115, tralasciando i n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, I5, 16, 21, perchè affatto simili fra di loro ed alle figure 108, 109, 110.

Nella tavola 21ª riporto i dati numerici dell'esperienza esprimenti la quantità di lavoro meccanico ottenuto ciascuna volta.

Fig, 110. Fig. 109. Fig. 108.

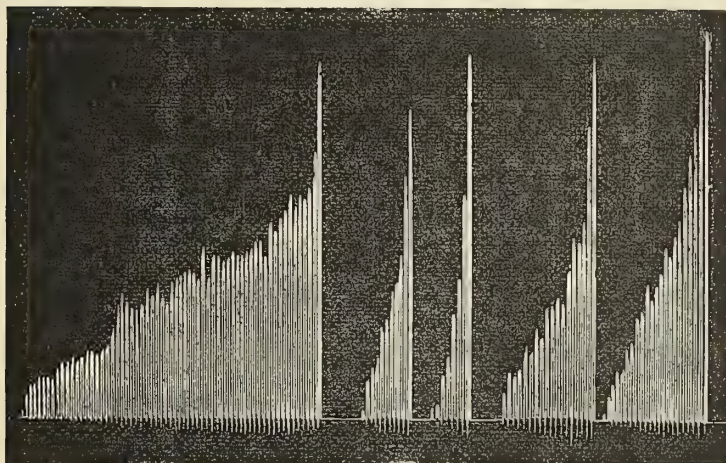



Fig. 115. Fig. 114. Fig. 113. Fig. 112. Fig. 111.

Le fig. 108, 109, 110, corrispondenti ai tracciati 11, 12, 13 del 2° giorno dell'esperienza 41ª, rappresentano le curve della fatica nei muscoli flessori del dito medio di sinistra e di destra col peso di 3 chilogr., ritmo 2″, ed intercalando *periodi di 15′ di massaggio;* paragonando queste figure con quelle del giornc precedente fig. 105, 106, 107 si vede quanto ne differiscano.

Le fig. 111, 112, 113, 114, corrispondenti ai tracciati 17, 18, 19, 20 del 2° giorno dell'esperienza 41ª, mostrano come l'azione ristoratrice del massaggio sia cessata.

La fig. 115 corrispondente al tracciato 22 del 2° giorno dell'esperienza 41ª mostra come dopo due ore di riposo i muscoli siano ritornati in condizioni normali.

Tabella 22ª. — *Peso 3 chilogr. Frequenza della contrazione 2″.*

Tracciato N.ro	Ore	Mano sinistra		Mano destra	
		altezza di sollevamento	lavoro meccanico	altezza di sollevamento	lavoro meccanico
1° giorno — *Periodi di 15′ di riposo*					
1	8 ant.	0,895	2,685	—	—
2 fig. 99	»	—	—	0,883	2,649
3 » 100	8.17 »	0,884	2,652	—	—
4 » 101	»	—	—	0,835	2,505
5 » 102	8.34 »	0,240	0,720	—	—
6 » 103	»	—	—	0,262	0,789
7 » 104	8.51 »	0,151	0,453	—	—
8 » 105	»	—	—	0,218	0,654
9 » 106	9.8 »	0,152	0,456	—	—
10 » 107	»	—	—	0,205	0,615
2° giorno — *Periodi di 15′ di massaggio*					
1	8 ant.	0,830	2,490	—	—
2	»	—	—	0,820	2,460
3	8.17 »	0,850	2,550	—	—
4	»	—	—	0,925	2,775
5	8.34 »	0,897	2,691	—	—
6	»	—	—	0,970	2,910
7	8.51 »	0,900	2,700	—	—
8	»	—	—	0,901	2,703
9	9.8 »	0,812	2,436	—	—
10	»	—	—	0,936	2,808
11 fig. 108	9.25 »	0,862	2,586	—	—
12 » 109	»	—	—	0,947	2,841
13 » 110	9.42 »	0,984	2,952	—	—
14	»	—	—	0,980	2,940
15	9.59 »	0,840	2,520	—	—
16	»	—	—	0,760	2,280
17 fig. 111	10.16 »	0,438	1,314	—	—
18 » 112	»	—	—	0,299	0,897
19 » 113	10.33 »	0,136	0,408	—	—
20 » 114	»	—	—	0,174	0,522
21	12.33 mer.	0,945	2,835	—	—
22 fig. 115	»	—	—	0,994	2,882

Dunque quando il muscolo lavora con periodi di riposo di 15′ va rapidamente perdendo della sua resistenza al lavoro; dopo scritto due tracciati normali, per quanto rimanga ancora capace di dare nelle curve successive una prima contrazione simile o poco inferiore alla norma, tosto si mostra esaurito.

I flessori del dito medio di sinistra, i quali in condizioni normali erano capaci di dare col peso di 3 chilog. ed il ritmo di 2″ un lavoro meccanico di circa 2^m, 685, la terza volta che scrivevano la loro curva della fatica dopo un periodo di riposo di 15′, non davano più che un effetto utile di 0^m 720, e la quinta volta di 0^m 456.

Per contro quando nel 2° giorno di esperienza si sostituì ai periodi di riposo di 15′ il massaggio per altrettanto tempo, le curve della fatica dei muscoli flessori del medio si mantennero per ben 8 volte normali, sia per l'altezza della prima contrazione, sia per la forma della curva, sia per la quantità di lavoro meccanico prodotto.

Le figure 108, 109, 110, che riproducono i tracciati della fatica dei muscoli flessori del medio di destra e di sinistra, dopochè questi avevano già lavorato 5 e 6 volte sotto l'azione del massaggio, rappresentano rispettivamente un lavoro di 2^m, 586, 2^m, 841, 2^m, 952 cioè uguale o un poco superiore a quello che dànno i detti muscoli in condizioni del tutto normali e completamente riposati.

Se noi sommiamo insieme l'effetto utile dato dai flessori del dito medio ciascuna volta, prima che nella loro curva appaja la diminuzione di resistenza dovuta all'accumularsi della stanchezza per insufficienti periodi di riposo, troviamo:

1° giorno — Periodi di riposo di 15′.

Curve normali della fatica dei muscoli flessori del dito medio.

Mano sinistra. Curve n. 2.	1ª	= Lavoro meccanico di	2^m,685
	2ª	= » » »	2^m,652
		Totale	5^m,337
Mano destra. Curve n. 2.	1ª	= Lavoro meccanico di	2^m,649
	2ª	= » » »	2^m,505
		Totale	4^m,154

2° giorno — Periodi di 15′ di massaggio.

Mano sinistra. Curve n. 8.	1ª	= Lavoro meccanico di	2^m,490
	2ª	= » » »	2^m,550
	3ª	= » » »	2^m,691
	4ª	= » » »	2^m,700
	5ª	= » » »	2^m,436
	6ª	= » » »	2^m,586
	7ª	= » » »	2^m,952
	8ª	= » » »	2^m,520
		Totale m.	20,925

Mano destra. Curve n. 8.	1ª =	Lavoro	meccanico	di	$2^{m},460$
	2ª =	"	"	"	$2^{m},775$
	3ª =	"	"	"	$2^{m},910$
	4ª =	"	"	"	$2^{m},703$
	5ª =	"	"	"	$2^{m},808$
	6ª =	"	"	"	$2^{m},841$
	7ª =	"	"	"	$2^{m},940$
	8ª =	"	"	"	$2^{m},280$
				Totale	$21^{m},717$

Si ha cioè pel muscolo che lavora con periodi di 15′ di massaggio un *effetto utile quadruplo* di quello dato dal muscolo al quale si concedono periodi equivalenti di riposo.

Dopo l'ottava curva della fatica ai tracciati 17, 18, 19, 20 di questa esperienza non ostante continui il massaggio per periodi di 15′, vediamo che la stanchezza si è già accumulata nei muscoli; essi sono ancora capaci di dare nei tracciati una prima contrazione normale o quasi normale, ma rapidamente le contrazioni vanno abbassandosi sino a cessare completamente e il lavoro meccanico si riduce prima a metà e poi ad $\frac{1}{5}$ del normale. Ciò significa che l'effetto utile del massaggio non si protrae al di là di un certo limite, passato il quale la stanchezza si accumula nel muscolo e si richiede poscia un tempo di riposo di 2 ore, perchè il muscolo ritorni in condizioni normali (fig. 115).

Questa esperienza ci dimostra che il massaggio può impedire l'accumularsi della fatica nel muscolo che proviene dall'eseguire lavori troppo avvicinati fra di loro, e permette così di ottenere da esso un lavoro meccanico notevolmente maggiore che non con equivalenti periodi di riposo.

Quando i lavori che fa il muscolo si succedono immediatamente dopo ciascun periodo di 15′ di massaggio, l'azione ristoratrice di questo cessa dopo circa due ore.

E dopo tale tempo, perchè il muscolo possa ritornare in condizioni normali, non è necessario di concedergli un periodo di riposo più lungo di quanto in condizioni ordinarie si richieda dal muscolo stesso per dare in tutto il giorno un tracciato normale della fatica.

Ripetei altre volte questa esperienza servendomi di altri pesi ed ottenni un risultato analogo.

Queste esperienze hanno confermato ciò che venne pubblicato nel 1883 da Zabludowski [1]. Le ricerche eseguite nel laboratorio del prof. Ugo Kronecher erano fatte in altro modo delle mie: si stancava colla frequenza di 1″ i muscoli flessori dell'antibraccio sul braccio, flettendo un grande numero di volte quello su questo, in modo di giungere colla mano sino alla spalla e tenendo in mano un peso di 2 chilogr.; poscia si praticava durante 5′ un buon massaggio sull'arto, e così si vedeva che i muscoli ritornavano in condizioni normali, ed erano nuovamente capaci di eseguire un altro lavoro equivalente o superiore al primo.

[1] *Ueber die physiologische Bedeutung d. Massage.* Centralb. f. d. med. Wiss. N. 14 p. 242.

Dalle osservazioni di Zabludowski e dalle esperienze precedenti fatte col massaggio, viene dimostrato quanto sia grande l' influenza della circolazione sul muscolo. Se prima potevamo credere che la fatica sia in grande parte dovuta al consumo della sostanza propria del muscolo ed all'accumularsi in esso di prodotti di regressione, ora dobbiamo riconoscere che un movimento più attivo del sangue e della linfa, insieme coi mutamenti che succedono nel ricambio materiale per effetto del massaggio, basta ad aumentare l'attività del muscolo. In questo caso non abbiamo bisogno di ammettere che il massaggio operi favorevolmente in quanto che esso allontana dal muscolo i prodotti nocivi dovuti alla contrazione, perchè noi vediamo che l'energia del muscolo aumenta anche se il muscolo non venne prima affaticato. Però l'azione del massaggio non è durevole ed abbiamo veduto che malgrado esso si esaurisce la forza del muscolo, come se la circolazione ed il ricambio più attivo non bastassero per supplire all'esaurimento che produce il lavoro della contrazione.

È questo un altro esempio che insieme alle osservazioni contenute nei capitoli precedenti mostra le difficoltà grandi che si incontrano nell'analisi del lavoro muscolare e della stanchezza. Si tratta di fenomeni complessi dove cause diverse agiscono contemporaneamente e producono il medesimo effetto od effetti opposti. I meccanismi che entrano in azione sono così strettamente congiunti e fusi insieme che non riesce possibile coi mezzi attuali delle indagini di farli agire separatamente per conoscere quale sia la funzione di ciascuno e quali le leggi che regolano i varî fattori da cui risulta la contrazione e l'esaurimento dell'energia muscolare.

Sono grato al prof. Angelo Mosso per i consigli e l'aiuto che volle darmi nell'esecuzione di questo lavoro.

RELAZIONE

letta dal Socio A. Mosso, relatore, a nome anche del Socio C. Golgi, nella seduta del 4 novembre 1888 sopra la Memoria del dott. Valentino Grandis, intitolata: *Influenza del lavoro muscolare, del digiuno e della temperatura sulla produzione di acido carbonico e sulla diminuzione di peso dell'organismo.*

« Il dott. V. Grandis si servì di un apparecchio col quale si può determinare esattamente la quantità di acido carbonico che elimina un cane mentre corre o sta in riposo. Le ricerche del dott. Grandis dimostrano quanto sia maggiore il consumo dell'organismo, quando un cane eseguisce il medesimo lavoro muscolare essendo digiuno, e come il consumo dell'organismo cresca sempre più pel medesimo lavoro a misura che si prolunga l'inanizione.

« I risultati di questo lavoro sono interessanti perchè su questo punto si avevano fino ad ora dei dati poco esatti.

« Egualmente pregievoli sono le ricerche che fece il dott. Grandis sull'influenza che la temperatura esercita sull'organismo quando i medesimi animali vengono sottoposti al digiuno a basse temperature, od a temperature elevate. Il raffronto della perdita di peso che subisce l'organismo a differenti temperature quando la nutrizione è insufficiente è rappresentato con delle tavole grafiche istruttive.

La Commissione propone che la Memoria del dott. V. Grandis venga inserita negli Atti dell'Accademia colla figura dell'apparecchio, e i tracciati che essa contiene ».

Influenza del lavoro muscolare, del digiuno e della temperatura sulla produzione di acido carbonico e sulla diminuzione di peso dell'organismo.

Memoria del dott. VALENTINO GRANDIS.

Influenza del lavoro muscolare e del digiuno sopra la produzione di acido carbonico.

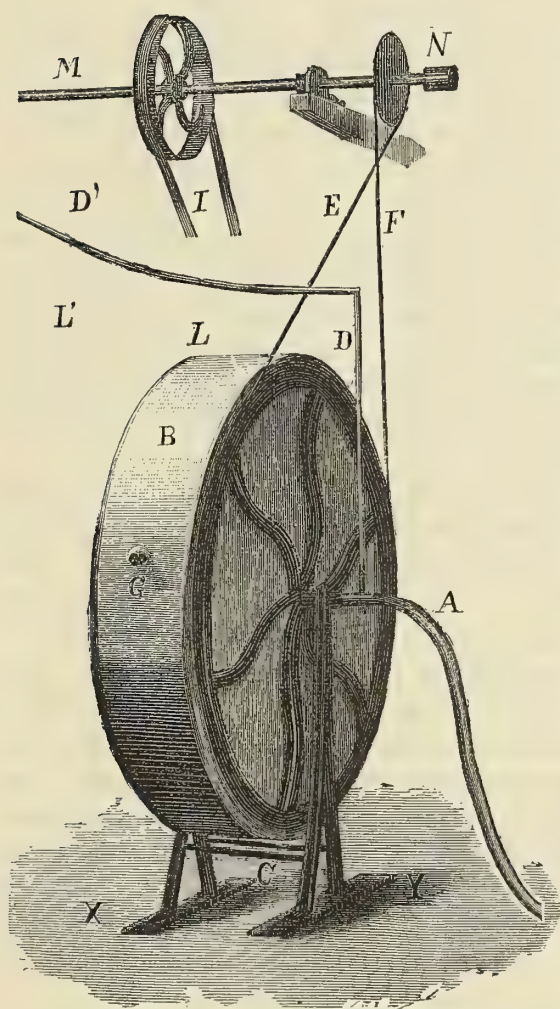



Fig. 1. — Grande cassa metallica, girevole sull'asse per studiare l'acido carbonico eliminato durante la corsa di un cane. Grandezza 1/26.

Ho determinato quale fosse la quantità di acido carbonico emessa da quattro cani, mentre percorrevano in tre ore la distanza di 17 Km., e l'ho paragonata colla quantità di acido carbonico emessa, mentre stavano per lo stesso numero di ore in riposo. Ottenuti questi valori, in un secondo periodo delle esperienze feci digiunare gli stessi cani, ed ho ripetuto le determinazioni nel digiuno, mentre percorrevano le medesime distanze oppure stavano in riposo. Perchè l'astinenza fosse completa non somministravo neppure dell'acqua agli animali durante questo secondo periodo di ricerche.

La determinazione dell'acido carbonico venne fatta coll'apparecchio di Voit e Pettenkofer (1), e per raccogliere l'acido carbonico emesso dai cani durante la corsa mi servii d'un apparecchio costrutto dal prof. A. Mosso. Esso consiste in una cassa cilindrica di zinco B C (fig. 1) che ha la forma di una ruota del raggio di m. 0,80, ed è larga 0,34. I fianchi di questa cassa sono sostenuti da due ruote di

(1) Voit, Zeitschrift für Biologie Bd. XI, pag. 532.

ferro fuso a sei raggi. Una di queste ruote come si vede nella figura ha sulla periferia una scanalatura nella quale passa una corda E F che serve ad imprimerle il movimento di rotazione. Un motore a gas Langen e Wolf fa girare un asse orizzontale M N, il quale per mezzo di una puleggia a scanalature digradanti imprime la velocità che si desidera alla ruota A B C.

L'asse di questa ruota è fatto con un tubo di ferro del diametro interno di m. 0,035, ed è fisso sopra un sostegno di ferro fuso X Y. Il tubo di ferro il quale forma l'asse della ruota è chiuso dall'estremità che non si vede nella figura 1, e dal lato che si vede imbocca un grosso tubo di piombo A il quale sta in comunicazione col grande contatore; questo aspira l'aria dalla ruota A B C che qui rappresenta la camera dell'apparechio di Pettenkofer. Un'apertura longitudinale del tubo nella parte interna della ruota serve a dare passaggio all'aria che dalla ruota va nel grande contatore per essere misurata. La porzione dell'aria della quale deve farsi l'analisi viene presa per mezzo il tubo D D′.

Nel Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Torino vi è un grande apparecchio di Pettenkofer e Voit; chi conosce quest'apparechio, comprenderà facilmente come si possa per mezzo della cassa a ruota rappresentata dalla fig. 1 determinare la quantità dell'acido carbonico e dell'acqua che un cane elimina durante la corsa, e fare quindi un raffronto tra lo stato normale e il lavoro compiuto nel digiuno. Vi sono dei cani che messi dentro a questa ruota la fanno girare da se medesimi: e questo serve nel principio per addestrarli: ma una volta che sono abituati a tale esercizio è conveniente di regolare noi stessi la velocità di rotazione per avere delle quantità di lavoro esattamente paragonabili. Si comprende che quando per mezzo della corda E F si fa girare la ruota nel senso B C A il cane dovrà correre nel senso A C B per tenersi in equilibrio, e non lasciarsi trascinare indietro. Conoscendo la circonferenza della ruota ed il numero dei giri che fa in un minuto si calcola facilmente la distanza percorsa dall'animale.

L'apertura G serve all'ingresso dell'aria nella ruota; ma questa non è la sola comunicazione che vi sia coll'aria ambiente; per introdurre il cane nella ruota vi è uno sportello che si apre scorrendo in due scanalature. Questa parte che si trova nel fianco opposto della figura non chiude ermeticamente. In questo fianco della ruota vi sono due finestre di vetro chiuse ermeticamente che ne illuminano l'interno.

La ruota A B C si trova in una grande sala del Laboratorio di fisiologia dove è impiantato l'apparecchio delle pompe di Pettenkofer e Voit per l'analisi dell'aria. Il motore a gas Langen e Wolf trovasi in una stanza del piano inferiore. Un tubo di vetro che non è rappresentato nella figura, ma che si trova nella posizione delle lettere L L′ parte dalle pompe e viene a prendere l'aria della stanza in vicinanza della ruota, l'altro tubo D D′ la prende dal tubo A dopo che servì alla respirazione del cane.

Il grande contatore che misura la quantità dell'aria passata nella ruota è messo in azione dal motore a gas ed è disposto in modo, che accoppiando variamente le ruote dentate di trasmissione, si può ottenere la velocità d'aspirazione più conveniente. Nel caso speciale la velocità venne graduata in modo che attraverso la ruota passassero in media 7 metri cubi d'aria in un'ora.

L'apparecchio di Pettenkofer fu disposto in modo, che delle due pompe le quali in un dato momento aspirano, o cacciano l'aria attraverso i tubi contenenti la barite, una conteneva sempre l'aria passata attraverso alla ruota e l'altra l'aria ambiente.

I contatori furono accuratamente graduati prima d'incominciare le esperienze; e li controllai frequentemente, servendomi del metodo semplicissimo di far passare attraverso ad essi un volume noto di aria spostando un determinato peso d'acqua a temperatura nota.

La determinazione della quantità di barite saturata dall'acido carbonico che la attraversò veniva ripetuta almeno due volte. Per farla mi servivo del metodo volumetrico adoperando una soluzione titolata di acido ossalico, di cui un centimetro cubico equivaleva ad un milligramma di acido carbonico. Come indice per conoscere quando tutta la barite era neutralizzata non mi servii dell'acido rosolico, ma della tintura di curcuma. Preferii quest'ultima, perchè ha la proprietà d'impartire un colore tanto più intenso al liquido, in cui si trova, quanto più esso si avvicina ad avere reazione neutra; e perciò mette in sull'avviso chi fa la determinazione, che sta per arrivare il punto voluto; di modo che con minor dispendio di tempo si ha maggior precisione.

Così essendo disposte le cose, prima d'incominciare le esperienze sopra gli animali, ho fatte varie esperienze di controllo per conoscere quale grado di esattezza si poteva raggiungere con quest'apparecchio, e per esercitarmi nelle delicate manipolazioni e determinazioni. A questo scopo mi servii dell'oleina pura, che facevo bruciare in quantità determinata nella cassa mentre l'apparecchio funzionava. Paragonando la quantità di acido carbonico ottenuta con quella che avrei dovuto ottenere secondo la formola di composizione dell'oleina, potei vedere quale fosse l'errore che si commette in queste determinazioni. La quantità di CO_2 prodotta dall'oleina bruciando fu calcolata secondo la formola della trioleina data dal Beilstein (1). Questo stesso metodo fu seguito da Voit (2) nelle esperienze di controllo istituite per dimostrare l'esattezza dei risultati, che si possono ottenere coll'apparecchio di Pettenkofer ridotto per gli animali piccoli.

Riferisco due di queste esperienze per indicare i limiti dell'approssimazione da me ottenuta:

Esperienza A. — 12 aprile 1886. — Temperatura 12° C.

In 5 ore furono bruciati 12,1215 gr. di oleina equivalenti a 34,3429 gr. di CO_2.

Attraverso la ruota passarono . . . . 30,900 m.c. d'aria.

I contatori dell'aria esaminata proveniente dalla ruota segnano	A (3) 962	divisioni	= 24828	centimetri cubici
	B 1069	»	= 27024	» »
I contatori dell'aria esaminata proveniente dall'ambiente segnano	C 1036	»	= 25299	» »
	D 1026	»	= 24630	» »

(1) Beilstein, *Handbuch der Chemie.* I, pag. 488.

(2) Voit, loco cit. pag. 576.

(3) Le lettere A e B si riferiscono ai due sistemi di tubi di Pettenkofer e relativi contatori nei quali viene misurata ed esaminata l'aria proveniente dalla ruota. Le lettere C e D si riferiscono ai sistemi corrispondenti attraverso ai quali passa l'aria ambiente.

I tubi A e B contengono 325 c.c. di soluzione di Ba$(OH)_2$ al 21 $^0/_{00}$, di cui 20 cc. richiedono 60,1 cc. di soluzione normale di acido ossalico per essere neutralizzati.

Dopo l'esperienza 20 c.c. della soluzione del tubo A richiedono solo più 57,5 c.c. di acido ossalico; 20 c.c. della soluzione del tubo B richiedono 57,3 c.c. della stessa soluzione di acido ossalico.

I tubi C e D contengono 325 c.c. di una soluzione di Ba$(OH)_2$ al 7 $^0/_{00}$, di cui 20 c.c. richiedono per essere neutralizzati 17,7 c.c. della soluzione di acido ossalico.

Dopo l'esperienza 20 c.c. di soluzione del tubo C richiedono solo 16,8 c.c. di acido ossalico 20 c.c. di soluzione del tubo D 16,9 c.c. della soluzione di acido ossalico (1).

Secondo	A	si ha	1,70	gr.	di CO_2	per 1000 l.	cioè in tutto	52,53	gr. di CO_2
»	B	»	1,68	»	»	»	»	51,912	» »
»	C	»	0,57	»	»	»	»	17,613	» »
»	D	»	0,52	»	»	»	»	16,068	» »

In media l'aria dell'apparecchio conteneva 52,221 gr. di CO_2
» l'aria ambiente » 16,840 » »

Differenza . . . . 35,381 » »

Cioè ottenni 1,039 gr. di più di quello che avrei dovuto trovare.

Esperienza B. — 13 aprile 1886. — Temperatura 12,8.

In 5 ore e 45 minuti furono bruciati 13,6985 gr. di oleina = 38,8612 gr. di CO_2.

Attraverso la ruota passarono 41,500 m.c. d'aria.

I contatori per l'aria dell'apparecchio segnano { A 1317 divisioni = 36004 c.c.; B 1288 » = 32560 c.c. }

I contatori per l'aria dell'ambiente segnano { C 1410 » = 34432 c.c.; D 1290 » = 30967 c.c. }

I tubi A e B contengono 325 c.c. di soluzione di Ba$(OH)_2$ al 21 $^0/_{00}$, di cui 20 c.c. richiedono per essere neutralizzati 53,1 cc. di acido ossalico (soluzione normale).

Dopo l'esperienza 20 c.c. della soluzione del tubo A richiedono solo più 49,9 c.c. della soluzione di acido ossalico; 20 c.c. della soluzione del tubo B richiedono 50 c.c. di acido ossalico.

I tubi C e D contengono 325 c.c. di soluzione di Ba$(OH)_2$ al 7 $^0/_{00}$, di cui 20 c.c. richiedono 17,4 c.c. della soluzione di acido ossalico.

Dopo l'esperienza 20 c.c. della soluzione di C richiedono solo 16,2 c.c. di acido ossalico, e 20 c.c. del tubo D richiedono solo 16,3 della stessa soluzione di acido ossalico.

Secondo	A	si ha	1,529	gr.	di CO_2	per 1000 l.	cioè in tutto	61,9285	gr. di CO_2
»	B	»	1,5471	»	»	»	»	62,6575	» »
»	C	»	0,5663	»	»	»	»	22,9351	» »
»	D	»	0,5772	»	»	»	»	23,3766	» »

In media l'aria dell'apparecchio conteneva 62,2930 gr. di CO_2
» l'aria ambiente » 23,1558 » »

Differenza . . . . 39,1372 » »

Si trovò perciò 0,276 gr. più di quello, che si sarebbe dovuto trovare, cioè si commise un errore di 0,7 %.

Ho voluto riferire uno dei casi in cui l'errore fu massimo per dare un'idea dell' attendibilità dei risultati ottenuti; però in numerose altre prove gli errori commessi

(1) Nei tubi di sicurezza non si potè mai riscontrare traccia di riduzione della barite per parte dell'acido carbonico, quantunque si siano fatte numerosissime prove. Perciò tralascio di riportare i numeri che da esse furono ricavati. Credo che questo fatto si debba attribuire alla lentezza con cui si faceva gorgogliare l'aria attraverso alla barite ed alla breve durata delle singole esperienze.

oscillano tra — 1,3 % e + 0,79 %; cioè stanno nei limiti della massima approssimazione, che si può raggiungere coll'apparecchio di Pettenkofer.

Dalle esperienze di controllo sopracitate si vede, che ho trascurato la riduzione dei volumi dell'aria esaminata alla stessa temperatura. Ciò feci perchè mi servii del piccolo modello dell'apparecchio di Pettenkofer, nel quale, secondo Voit [1], queste riduzioni non sono necessarie, perchè gli errori sono trascurabili. Si aggiunga, che le mie esperienze duravano solo poche ore, e che tutto l'apparecchio è situato in camere egualmente difese dalle variazioni di temperatura, per cui la differenza tra la temperatura dell'aria passata attraverso al grande contatore e quella dell'aria passata per i piccoli era trascurabile, non raggiungendo mai un grado. Ne deriva che l'errore, di cui poteva essere origine questo fatto, era insignificante rispetto agli errori, che si commettono, anche dall' individuo più abile, nella determinazione volumetrica dell'alcalinità della barite. La più bella prova di ciò si ha nei buoni risultati ottenuti dalle esperienze di controllo.

Credo inutile aggiungere, che presi tutte le altre precauzioni consigliate da Voit [2] per avere i risultati più attendibili. L'errore dovuto all'aria rimasta nella ruota fu eliminato facendo funzionare l'apparecchio per mezz'ora dopo toltone l'animale.

Sopra due animali feci due serie d'osservazioni e sopra gli altri due ne feci soltanto una.

1°. *Cane da caccia magro, che da nove mesi trovasi in laboratorio, è un animale apatico, ma buon corridore.*

PRIMA SERIE DI OSSERVAZIONI

A. — 20 aprile 1886. — L'animale è in stato di nutrizione normale. La temperatura ambiente è 12°,5 C. Corre per 3 ore percorrendo 5,953 km. all'ora. Pesa 10,055 kg. [3]

Aria passata attraverso alla ruota metri cubi . .	22	114
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota grammi.	5	7498
CO_2 per m.c. d'aria che entra nella ruota grammi	1	3050
Differenza per m.c..	4	4448
CO_2 in tutta l'aria passata grammi.	128	1512
CO_2 portato dall'aria grammi.	28	8605
Differenza totale grammi. , ...	99	2907

Da questa esperienza risulta che il cane eliminò 33,0969 grammi di CO_2 ogni ora cioè 0,32 gr. per 100 gr. di peso.

(1) Voit, loco citato, pag. 572.

(2) Voit, loco citato, pag. 572.

(3) Siccome gli animali correndo emettevano l'orina e le feci, le quali venivano lanciate in tutte le direzioni dal movimento centifrugo della ruota non posso trarre alcuna conclusione dalla perdita di peso subita durante l'esperienza. Perciò tralascio addirittura di riferire il risultato della pesata eseguita al fine di ciascuna esperienza.

a. — L'animale viene tenuto in riposo per 3 ore nella ruota subito dopo terminata l'esperienza precedente, pesa 9,700 kg.,

Per la ruota passarono m.c. d'aria	19	443
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota grammi.	1	9905
CO_2 per m.c. d'aria che entra nella ruota grammi	1	3131
Differenza per m.c. grammi	0	6774
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	38	7025
CO_2 portato dall'aria gr.	25	532
Differenza totale grammi	13	1705

Il cane stando in riposo eliminò 4,3901 gr. di CO_2 ogni ora cioè 0,04 % del proprio peso. Si fa digiunare l'animale cominciando dal giorno 21 aprile.

B. — 24 aprile 1886, quarto giorno di digiuno, corre per 3 ore percorrendo 5,953 km. ogni ora. La temperatura ambiente è 12° C. Pesa 8,730 kgr.,

Aria passata attraverso la ruota m.c.	22	018
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota gr. . .	2	9223
CO_2 per m.c. d'aria che entra nella ruota gr. . .	0	6483
Differenza per m.c. grammi	2	2740
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	64	344
CO_2 portato dall'aria gr.	14	2747
Differenza totale grammi	50	0693

L'animale correndo ha eliminato ogni ora 16,8564 gr. di acido carbonico corrispondenti a 0,19 gr. % del proprio peso.

b. — Dopo quest'esperienza viene pesato e rimesso immediatamente nell'apparecchio dove stà per 3 ore in riposo. Pesa 8,650 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	20	915
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota gr. . ,	2	2300
CO_2 per m.c. d'aria che penetra nella ruota gr. ,	0	8955
Differenza per m.c. gr. . . . . ,	1	3345
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	46	641
CO_2 portato dall'aria gr.	18	720
Differenza totale gr. . . . . , . .	27	921

Riposando l'animale eliminò 9,307 gr. di CO_2 ogni ora pari a gr. 0,10 % del proprio peso.

C. — 26 aprile 1886. — 6° giorno di digiuno. Corre per 2 ore percorrendo 5,953 km. ogni ora. La temperatura ambiente è 16° C. Pesa 8,200 kg.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	14	310
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota gr. . .	3	6894
CO_2 per m.c. d'aria che vi entra gr.	0	4099
Differenza per m.c. gr.	3	2795
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	52	7955
CO_2 portato dall'aria gr.	5	8660
Differenza totale gr.	46	9295

Il cane eliminò correndo nel 6° giorno di digiuno 23,464 gr. di CO_2 ogni ora cioè 0,28 % del proprio peso.

c. — Dopo la corsa vien tenuto per 3 ore in riposo nella ruota. Pesa 8,175 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	21	214
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota gr. . .	2	2853
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	3600
Differenza per m.c. gr.	1	9253
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	48	4817
CO_2 portato dall'aria gr.	7	6371
Differenza totale gr.	40	8446

In un'ora di riposo l'animale eliminò 13,6148 gr. di CO_2 cioè 0,16 % grammi del proprio peso.

SECONDA SERIE D'OSSERVAZIONI

5 Maggio 1886. — Si ripetono le osservazioni sopra lo stesso animale che aveva servito per la serie precedente, dopo che gli fu somministrato del cibo per 9 giorni. L'animale però non ha ancora riacquistato il peso primitivo, perciò si fanno solo le osservazioni allo stato di nutrizione normale.

A. — Corre per 2 ore con una velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura ambiente è 17° C. Pesa 9,335 kgr.,

Aria passata per la ruota m.c.	14	810
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota gr. . .	5	0009
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	6200
Differenza per m.c. gr.	4	3809
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	74	0649
CO_2 portato dall'aria gr.	9	1830
Differenza totale gr.	64	8819

Il cane eliminò 32,4409 grammi di CO_2 ogni ora di lavoro cioè 0,34 % del proprio peso.

a. — In seguito si tiene come al solito in riposo per 2 ore. Pesa kgr. 9,230,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	14	712
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota gr. . .	1	5333
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	4489
Differenza per m.c. grammi	1	0844
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	22	5587
CO_2 portato dall'aria gr.	6	6050
Differenza totale gr.	15	9537

L'animale stando in riposo eliminò soltanto 7,9768 gr. di CO_2 ogni ora pari a 0,08 % del proprio peso.

2°. *Grosso cane assai vispo, affezionato, trovasi in laboratorio da 4 mesi, è discretamente grasso.*

PRIMA SERIE D'OSSERVAZIONI

A. — 21 aprile 1886. — L'animale è nello stato di nutrizione normale. Corre per 3 ore con una velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura ambiente è 13° C. Pesa kgr. 19,220,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	22	015
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	8	5001
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra	0	9184
Differenza per m.c. gr.	7	5817
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	187	130
CO_2 portato dall'aria gr.	20	2194
Differenza totale gr.	166	9106

Allo stato normale il cane eliminò 55,9702 grammi di CO_2 ogni ora durante la quale percorse 5,953 km. Questa quantità è uguale a 0,29 % del suo peso.

a. — Dopo questo periodo di corsa si fa stare per altre 3 ore l'animale fermo nell'apparecchio. Pesa 18,450 kg.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	22	413
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	2	8733
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	1	2466
Differenza per m.c. gr.	1	6267
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	64	400
CO_2 portato dall'aria gr.	27	9417
Differenza totale grammi.	36	4583

Stando in riposo il cane perdette 12,1527 gr. di CO_2 ogni ora che equivalgono al 0,06 % del proprio peso.

A cominciare da quest'oggi si fa digiunare il cane.

B. — 26 aprile 1886. — Sesto giorno di digiuno. Corre solo per un'ora colla solita velocità di 5,953 km. perchè non ha più forza per continuare. La temperatura dell'ambiente è 16° C. Pesa kgr. 17,050,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	6	904
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	7	5882
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	4297
Differenza per m.c. gr.	7	1585
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	52	389
CO_2 portato dall'aria gr.	2	967
Differenza totale gr.	49	422

Durante quest'ora di lavoro il cane eliminò 49,422 gr. di CO_2 corrispondenti al 0,28 % del suo peso.

b. — Subito dopo si fa stare per un'altra ora il cane in riposo nell'apparecchio. Pesa 16,890 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	7	405
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	3	9797
CO_2 portato dall'aria per m.c. gr.	0	5297
Differenza per m.c. gr.	3	4500
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	29	470
CO_2 portato dall'aria gr.	3	925
Differenza totale gr.	25	545

Nell'ora di riposo il cane eliminò soltanto 25,545 gr. di CO_2 equivalenti al 0,15 % del suo peso.

SECONDA SERIE D' OSSERVAZIONI

A. — Il giorno 4 maggio 1886, quando il cane aveva quasi riacquistato il peso primitivo per una buona nutrizione, si incomincia una nuova serie di ricerche cominciando col fare una determinazione allo stato normale. Corre per 2 ore con una velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura ambiente è 16° C, il cane pesa 18,720 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	14	705
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	8	2282
CO_2 per m.c. d'aria che vi entra gr.	0	6895
Differenza per m.c. gr.	7	5387
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	120	9965
CO_2 portato dall'aria gr.	10	1403
Differenza totale gr.	110	8562

Il cane eliminò in ragione di 55,4278 gr. di CO_2 all'ora cioè 0,29 % del suo peso.

a. — Appena terminata l'esperienza lo si rimette di nuovo nella ruota facendovelo rimanere per 2 ore in riposo. Pesa kgr. 18,170,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	14	610
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	2	8450
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	5863
Differenza per m.c. gr.	2	2587
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	41	566
CO_2 portato dall'aria gr.	8	5663
Differenza totale gr.	32	9997

Durante il riposo il cane eliminò 16,4998 gr. di CO_2 per ora cioè il 0,09 % del suo peso. Il giorno 6 maggio 1886 si cessa di somministrargli il vitto.

B. — 10 maggio 1886. — 4° giorno di digiuno, corre per 3 ore colla solita velocità di 5,953 km. all'ora. Temperatura ambiente 16°,4 C. Pesa kgr. 17,350,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	21	416
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	7	1738
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	8438
Differenza per m.c. gr.	6	3300
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	153	6343
CO_2 portato dall'aria gr.	18	0710
Differenza totale gr.	135	5633

In ciascuna delle ore di lavoro il cane eliminò 45,3526 gr. di CO_2 equivalenti al 0,26 % del suo peso.

b. — Messo il cane nell'apparecchio dopo averlo pesato si determina la quantità di CO_2 che elimina stando in riposo per 3 ore. Pesa 16,910 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	22	917
CO_2 per m.c. d'aria che esce dalla ruota gr. . .	2	6799
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	4240
Differenza per m.c. gr.	2	2559
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	61	417
CO_2 portato dall'aria gr.	9	717
Differenza totale gr.	51	700

In ogni ora di riposo seguente la fatica il cane eliminò 17,233 gr. di CO_2 vale a dire il 0,10 % del suo peso.

3.° *Cagna da caccia trovasi da più d'un anno in laboratorio, ben nutrita, vispa, perde le orine per ogni più piccola emozione.*

A. — 13 maggio 1886. — Esperienza allo stato normale. Corre per 3 ore e 30′ con una velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura ambiente è 17° C, pesa 15,210 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	25	318
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce grammi . . .	9	2083
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	6821
Differenza per m.c. gr.	8	5262
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	233	1386
CO_2 portato dall'aria gr.	17	2712
Differenza totale gr.	215	8674

L'animale eliminò in media 61,676 gr. di CO_2 ogni ora di corsa, quantità equivalente al 0,40 % del suo peso.

a. — Dopo averlo pesato si continua la determinazione facendolo stare per altre 3 ore e 30′ nell'apparecchio, ma in riposo. Pesa 14,497 kg.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	25	516
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	2	8457
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	6726
Differenza per m.c. gr.	2	1731
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	72	612
CO_2 portato dall'aria gr.	17	1620
Differenza totale gr.	55	4500

In ogni ora di riposo il cane eliminò 15,45 gr. di CO_2 cioè 0,10 % del suo peso.
Comincia a digiunare dal giorno 15 maggio.

B. — 18 maggio 1886. — Quarto giorno di digiuno, corre per 3 ore colla solita velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura ambiente è 17° C, il peso dell'animale è ridotto a 13,460 kgr.,

Attraverso alla ruota passarono m.c. d'aria . . .	22	715
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	9	2644
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	6433
Differenza per m.c. gr.	8	6211
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	210	4627
CO_2 portato dall'aria gr.	14	6126
Differenza totale gr.	195	8501

Nel percorrere in un'ora km. 5,953 la cagna eliminò 65,2833 gr. di CO_2 equivalenti a 0,48 % del suo peso.

b. — Si continua la determinazione per altre 3 ore facendo riposare l'animale nella ruota. Pesa 12,730 kgr.,

Attraverso alla ruota passarono m.c. d'aria . . .	22	215
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	2	3473
CO_2 per m.c. d aria che vi penetra gr.	0	6351
Differenza per m.c. gr.	1	7122
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	52	147
CO_2 portato dall'aria gr.	14	1090
Differenza totale gr.	38	0380

In ogni ora di riposo eliminò 12,676 gr. di CO_2, che corrispondono al 0,09 % del suo peso.

C. — 21 maggio 1886. — Settimo giorno di digiuno. Corre per 3 ore colla solita velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura dell'ambiente è 22° C. Pesa 12,180 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	22	015
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	5	6804
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	8951
Differenza per m.c. gr.	4	7853
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	125	0554
CO_2 portato dall'aria gr.	19	706
Differenza totale gr.	105	3494

Nel 7° giorno di digiuno lavorando la cagna perdette in ragione di 35,4498 gr. di CO_2 ogni ora, cioè 0,29 % del suo peso.

c. — Come per le altre osservazioni si determina anche questa volta la quantità di CO_2 eliminata in 3 ore di riposo seguente la fatica, pesa 11,880 kgr.,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	22	115
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	2	2983
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	8000
Differenza per m.c. gr.	1	4983
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	50	8285
CO_2 portato dall'aria gr.	17	694
Differenza totale gr.	33	1345

In un'ora di riposo al 7° giorno di digiuno la cagna perdè 11,044 gr. di CO_2 cioè 0,09 % del suo peso.

4°. *Cane da caccia da due anni in laboratorio, mediocremente grasso, molto vispo, irrequieto ed affezionato.*

A. — 15 maggio 1886. — Esperienza sopra l'animale allo stato normale. Corre per 3 ore colla solita velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura ambiente è 16°,5 C. Pesa 18,760 kgr.,

Quantità d'aria passata attraverso alla ruota m.c.	22	115
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	10	3826
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	7500
Differenza per m.c. gr.	9	6326
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	229	6115
CO_2 portato dall'aria gr.	16	588
Differenza totale gr.	213	0235

Questo cane in ogni ora di lavoro elimina 71,024 gr. di CO_2 cioè il 0,37 % del proprio peso.

a. — Subito dopo si determina l'acido carbonico emesso in 3 ore di riposo. Pesa 17,730 kgr.,

Attraverso alla ruota passarono m.c. d'aria . . .	22	215
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	4	5500
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	6449
Differenza per m.c. d'aria gr.	3	9051
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	101	079
CO_2 portato dall'aria gr.	14	328
Differenza totale gr.	86	751

Nel riposo questo cane elimina gr. 29,250 di CO_2 ogni ora cioè 0,16 % del suo peso. Comincia a digiunare dal 16 maggio.

B. — 19 maggio 1886. — Quarto giorno di digiuno. Corre per 3 ore colla velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura dell'ambiente è 17° C. Pesa kgr. 16,785,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	22	014
CO_2 per m.c. d'aria che ne esce gr.	5	6748
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	6150
Differenza per m.c. gr.	5	0598
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	124	9270
CO_2 portato dall'aria gr.	13	54
Differenza totale gr.	111	3870

In ogni ora di lavoro nel 4° giorno di digiuno il cane eliminò 37,129 gr. di acido carbonico pari al 0,22 % del suo peso.

b. — Subito dopo pesato il cane viene rimesso nella ruota e tenutovi in riposo per tre ore. Pesa 16,095 kgr.,

Attraverso alla ruota passarono m.c. d'aria . . .	21	915
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	2	9982
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	5350
Differenza per m.c. gr.	2	4632
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	65	7075
CO_2 portato dall'aria gr.	11	725
Differenza totale gr.	53	9825

In ogni ora di riposo a digiuno il cane elimina solo 14,9941 gr. di CO_2 cioè 0,09 % del proprio peso.

C. — 22 maggio 1886. — 7° giorno di digiuno. Cammina per 3 ore colla velocità di 5,953 km. all'ora. La temperatura ambiente è 23°,8 C. Pesa kgr. 15,450,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	21	815
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	5	1143
CO_2 per m.c. d'aria ehe vi penetra gr.	0	7820
Differenza per m.c. gr.	4	3323
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	111	5653
CO_2 portato dall'aria gr.	17	0606
Differenza totale gr.	94	5047

Questo cane nel 7° giorno di digiuno lavorando elimina in un'ora gr. 31,5015 di CO_2 cioè 1 0,20 % del suo peso.

c. — Appena finita questa determinazione si fece rientrare l'animale nell'apparecchio da cui era stato levato per pesarlo e lo si fa rimanere per 2 ore in riposo. Pesa kgr. 15,010,

Aria passata attraverso alla ruota m.c.	14	310
CO_2 per m.c. d'aria passata gr.	2	3495
CO_2 per m.c. d'aria che vi penetra gr.	0	8450
Differenza per m.c. gr.	1	5045
CO_2 in tutta l'aria passata gr.	33	6214
CO_2 portatovi dall'aria esterna gr.	12	092
Differenza totale gr.	21	5294

In ciascuna delle ore di riposo questo cane eliminò nel 7° giorno di digiuno 10,7647 gr. di CO_2 quali corrispondono al 0,07 % del suo peso.

Ho raccolto nella tabella seguente i risultati delle esperienze.

Quantità di CO_2 *eliminata per 100 gr. di animale in un'ora.*

N. d'ordine dei cani	Normale		Digiuno					
	Corsa	Riposo	4° giorno		6° giorno		7° giorno	
			Corsa	Riposo	Corsa	Riposo	Corsa	Riposo
1	0,32	0,04	0,19	0,10	0,28	0,16	—	—
	0,34	0,08	—	—	—	—	—	—
2	0,29	0,06	—	—	0,28	0,15	—	—
	0,29	0,09	0,26	0,10	—	—	—	—
3	0,40	0,10	0,48	0,09	—	—	0,29	0,09
4	0,37	0,16	0,22	0,09	—	—	0,20	0,07

Dall'esame della tabella precedente appare chiaro, che la quantità di acido carbonico emessa durante la corsa, tanto nello stato di nutrizione normale, quanto durante l'inanizione, è molto superiore alla quantità di acido carbonico eliminata mentre l'animale riposa.

È noto dopo le ricerche di Lavoisier (1), di Vierordt (2), Scharling (3), di E. Smith (4), di Sczelkow (5) e di Speck (6), che esiste un aumento nella produzione di acido carbonico e nel consumo di ossigeno in seguito ad un lavoro muscolare. Pettenkofer e Voit (7) avevano già fatto delle ricerche sull'animale che lavora, e nell'animale che lavorando digiuna. Le loro osservazioni duravano 24 ore e determinavano separatamente la quantità di CO_2 eliminata durante le ore del giorno e quella eliminata durante le ore della notte. Dalle loro esperienze risultò, che l'aumento del ricambio gazoso per il lavoro nell'animale digiuno non è così grande come lo ammettevano Smith e gli altri, ma si limita a raggiungere 2, 3 volte il ricambio che si ha nell'animale in riposo. Nello stato di nutrizione normale la differenza è ancora minore, poichè durante il lavoro si elimina solo una quantità di CO_2 1,8 volte maggiore di quella eliminata durante il riposo. Voit (8) trovò in seguito, che un uomo, il quale digiunando lavori, per sviluppare in un'ora una forza di 24282 kgrammetri deve consumare 8,2 grammi di grasso più di quello, che consumerebbe stando in riposo. Ranke (9) determinando la quantità di CO_2 eliminata dalle rane dopo un

(1) Lavoisier, Mem. de l'Acad. des sciences, 78 pag. 185.
(2) Vierodt, *Physiologie des Athmens*, Wagner's Handwörterb. d. Physiol. II, pag. 828.
(3) Scharling, Ann. d. Chem. u. Pharm. XLV, pag. 214.
(4) E. Smith, Edimburg. med. Jour. 1859, pag. 614.
(5) Sczelkow, Sitzgsber. d. Wiener Akad. XLV, pag. 171.
(6) Speck, Archiv. f. wissen. Heilkunde IV, pag. 521.
(7) Pettenkofer u. Voit, Ztschr. f. Biol. II, pag. 459.
(8) Voit, Hermann Handb. de Physiol. Allg. Sotffwechsel. pag. 202.
(9) Ranke, *Tetanus* Leipzig. 1865, pag. 319.

periodo di tetano trovò, che il CO_2 diminuisce di una quantità corrispondente a quella, di cui era aumentato per causa del tetano. Perciò egli ammise che la quantità di grasso, della quale può disporre l'organismo giornalmente è costante, come già era stato dimostrato avvenire per l'albumina. Se a cagione del lavoro vi ha un periodo di tempo, in cui la distruzione sia maggiore, segue immediatamente a questo un altro periodo, in cui la distruzione è corrispondentemente minore.

Come si vedrà in seguito i risultati da me ottenuti concordano con quelli di Ranke. Ad eccezione del cane n. 3 tutti gli altri, quando correvano essendo digiuni, emettevano colla respirazione una quantità di acido carbonico considerevolmente minore, di quella emessa compiendo lo stesso lavoro allo stato di nutrizione normale. Viceversa osservai, che la quantità di acido carbonico emessa nel riposo, che segue la fatica, durante il digiuno, è superiore a quella emessa nelle stesse condizioni allo stato normale. Le eccezioni fatte a tale regola dai cani 3 e 4 si possono facilmente spiegare, quando si tenga conto delle accidentalità occorse durante l'esperienza.

La quantità di acido carbonico emessa per 100 grammi di animale in un'ora non è sempre costante, quantunque gli animali si trovino nelle stesse condizioni; ma le differenze non sono molto grandi; arrivano appena al 0,7 °/₀ nel periodo di corsa a digiuno, e si limitano a 0,1 °/₀ nel periodo di riposo che segue la corsa. Quando gli animali sono nello stato normale trovai, che le differenze sono più grandi, anche non tenendo conto di quei casi, in cui si potè osservare un'ecitazione anormale dell'animale sottoposto ad esperienza. Paragonando fra di loro i risultati ottenuti nei vari giorni del digiuno si vede, che la produzione di acido carbonico nella fatica a digiuno resta sempre minore, che nello stato normale; che questa differenza è massima nei primi giorni di digiuno, tende poi man mano a scomparire. Come esempio rammento, che nel 6° giorno la quantità di acido carbonico eliminata per 100 grammi di animale in un'ora di lavoro è appena di poco inferiore a quella eliminata nello stato normale.

Questo fatto dimostra che non è vera l'ipotesi emessa da Henneberg e confermata da Meissl [1] nelle sue ricerche sopra il ricambio materiale del maiale. Henneberg diceva, che il cibo influisce sulla eliminazione di acido carbonico aumentandola; evidentemente, se fosse così, avrei dovuto ottenere nel 6° giorno di digiuno delle quantità di CO_2 minori che nel quarto. Devo quindi ammettere, che, se il cibo esercita un'influenza sopra l'eliminazione di acido carbonico, questa non è tanto potente da rendersi manifesta in ogni caso.

Il rapporto fra la quantità di CO_2 prodotto nella corsa e quella prodotta nel riposo dagli animali nutriti normalmente non è costante, ma oscilla fra 8 e 2,3. Di più uno stesso animale può presentare delle differenze notevoli nelle varie determinazioni. Così ad esempio il cane n. 1, che nella prima esperienza durante il lavoro eliminò una quantità di CO_2 otto volte superiore a quella eliminata nel riposo, in una seconda esperienza fatta nelle stesse condizioni diede un rapporto di 4,2 ad 1. Va notato, che tra le due esperienze correva solo la differenza di 720 grammi in meno nel peso dell'animale quando incominciò la seconda esperienza, e che in questa la temperatura era più elevata di 4°,5′ C.

[1] Meissl, Zeitschrift f. Biologie, Bd. XXII, pag. 63.

I risultati delle mie esperienze fatte sopra gli animali digiuni non si accordano completamente con quelli ottenuti da Voit e Pettenkofer (1). Essi trovarono che nell'animale digiuno, aumenta la differenza tra il CO_2 eliminato durante il lavoro e quello eliminato nel riposo; io ebbi dei risultati vari. Nei cani 1 e 2 questa differenza, la quale è sempre minore tanto per le determinazioni fatte nel 4° giorno, quanto per quelle fatte nel 6° giorno del digiuno, diminuisce col progredire di questo.

Il cane n. 3 diede nel 4° giorno di digiuno una differenza maggiore, però si deve notare, che in questo giorno l'animale correndo si escoriò i piedi, ed il dolore concorse ad alterare il ricambio. Finalmente il cane n. 4 presentò sempre una differenza maggiore, tanto nel 4° quanto nel 7° giorno di digiuno. I cani 1 e 2 che diedero risultati costanti e concordanti erano adulti mentre gli altri due erano giovani.

Le emozioni sono una delle cause principali che fanno mutare la quantità di acido carbonico emessa. Così ad esempio si è visto, che i cani 3 e 4 hanno dato dei risultati, i quali si allontanano grandemente da quelli ottenuti negli altri animali. Studiando i registri delle esperienze ho trovato la ragione del fatto appunto nelle emozioni da essi patite. Nella storia di questi due animali si è detto, che sono eccitabilissimi; or bene questi cani, che sono da lungo tempo in laboratorio, e che sono buonissimi corridori, si erano abituati a correre nella ruota quando non era ancora stata modificata per essere adattata alla macchina di Pettenkofer, ed era molto più illuminata. Bastò il fatto d'aver reso più buia la ruota affinchè non lasciasse sfuggir aria, perchè questi due animali eliminassero una quantità di CO_2 molto superiore a quella degli altri cani, che si trovavano per tutto il resto nelle identiche loro condizioni, salvo che si erano abituati a correre in quella ruota nelle lunghe esperienze preparatorie.

Evidentemente questo risultato non si deve ascrivere ad un effetto chimico dovuto alla mancanza di luce, perchè in questo caso, come ci insegnano le esperienze di Moleschott (2), si sarebbe dovuto ottenere un effetto opposto; ma alla eccitazione in loro prodotta dal dover correre in condizioni per loro anormali.

Un altro esempio anche più evidente ci vien fornito pure dal cane n. 3 durante l'esperienza fatta nel 4° giorno del digiuno.

Essendosi lasciato trascinare dal cilindro si produsse due leggere abrasioni ai polpastrelli delle dita nelle estremità posteriori. Questo dolore fece sì, che la quantità di acido carbonico eliminato raggiunse un valore doppio di quello raggiunto dagli altri cani nello stesso giorno, e superiore di molto a quello già esagerato raggiunto dallo stesso cane allo stato normale. Questo risultato inaspettato venne a confermare l'osservazione fatta dal dott. U. Mosso (3) nel suo lavoro sopra l'influenza del sistema nervoso sul calore animale e le osservazioni di Voit e Pettenkofer (4).

(1) Voit e Pettenkofer, loc. cit. pag. 538.
(2) Moleschott e Fubini, Atti della R. Accad. del Sc. di Torino. V. XV, pag. 55.
(3) U. Mosso, Giornale dell'Accad. di medicina di Torino, 1885, pag. 55.
(4) Voit u. Pettenkofer, Sitzgsber. d. bay. Akad. 1866. 10 Nov.

A questo punto sarebbe stato molto interessante il poter determinare quali sono le sostanze, che si distruggono nell'organismo in seguito all'esecuzione di un lavoro oppure in causa delle emozioni. Per fare ciò sarebbe stato necessario determinare la quantità di azoto emessa dagli animali colle orine e colle feci, e la quantità di acqua emessa tanto colle orine quanto colla respirazione e traspirazione cutanea. Malgrado tutte le migliori intenzioni mi fu impossibile praticare queste ricerche per molte ragioni di cui la principale è stata l'impossibilità di poter ottenere, che i cani non orinassero nè defecassero mentre correvano; quindi piuttosto che avere delle ricerche incomplete preferii tralasciarle riservandomi di cercare i mezzi per ovviare a quest'inconveniente. Ciò non dimeno credo, che l'aver tralasciata la determinazione della quantità di azoto eliminata dagli animali non possa modificare i risultati dell'esperienza.

I lavori di Voit (1) hanno dimostrato in modo irrefutabile che durante l'inanizione finchè nell'organismo si trova del grasso il lavoro non esercita alcuna influenza sulla quantità di azoto eliminata. Siccome le mie esperienze duravano solo una settimana, l'azoto si può considerare come una costante, che non altera i risultati che ottenni dalla determinazione del CO_2 eliminato.

Influenza del lavoro sulla diminuzione di peso dell'animale digiuno.

Ho scelto otto cani, dei quali conoscevo bene le condizioni di salute, perchè si trovavano da molto tempo in laboratorio, li pesai ventiquattro ore dopo che avevano mangiato, li rinchiusi in una camera appartata rivolta a nord, perchè le oscillazioni di temperatura non fossero troppo grandi, e li sottoposi al più rigoroso digiuno, tralasciando anche di somministrare loro dell'acqua. Volendo studiare il modo di comportarsi del peso quando gli animali vengono affaticati mentre sono digiuni li pesavo ogni giorno alla stessa ora; ed in vari periodi del digiuno facevo percorrere delle distanze varie a quattro di essi. Per affaticarli mi servivo dell'apparecchio del prof. A. Mosso il quale consta di una cassa cilindrica di legno come quella rappresentata dalla fig. 1 però maggiore nelle dimensioni avendo un diametro di quasi due metri. La periferia è chiusa da una lastra di ferro forellata a crivello e su di essa può correre comodamente il cane (2). Durante il digiuno due di questi cani morirono, perciò non tenni conto dei risultati ottenuti dalle osservazioni fatte sopra di loro.

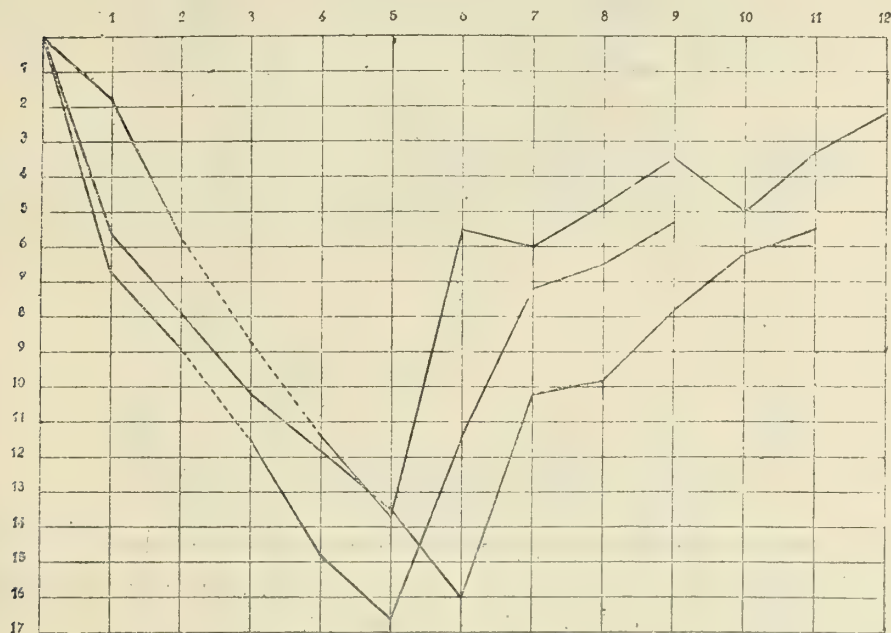
1° Piccolo cane da caccia giovane e magro del peso di kg. 11,970. Viene sottoposto per tre volte a digiuno mentre la temperatura era bassa, cioè dal 2 al 7 febbraio, dal 13 al 20 febbraio e dal 28 febbraio al 5 marzo 1886. Durante il primo digiuno percorse nel 3° e 4° giorno complessivamente la distanza di 30,528 km. impiegandovi sei ore. Nel 2° digiuno riposò sempre. Durante il 3° digiuno percorse la stessa distanza lavorando 6 ore di seguito nel 3° giorno di digiuno.

Il seguente tracciato segna la quantità di peso perduta da ogni 100 gr. d'animale nei vari giorni di digiuno. I numeri che stanno sulle ascisse indicano la quantità %

(1) Voit, Zeitschr. f. Biol. II, 1866, pag. 573.

(2) U. Mosso, Archivio per le sc. mediche, 1886, pag. 8.

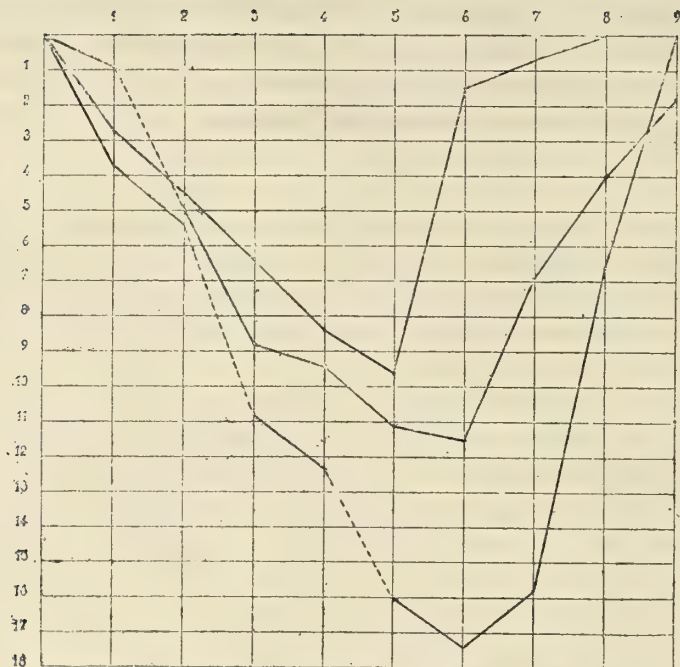
perduta, sulle ordinate stanno scritti i giorni durante i quali si prolungò l'osservazione. I tratti punteggiati corrispondono alle perdite subite nei giorni di lavoro. La curva ascendente segna il decorso seguìto dal peso dell'animale quando alla fine del digiuno gli si somministrò doppia la razione indicata da Voit [1] come necessaria per mantenere l'equilibrio negli animali che lavorano.

I.

Tracciato indicante la diminuzione di peso subita dal cane 1° nei tre periodi di digiuno.
I tratti punteggiati corrispondono ai giorni di lavoro.

Da questo tracciato si vede che il cane stando a riposo perdette il 13,8 % del suo peso in 5 giorni di digiuno mentre invece percorrendo 30,528 km. perdè nello stesso tempo il 16,6 %. Di più la perdita subita nelle prime 24 ore di digiuno non è costante. Malgrado che le osservazioni cominciassero 24 ore dopo che si era somministrato il cibo, nella esperienza in cui stette in riposo e nell'ultima in cui si fece lavorare, l'animale non aveva ancora eliminate le sostanze indigeribili del cibo preso antecedentemente, ma defecò solo nel secondo giorno. Si spiega in questo modo l'apparente eguaglianza nella perdita subita al 5° giorno di digiuno durante la prima esperienza e durante quella in cui l'animale stette in riposo.

2° Grosso cane da caccia adulto, ben nutrito, del peso kgr. 18,820. Le condizioni dell'ambiente in cui fu sottoposto a digiuno sono identiche a quelle del cane precedente poichè digiunò nello stesso tempo e nella stessa camera. Durante la prima esperienza stette a riposo. Durante la seconda esperienza lavorò per 3 ore nel 3° giorno ed altre 3 ore nel 5° giorno di digiuno percorrendo complessivamente 50,865 km. Durante il terzo digiuno percorse nel 3° giorno 20,346 km. in quattro ore.

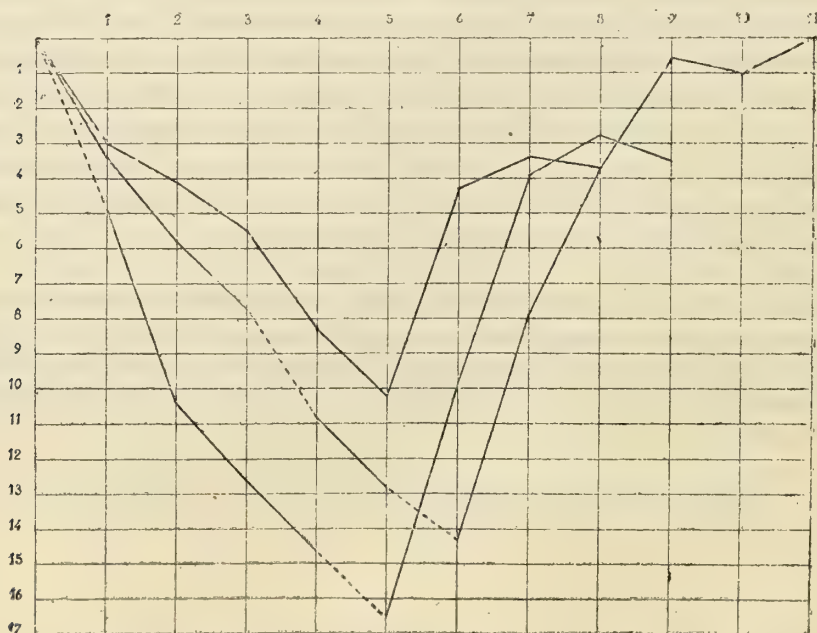
(1) Voit, Zeitschr. f. Biologie. II, 1866, pag. 488.

II.

Curve indicanti la diminuzione di peso del 2° cane nei tre periodi di digiuno.
I tratti punteggiati si riferiscono ai giorni di lavoro.

Questo cane percorrendo a digiuno 50,865 km. perdè il 17,6 % del suo peso; stando a riposo perdè solo il 9,6 %.

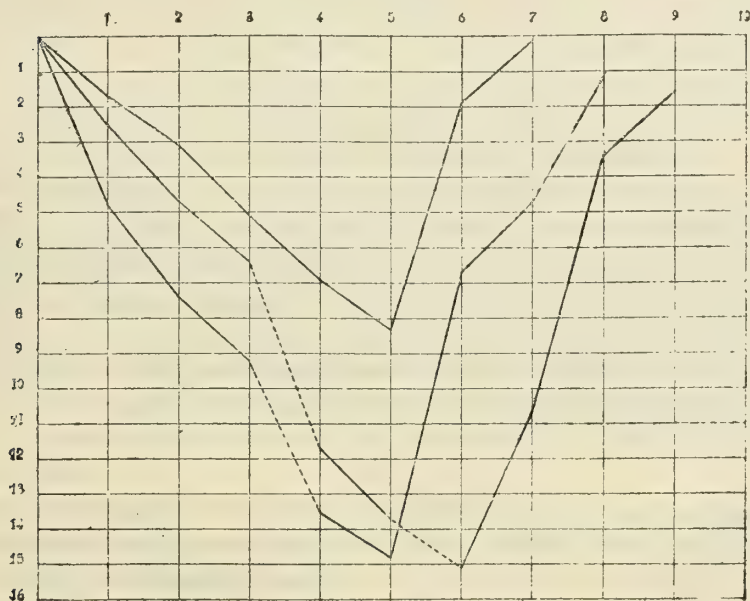
Anche in questo cane è variabile la perdita subita nelle prime 24 ore di digiuno per la stessa ragione detta riguardo al cane precedente.

3° Piccolo cane segugio, adulto, macilento, del peso di kgr. 10,410, buon corridore. Digiuna nello stesso tempo e nelle medesime condizioni dei cani precedenti. Sta in riposo durante il primo digiuno. Durante il secondo digiuno percorre nel 4° giorno 30,519 km. in 6 ore e 20,346 in 4 ore nel 6° giorno. Nel terzo digiuno percorre 10,173 km. in due ore nel secondo giorno e 7,029 km. nel 6° giorno impiegando un'ora e mezzo.

III.

Tracciato indicante la diminuzione di peso subita dal 3° cane nei tre periodi di digiuno.
I valori corrispondenti ai giorni di lavoro sono segnati con punti.

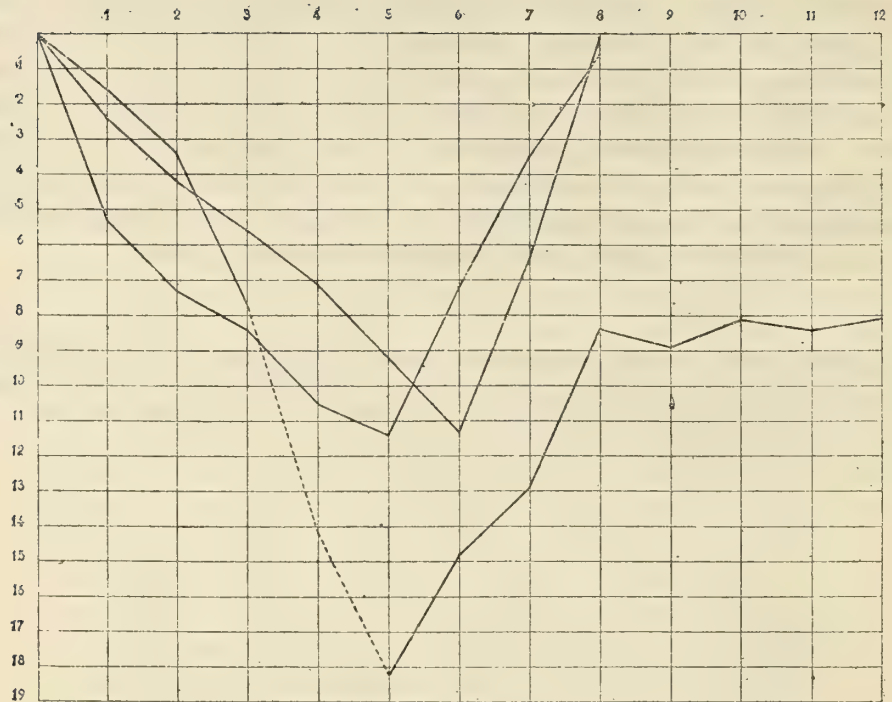
Da questa curva si vede che il cane digiunando in riposo perdè solo 10,2 % del suo peso in 6 giorni, mentre perdè il 14,4 % quando percorse 50,865 km. digiunando 7 giorni ed il 16,5 % quando percorse solo 17,202 km digiunando solo 6 giorni. Anche per questo cane vi fu l'inconveniente delle feci. Non si potè porre rimedio a questa causa d'inesattezza pesando le feci emesse perchè gli animali defecavano abitualmente mentre correvano e le feci venivano disperse dal movimento dell'apparecchio. In tutti e due i periodi di digiuno durante i quali lavorò, si vede che questo cane subì nel primo giorno di lavoro una perdita maggiore che nel secondo, corrispondente al minor lavoro compiuto nel secondo giorno.

4° Cagna da caccia di statura mezzana, ben nutrita, vispa del peso, di kgr. 14,485. Digiuna nelle stesse condizioni degli altri. Riposa durante il primo digiuno. Nel secondo percorre durante il 4° giorno 30,528 km. in sei ore e 20,352 km. in quattro ore nel 6° giorno. Durante il terzo digiuno percorre nel 4° giorno 30,519 km. in 6 ore.

IV.

Curve della diminuzione di peso subita dal 4° cane nei tre periodi di digiuno.
I tratti punteggiati corrispondono ai giorni di lavoro.

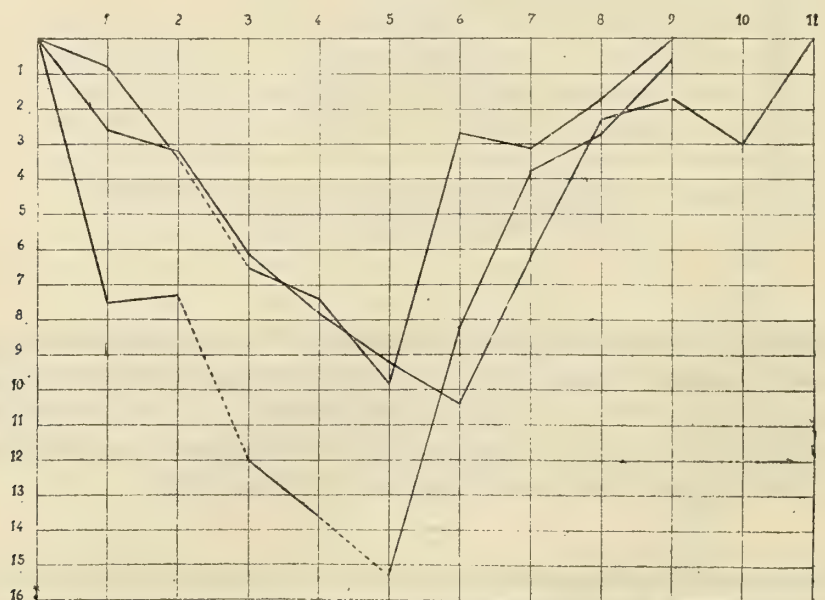
Digiunando in riposo questa cagna perdette l'8,3 % del suo peso in 6 giorni. Percorrendo 50,880 km. perdette in 7 giorni 15,2 %. Percorrendo 30,519 km. perdette in 6 giorni di digiuno il 14,8 % del suo peso. Si nota qui pure il fatto che correndo l'animale per due volte in uno stesso periodo di digiuno è maggiore la perdita di peso subita la prima volta perchè maggiore è il lavoro fatto.

5° Grosso cane da caccia, giovane, ben nutrito, pesa 18,670 kgr. Digiuna nelle stesse condizioni degli altri. Durante il primo digiuno percorre nel 3° giorno 48,009 km. impiegando 5 ore e 18,918 km. in 2 ore nel 5° giorno di digiuno. Durante gli altri due periodi di digiuno sta in riposo.

V.

Tracciato indicante la perdita di peso subita dal 5° cane nei tre periodi di astinenza.
Colla linea tratteggiata si indica il valore corrispondente ai giorni di lavoro.

Questo cane percorrendo durante un digiuno di 6 giorni una distanza di 66,927 km. perde il 18,2 % del suo peso. Stando in riposo per un digiuno di 7 giorni perde solo l'11,2 %. Dopo aver perduto il 18,2 % l'animale non volle mangiar altro che carne. Gliene somministravo 500 gr. al giorno; malgrado ciò non riacquistò mai il peso primitivo. Durante la seconda corsa perdè meno che durante la prima, ma lavorò meno.

6° Cane da guardia di statura mezzana, adulto, discretamente nutrito, pesa kgr. 11,795. Digiuna nelle condizioni degli altri. Durante il primo digiuno percorre nel terzo giorno 7,346 km. in 2 ore e mezzo. Sta in riposo durante il secondo digiuno. Durante il terzo digiuno percorre nel 3° giorno 20,352 km. in 4 ore e 7,532 km. in un'ora e mezzo nel 6° giorno.

VI.

Tracciato indicante la perdita di peso subita dal 6° cane nei tre period di digiuno.
I tratti punteggiati segnano i valori corrispondenti ai giorni di lavoro.

In 6 giorni di digiuno percorrendo 27,984 km. perdette il 15,2 % mentre stando in riposo perdette solo il 9,8 %. In 7 giorni di digiuno durante i quali percorse 7,346 km. perdette il 10,4 % del proprio peso. Questo cane durante il terzo digiuno nel 2° giorno mangiò della segatura che aveva nel suo giaciglio, questo spiega perchè in detto giorno sia aumentato di peso.

Durante il digiuno osservai che l'emissione delle feci cessa per lo più del tutto dopo il secondo giorno. Quando perdura consiste in piccole quantità di una sostanza nero-verdognola, talora a forma di sibale, più spesso però di consistenza mucoso-densa, che non ha le reazioni dei pigmenti biliari e che esaminata allo spettroscopio presenta la stria della meta-emoglobina senza che però ne abbia le altre reazioni. La quantità delle orine diminuisce grandemente, il loro colore si fa molto carico.

Dai tracciati riportati si vede, che varia assai la diminuzione di peso subìta dagli animali in uno stesso periodo di digiuno, quantunque tutti si trovino nelle medesime condizioni. Consultando il registro delle esperienze vedo, che a produrre queste differenze non concorrono nè le condizioni di nutrizione dell'animale quando incominciò a digiunare, nè il sesso. La sola causa risiede nell'età più o meno avanzata dell'animale. Nell'età giovane si ha una maggior diminuzione di peso. Non credo di dover tener calcolo delle piccole differenze di 1 % in 6 giorni, poichè esse entrano nei limiti degli errori dipendenti dallo stato di maggiore o minore pienezza del tubo digerente al principio dell'esperienza; difatti esse si verificano tutte nella perdita subìta il primo giorno di digiuno. Questi errori non si poterono evitare ancorchè si sia sempre tenuto come punto di partenza il peso degli animali 24 ore dopo che avevano mangiato. Perciò spesso nella curva, che segna la diminuzione di peso nei primi giorni, si trova una rapida discesa dovuta alle escrezioni. Quando l'animale ha emesso tutte le sostanze contenute nel suo intestino, se non intervengono altre cause, la diminuzione di peso procede regolarmente dando per ogni giorno dei valori che oscillano tra 1,5 e 2 % del peso, che l'animale aveva quando incominciò a digiunare. Se invece si obbliga l'animale a camminare, allora aumenta di molto la diminuzione di peso, ed in sei giorni può eguagliare la perdita di peso che subirebbe l'animale digiunando quattro giorni di più, ammesso che la curva mantenesse invariato il suo decorso.

Se si fa lavorare due volte l'animale durante lo stesso digiuno, in rapporto al maggior lavoro fatto, è più grande la perdita di peso subìta nel primo giorno di corsa, che quella subìta nel secondo giorno.

Per mettere in armonia questo risultato col fatto accennato precedentemente della minore produzione di acido carbonico nell'animale digiuno quando compiè un lavoro, dobbiamo tener conto della enorme quantità di acqua eliminata durante la corsa per mezzo della respirazione affannosa, e della maggior quantità di acido carbonico eliminata nelle ore successive alla fatica nel digiuno. La facilità grande colla quale i cani orinano e perdono le feci durante la corsa rende oltre modo difficili queste esperienze.

Influenza che la temperatura ambiente esercita sulla diminuzione di peso dell'organismo.

Per accertare l'influenza del freddo e del caldo sull'animale che digiuna ho fatto una serie di esperienze nel febbraio del 1886, quando per la rigidità grande della stagione potevo facilmente, tenendo aperte le finestre di una stanza rivolta a nord, ottenere delle temperature bassissime. Le esperienze per le temperature elevate le feci nel maggio dello stesso anno, tenendo chiusa ermeticamente la finestra e mantenendo continuamente accesa una stufa. In questo modo ottenni nella prima serie di esperienze una temperatura variabile da — 8° a + 9° e nella seconda una temperatura che oscillava fra 25° e 35°. I cani rinchiusi nella stanza erano, come sempre, mantenuti nel più rigoroso digiuno. Ogni giorno venivano pesati, veniva misurata la loro temperatura, contato e scritto il polso ed il respiro. Ebbi cura di abituarli poco per volta a queste operazioni, cosichè potei ottenere di compierle da solo, senza muoverli dal loro giaciglio, eliminando così l'influenza che avrebbe potuto avere l'emozione di vedersi legati.

La perdita di peso subita dai cani digiunando a temperatura elevata non è sensibilmente differente da quella subita dagli stessi animali digiunando a temperatura bassa e di questa abbiamo già date le curve nel capitolo precedente. Se si osserva attentamente si vedono in taluni animali delle differenze leggere che risiedono, precisamente come nelle curve sopra accennate, nel primo giorno di digiuno, e quidi si devono trascurare, perchè dipendenti dal diverso stato di pienezza del tubo digerente quando s'incominciò l'esperienza.

Mi limito a dare i numeri rimandando per la storia degli animali e pei tracciati a quelli dati al numero corrispondente nel precedente capitolo.

Cane	Quantità di peso perduta nei vari giorni di digiuno ogni 100 gr. di animale					
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
1°	5,1 —	7 —	— 8,6	9,2	11,4	12,2
4°	3,8	5,8	7	8,7	10,2	12,3
5°	4,8	7,8	9,6	10,5	11,8	13,2
6°	6	8,2	10,3	12	13,8	14,8

Röhrig e Zuntz (1) misurando l'ossigeno e l'acido carbonico avevano dimostrato che l'energia delle funzioni respiratorie, intesa chimicamente, aumenta col diminuire della temperatura e viceversa. Sanders-Ezn (2) trovò, che nei primi momenti i quali seguono i rapidi mutamenti di temperatura l'acido carbonico eliminato sta in ragione

(1) Röhrig u. Zuntz, Pflüger's Archiv. Bd. IV. pag. 57.

(2) Sanders-Ezn, Sächs Akad. Sitzungsber. Nat. phy. Classe 1867. pag. 58.

inversa della temperatura, mentre in seguito un aumento di temperatura determina un aumento nell'eliminazione di acido carbonico, ed una diminuzione di temperatura determina una diminuzione di CO_2. Quest'ultimo fatto era già stato stabilito da Spallanzani (1) e da Moleschott (2) e poi confermato da Pflüger (3). Il prof. Giuseppe Colasanti (4) continuando nella stessa via di Röhrig e Zuntz determinò quanto fosse grande questo aumento; trovò che il rapporto dell'ossigeno contenuto nel CO_2 rispetto all'ossigeno assorbito contemporaneamente è più piccolo negli animali, che digiunano, ma è costante nelle diverse temperature. Siccome la stessa quantità di ossigeno genera più calore (circa $^1/_3$) quando invece del carbonio viene ossidato dell'idrogeno, si spiega perchè nel digiuno, la temperatura sia regolata egualmente bene, che allo stato di nutrizione normale. A digiuno si ha maggior produzione di acqua e minor eliminazione di CO_2. Dittmar Finkler (5) determinando il consumo di ossigeno fatto dall'animale che digiuna, trovò, che diminuisce coll'aumentare della perdita in peso. Questa a sua volta diminuisce in ragione dell'allungarsi del tempo del digiuno. Contrariamente a quanto trovò Colasanti constatò che il consumo di ossigeno è maggiore a temperatura bassa, che alla temperatura ordinaria. Trovò pure che la diminuzione della quantità di CO_2 eliminato non va di pari passo colla perdita di peso, ma è più lenta. Secondo lui gli animali che digiunano consumano quasi altrettanto ossigeno, quanto quelli ben nutriti, e corrispondentemente a ciò si mantiene costante la temperatura, tanto quando l'animale vive in un ambiente freddo, quanto quando vive a temperatura ordinaria. Munk ed Uffelmann (6) dicono, che in un ambiente raffreddato è aumentato il consumo di adipe, mentre rimane inalterato il consumo dell'albumina. Secondo essi l'eliminazione dell'acido carbonico è notevolmente più grande se la temperatura ambiente è bassa; soggiungono però che in queste condizioni il tremito ed il tono muscolare chimico riflesso di Pflüger (7) complicano i risultati. Chossat (8) aveva trovato nei piccioni, che aumentando la temperatura ambiente, aumenta la quantità di sostanza perduta dall'animale nella stessa unità di tempo.

I risultati delle mie ricerche non si accordano coi risultati ottenuti da alcun altro. Colasanti (9) aveva bensì trovato che il rapporto dell'ossigeno assorbito al CO_2 eliminato è costante per le diverse temperature, ma non si può da ciò dedurre, che debba pure essere costante la perdita di peso subìta dall'animale. La temperatura elevata può agire in due modi che portano a dei risultati opposti. Se favorisce i processi chimici dell'organismo si avrà, come ha trovato Chossat, una maggior perdita di peso a temperatura elevata. Però un organismo, che si trovi in un ambiente caldo, se non lavora, dovrà consumare minor quantità di sostanza per mantenere

(1) Spallanzani, *Memorie sulla respirazione*. 1803.
(2) Moleschott, Unters. z. Naturlehre des Menschen u. Thiere II, 1857. pag. 315.
(3) Pflüger, Archiv. f. die gesammte Physiol. XIV, 1876. pag. 73.
(4) G. Colasanti, Pflüger's Archiv. Bd. XIV. pag. 92.
(5) Dittmar Finkler, Pflüger's Archiv. Bd. XXIII. pag. 175.
(6) Munk u. Uffelmann, *Die Ernährung des gesunden und kranken Menschen*, Leipzig 1887.
(7) Pflüger, Archiv. f. d. ges. Physiol. Bd. 12. pag. 282. 333.
(8) Ch. Chossat, Memoires de l'Academie T. 8. pag. 438.
(9) Colasanti, loc. cit. pag. 120.

costante la sua temperatura, perchè perderà minor quantità di calore per irradiazione. I risultati delle mie esperienze mostrano che questi due fenomeni opposti si equilibrano. Forse si sarebbe trovato una differenza se avessi determinato la quantità di acqua eliminata e la quantità di acido carbonico emesso; perchè mentre sappiamo, che a temperatura elevata è minore la produzione di acido carbonico, è lecito supporre con Colasanti che si abbia una maggiore eliminazione di acqua dai tessuti.

Volendo vedere come si ristabilisce l'equilibrio turbato dal digiuno nel peso del corpo alla fine di ogni serie di esperienze somministravo giornalmente ad ogni animale raddoppiata la razione indicata da Voit come necessaria per mantenere l'equilibrio negli animali che lavorano, a cui aggiungevo 500 cc. d'acqua.

Questa razione consiste in 5,8 gr. di carne, 12 gr. di pane e 2,428 gr. di grasso per ogni kgr. di animale. I risultati di queste ricerche fatte pesando giornalmente gli animali si trovano nella linea ascendente delle curve I, II, III, IV, V e VI.

Da esse si vede, che, eccezion fatta per il cane n. 5, tutti gli altri animali in tre o quattro giorni, al massimo, ritornano ad avere il peso primitivo, che questo aumento di peso è rapidissimo nelle prime 48 ore dopo il digiuno e che poi si rallenta. Si è visto, che in ogni serie d'esperienze, ad eccezione di quelle fatte a temperatura elevata, si faceva lavorare una metà degli animali, e che questi perdevano molto di più in peso. Ciò malgrado alla fine del digiuno, quantunque la razione somministrata forse eguale per tutti, in tre o quattro giorni tutti ricuperavano il peso primitivo qualunque fosse stata la perdita subita. Devo far notare, che ciò non si può ascrivere a differenze individuali, perchè nelle varie serie d'esperienze accadde di vedere che uno stesso animale, il quale in una serie aveva solo perduto il 9,5 % perchè stato in riposo, impiegò tre giorni per ricuperarlo, mentre impiegò pure soltanto tre giorni per ricuperare il 17,5 % perduto in un'altra serie in cui lavorò.

Nella prima serie d'esperienze dopo il digiuno il cane n. 5 non volle mangiare il pane ed il grasso, che gli spettavano, perciò gli somministrai giornalmente 500 gr. di carne pari al 2,63 % del peso primitivo dell'animale. Malgrado ciò in 7 giorni non riuscì a ricuperare il peso primitivo, e quando s'incominciò la 2ª serie d'esperienze aveva appena ricuperato il 10 % mentre la perdita era stata del 18 %.

Influenza del digiuno sopra la temperatura dell'organismo.

Chossat nelle sue esperienze sopra l'inanizione osservò una graduale e progressiva diminuzione di temperatura, cosicchè nell'ultimo giorno di vita i suoi animali avevano una temperatura di circa 2° C inferiore alla normale. Di più egli constatò, che mentre nella temperatura diurna si notava solo una leggera diminuzione, la temperatura notturna scendeva di 4° C sotto la normale. Egli ascrive questo fenomeno alle emozioni cui sono soggetti gli animali durante il giorno, perchè trovò che svegliando gli animali durante la notte la loro temperatura dopo poco tempo raggiungeva quella del giorno. Bidder e Schmidt [1] non constatarono un abbassamento di temperatura fin dopo un digiuno di quindici giorni. Manassein [2] sperimentando sui

(1) Bidder e Schmidt, *Die Verdanungssäfte und der Stoffwechsel*, Leipzig 1852. pag. 322.
(2) Manassein, Ctrbltt. f. d. med. Wiss. 1868. N.° 18.

conigli trovò, che la temperatura si mantiene costante fino a 3 o 4 giorni prima che avvenga la morte. Senator (1) in un cane che digiunava da 7 giorni non trovò diminuzione superiore ai due decimi di grado. Dittmar Finkler (2) misurando la temperatura di animali che digiunavano, trovò esso pure delle diminuzioni insignificanti, tanto se l'ambiente in cui l'animale si trovava era freddo, quanto se era riscaldato. Egli trovò pure, che gli animali che digiunano, consumano quasi tanto ossigeno quanto quelli ben nutriti, e corrispondentemente a ciò si mantiene costante la temperatura, sia l'ambiente freddo, oppure caldo. Luciani e Bufalini (3) notarono una progressiva diminuzione della temperantura durante i primi periodi del digiuno.

Mentre gli animali digiunavano io misurai ogni giorno la temperatura rettale, avendo cura di far sempre la determinazione alla stessa ora e collo stesso termometro. Lasciavo in sito lo strumento finchè almeno per un minuto non segnasse più alcuna variazione, e ciò allo scopo di mettermi al riparo da ogni causa di errore.

Alcuni animali non presentarono per il fatto di essere digiuni variazioni maggiori di quelle, che si hanno abitualmente. Ciò avveniva malgrado che essi avessero subìta una perdita di peso considerevolissima, che in taluni raggiunse il 18 %. Di più l'inanizione aveva così poca influenza sulla temperatura da non impedire, che, quando essi erano eccitati, oppure costretti a correre presentassero, un aumento di temperatura, come avviene in un animale normale. A questo riguardo giova citare il fatto seguente osservato nel cane n. 5. Terminata la seconda serie d'esperienze avendo somministrata la solita razione agli animali, questo cane, appena vide portare il cibo agli altri, entrò in uno stato di grandissima eccitazione, in cui faceva dei movimenti forti e disordinati. Ciò bastò, perchè la sua temperatura in pochi minuti salisse fino a 39°,2 C. aumentando di 1°,3 C.

In altri animali che si trovavano nelle identiche condizioni dei primi, notai un abbassamento progressivo di temperatura, che in alcuni si limitava ad un grado mentre in altri oltrepassava i tre gradi. I più considerevoli abbassamenti li osservai nell'animale più giovane e più magro. Non tenni calcolo delle depressioni fortissime ottenute in due cani, che morirono, perchè senza dubbio essi si trovavano in condizioni anormali, e non paragonabili cogli altri. Le diminuzioni più forti si osservarono non già negli animali che subirono la massima perdita di peso, ma bensì in quegli animali ed in quei giorni in cui si aveva il massimo di depressione psichica, unitamente coi minimi nella frequenza del respiro. Nelle esperienze fatte a temperatura elevata, si verificò pure una diminuzione nella temperatura rettale, ma in grado più leggero, e questa si osservò precisamente in quegli stessi animali, che offrirono una diminuzione nelle esperienze a bassa temperatura. Non seppi trovare altra causa per questo differente modo di comportarsi degli animali, che l'età e lo stato di nutrizione. Nell'età giovane, ben constatata nel cane n. 1 si ebbe una diminuzione di temperatura in seguito al digiuno. Egualmente agisce una minor provvista di adipe. Il cane, che presentò un abbassamento di temperatura anche quando digiunò in un ambiente riscaldato fu appunto quello, che unitamente all'età giovane

(1) Senator, *Unters. über den fieberhaft. Prozess und seine Behandlung*. Berlin 1873.

(2) Dittmar Finkler, loco cit. pag. 179.

(3) Luciani e Bufalini, Archivio p. le scienze mediche vol. V. pag. 338.

aveva una magrezza considerevole. Tutti gli autori che si occuparono di ricerche analoghe trascurarono di tener conto delle condizioni degli animali sottoposti all'osservazione. Le esperienze sopracitate di Voit e Pettenkofer hanno dimostrato quanto sia grande l'influenza, che esercitano l'età e lo stato di nutrizione sopra il ricambio dell'animale che digiuna. Non mi pare fuor di proposito ammettere, che la stessa influenza sia esercitata anche sulla temperatura, la quale in fin dei conti non è altro che una conseguenza del ricambio più o meno attivo. Senza di questo non potrei darmi ragione dei risultati contradditori da me ottenuti nei diversi animali, che sotto ogni altro rapporto erano in condizioni assolutamente identiche.

Influenza del digiuno e della temperatura sulla respirazione e sul polso.

Jolyet e Lagrolet [1] registrando il polso e la respirazione di animali sottoposti ad una temperatura elevata trovarono, che la respirazione si accelera per causa del calore, è nello stesso tempo aumenta la quantità d'aria introdotta nei polmoni in un dato tempo. Gli stessi autori constatarono pure, che quando la temperatura diventa incompatibile colla vita, prima si arresta la respirazione e poscia il cuore. Calliburcès [2] trovò che le pulsazioni del cuore della rana si accelerano a misura che si eleva la temperatura. Vincent [3] constatò un aumento considerevolissimo nella frequenza della respirazione durante l'ipertermia. In acuni animali le respirazioni raggiungevano il numero di 600 per minuto. Contemporaneamente notò un aumento di frequenza del polso, il quale però raggiungeva il suo massimo solo nell'ultima mezz'ora che precede la morte. Siccome in questo tempo la respirazione è molto rallentata, conchiude che queste due funzioni non vanno di pari passo. Per il calore, il polso tende a diventare regolare nei cani, i quali abitualmente hanno il polso irregolare, l'ampiezza delle pulsazioni diminuisce e la curva si fa marcatamente dicrotica. Schelske trovò che un aumento di temperatura aumenta il numero delle contrazioni del cuore, mentre una diminuzione lo diminuisce. Se le differenze di temperatura sono troppo grandi si ha arresto del cuore, il quale però è capace di ritornare a pulsare quando la temperatura ridiventa normale. Cyon [4] osservò oltre a ciò, che quando il passaggio da una temperatura bassa ad una elevata si fa rapidamente, dapprima invece di un acceleramento si ha una diminuzione nella frequenza delle pulsazioni, e viceversa quando si passa rapidamente da una temperatura elevata ad una temperatura bassa. Egli crede che ciò sia dovuto ad un'azione del vago. Aristow [5] confermò l'osservazione di Cyon, ma ascrive questo fenomeno ad un'azione della temperatura sopra i centri motori del cuore e sopra il tessuto muscolare, perchè non è influenzato dall'atropina la quale paralizza il vago. Luciani [6] trovò che una temperatura elevata

[1] Jolyet e Lagrolet, Gaz. Hebd. des sciences medicales de Bordeaux. 1882, n. 12.

[2] Calliburcès, Acad. des sciences. Paris 28 decembre 1857 e 25 oct. 1858.

[3] Vincent, *Recherches experim. sur l'hyperthermie et les causes de la mort dans celle ci.* Paris 1887. pag. 35.

[4] Cyon, Bericht d. Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1866. pag. 256.

[5] Aristow, Arch. f. Anat. u. Phys. physiol. Abth. 1879. pag. 198.

[6] Luciani, Arb. aus d. physiol. Anstalt. zu Leipzig 1873. pag. 62.

aumenta il numero delle pulsazioni, la loro forza e la loro altezza, mentre una temperatura bassa le rende meno numerose, più deboli e meno alte.

Negli stessi animali che servirono per le precedenti esperienze feci pure delle osservazioni sopra il modo di comportarsi del polso e della respirazione. Mentre gli animali se ne stavano sdraiati nella posizione, che loro piaceva tenere, applicavo sempre sul medesimo punto del torace un timpano di Marey, che portava un bottone di sughero attaccato nel centro della membrana elastica. Il timpano era fissato ad un sostegno per mezzo d'un'asta di piombo. Grazie alla pieghevolezza di quest'asta, era possibile graduare convenientemente la pressione del bottone sul torace e nello stesso tempo di applicare il timpano sempre nello stesso punto senza muovere per nulla il cane. I cambiamenti di volume fatti subire alla capacità del timpano dai movimenti respiratori e dai battiti cardiaci venivano trasmessi per mezzo di un tubo di gomma nel modo ordinario ad un timpano a leva, che li registrava sopra un cilindro infumato.

Dai tracciati ottenuti paragonati fra di loro ho veduto, che 24 ore dopo l'ultimo pasto i movimenti respiratori si rallentano grandemente e si fanno molto meno profondi. Si hanno qui due fenomeni che concorrono a diminuire l'acido carbonico emesso, poichè noi sappiamo da Vierordt (1), che la quantità di acido carbonico emesso è proporzionale al numero ed alla profondità delle respirazioni. Il fatto, che le respirazioni oltre al diventare meno numerose diventino pure meno profonde, elimina il dubbio, che la maggior frequenza osservata poche ore dopo il cibo, sia dovuta ad impedimento offerto ai movimenti del diaframma dallo stomaco disteso.

Col progredire del digiuno non si nota un proporzionato rallentarsi dei movimenti respiratori. Il notevole rallentamento delle prime 24 ore continua bensì per tutto il periodo del digiuno, ma progredisce solo leggermente. Se gli animali sono tenuti in un ambiente riscaldato, nelle prime 24 ore di digiuno si osserva invece un leggero acceleramento. Solo dopo 54 ore incomincia a notarsi una diminuzione nella frequenza respiratoria di alcuni animali, e questa diminuzione tiene un decorso abbastanza regolarmente progressivo. Riguardo alla forma del tracciato si vede che quando la temperatura ambiente è elevata l'atto respiratorio impiega minor tempo per compiersi, ed è seguito poi da una lunga pausa; se la temperatura è bassa l'atto respiratorio si compie più lentamente e le pause che intercedono fra due respirazioni sono più brevi.

Nel digiuno non solo si rallenta il respiro, ma anche il polso. Quando gli animali digiunano al freddo il rallentamento raggiunge in media un quarto delle pulsazioni, che l'animale aveva prima di digiunare. Se la temperatura dell'ambiente è elevata il rallentamento si fa molto più considerevole ed in alcuni animali il numero delle pulsazioni arriva solo alla metà di quello, che era prima del digiuno. Siccome nella camera si sentiva un forte odore di ammoniaca, perchè favorita dalla temperatura elevata si decomponeva l'orina emessa dagli animali, credetti dapprima che il rallentamento fosse dovuto ad una irritazione delle terminazioni del vago nei polmoni. Onde eliminare questo dubbio lavai il pavimento con una soluzione di acido cloridrico, riescii a cacciare i vapori d'ammoniaca, ma il rallentamento persistette.

Oltre al notevole rallentamento il polso negli ultimi giorni d'esperienza si fece

(1) Vierordt, *Respiration,* Handwörterbuch der Physiologie v. Rudolph Wagner, Bd. 2.

molto irregolare e talora presentava dei periodi di attività in cui si avevano tre o quattro pulsazioni seguite da periodi di pausa che duravano per un tempo altrettanto lungo quanto era stato quello di attività. I tracciati di questi periodi presentano una grande rassomiglianza coi tracciati dei periodi che il Luciani osservò nel cuore della rana.

Nel digiuno l'impulso cardiaco è molto meno alto e la curva presenta delle elevazioni secondarie più numerose. Malgrado queste irregolarità, nella maggior parte degli animali si mantenne quasi costante il rapporto tra il numero delle respirazioni e quello delle pulsazioni.

Conclusioni.

Riepilogando i fatti principali osservati in queste esperienze si può dire:

1° La quantità di acido carbonico emessa durante un lavoro è superiore a quella eliminata nel riposo, qualunque sia lo stato di nutrizione dell'animale.

2° La quantità di acido carbonico eliminata in seguito ad una fatica è minore nell'inanizione, che allo stato normale.

3° La quantità di acido carbonico eliminata nelle prime ore dopo il lavoro è più grande nel digiuno, che allo stato normale.

4° La perdita di peso è più rapida se l'animale, che digiuna viene affaticato. Per un lavoro di 6 ore l'animale si distrugge tanto, quanto se digiunasse quattro giorni di più.

5° Anche quando l'animale è molto deperito per il digiuno, esiste sempre una proporzione tra il lavoro fatto e la quantità di organismo distrutto.

6° La perdita di peso non varia in modo sensibile tanto se l'animale digiuna a temperatura bassa, quanto se digiuna a temperatura elevata.

7° Colla razione di Voit raddoppiata, in 3 o 4 giorni l'animale ricupera il peso perduto in una settimana di inanizione.

8° Quando un animale non mangia altro che carne dopo aver digiunato non può riparare alle perdite subìte, quantunque gliene venga somministrato in ragione del 2,63 °/₀ del proprio peso.

9° La temperatura rettale si comporta diversamente nei vari animali. Negli animali grassi non si osserva un abbassamento anche dopo una perdita del 18 °/₀ in peso, negli animali magri e giovani con perdite minori in peso la temperatura può scendere fin sotto i 35°.

10° Il numero delle respirazioni va diminuendo dopo il primo giorno di digiuno e verso il 6° giorno da 18 può discendere fino a 6 senza che aumenti la loro profondità.

11° Il numero delle pulsazioni cardiache diminuisce nell'animale, che digiuna. Se la temperatura è elevata la diminuzione è più forte ed il loro numero può scendere a 42 per minuto.

Laboratorio di fisiologia della R. Università di Torino, luglio 1886.

Sulla forma cristallina dell'ossido cromico.

Memoria del Socio G. STRUEVER

letta nella seduta del 3 marzo 1889.

(Con due tavole).

L'ossido cromico fu ottenuto allo stato cristallizzato per la prima volta dal Wöhler (1) per decomposizione dell'acido clorocromico ad elevata temperatura. I suoi cristalli, studiati da Gustavo Rose (2) presentavano la combinazione romboedrica }100{ }$10\bar{1}${ }111{ }$31\bar{1}${ coll'angolo caratteristico del romboedro fondamentale $= 85° 55'$, dal quale si calcola $a:c$ (assi di Weiss) $= 1:1.3682$. Con ciò fu messo fuor di dubbio l'isomorfismo dell'ossido cromico coll'ossido ferrico e coll'allumina. Tutti i cristalli erano poi geminati, con asse normale ad una faccia di }100{ e a giustapposizione, e di più allungati nel senso [011] qualora si prenda per piano di geminazione la faccia (100).

Ebelmen (3) fondendo assieme dell'ossido cromico, del carbonato di calcio e dell'acido borico fuso, ottenne cristalli microscopici di ossido cromico della combinazione }100{ }111{ che non potè, del resto, misurare.

Blake (4) misurò cristalli tavolari prodottisi nei forni per riduzione dell'acido cromico del cromato potassico; essi presentavano dominanti le forme }111{ }100{ con }110{ e }$10\bar{1}${. L'autore dà l'angolo del romboedro }100{ $= 85° 22'$ e il rapporto $a:c = 1:1.39045$.

Il Miller (5) finalmente, sopra cristalli della stessa origine come quelli del Blake, trovò l'angolo del romboedro }100{ $= 85° 52'$.

Riguardo alla forma dell'ossido cromico si possono poi consultare le opere cristallografiche del Rammelsberg (6).

Alcuni anni fa, ebbi dalla squisita gentilezza del professore Alfonso Cossa una numerosa serie di cristalli di ossido cromico da lui ottenuti collo stesso metodo seguito

(1) Pogg. Ann. 33. p. 341. 1834.

(2) Ibid. 33. p. 344, 1834.

(3) *Recueil des travaux scientifiques.* Paris. 1855. 8°. p. 150. La Memoria ivi riportata: *Sur une nouvelle méthode pour obtenir des combinaisons cristallines par la voie sèche et sur les applications à la reproduction des espèces minérales* (1er mémoire), è del 1847.

(4) Silliman Am. Journal of Sc. 2a ser. X, 352. — Ann. d. Chemie und Pharm. 78, p. 121. 1851.

(5) Phil. Mag. (4) 16, 293.

(6) Handbuch der kryst. Chemie. Berlin, 1855, 8°, p. 31. — Handbuch der kryst.-physik. Chemie. Abth. I, p. 153. Leipzig, 8°, 1881.

dal Woehler, cioè col trattamento dell'acido clorocromico ad elevata temperatura. L'importanza dell'ossido cromico per la teoria dell'isomorfismo, l'analogia della formazione dei cristalli favoritimi dal Cossa con quella, ormai da tutti ammessa, dei cristalli di ematite vulcanica, non che la straordinaria bellezza del materiale che ho sott'occhio, mi giustificheranno se torno sull'argomento della forma cristallina dell'ossido cromico, il cui isomorfismo in genere colla allumina e coll'ossido ferrico fu già messo fuori d'ogni dubbio dai primi risultati ottenuti da Gustavo Rose.

Le forme semplici da me trovate sono le seguenti (fig. 1):

o	a	b	r	e	n	π	χ
$\}111\{$	$\}10\bar{1}\{$	$\}2\bar{1}\bar{1}\{$	$\}100\{$	$\}110\{$	$\}31\bar{1}\{$	$\}210\{$	$\}21\bar{1}\{$

cui si deve aggiungere un prisma dodecagono probabilmente del simbolo $\}5\bar{1}\bar{4}\{$, ma non indubbiamente determinabile.

Queste forme costituiscono numerose combinazioni, e sono:

$\}111\{$	$\}100\{$	$\}110\{$	—	fig. 2.			
„	„	$\}10\bar{1}\{$	—	fig. 3 e fig. 4.			
„	„	„	$\}2\bar{1}\bar{1}\{$	fig. 5.			
„	„	„	$\}31\bar{1}\{$	fig. 6 e fig. 7.			
„	„	$\}110\{$	„	fig. 8 e fig. 9 ($\}110\{$ dal lato opposto non disegnato).			
„	„	$\}10\bar{1}\{$	„	$\}210\{$	fig. 10.		
„	„	„	„	$\}110\{$	fig. 11.		
„	„	„	„	„	$\}21\bar{1}\{$	fig. 12.	
„	„	„	$\}210\{$	„	$\}2\bar{1}\bar{1}\{$	fig. 13.	
„	„	„	„	$\}31\bar{1}\{$	„	fig. 14.	
„	„	„	„	„	$\}110\{$	fig. 15.	
„	„	„	„	„	„	$\}2\bar{1}\bar{1}\{$	fig. 16.
„	„	„	„	„	„	$\}21\bar{1}\{$	fig. 17.

Tali combinazioni variano poscia molto di aspetto secondochè si presentano in tavole sottili per preponderante sviluppo della base ovvero prismatiche, allungate nel senso [111]. In queste ultime, dominano, fra le faccie laterali, quasi esclusivamente quelle del prisma esagonale di secondo ordine $\}10\bar{1}\{$ e assai di rado vi sono ugualmente sviluppate le faccie dei due prismi esagonali; nelle prime invece vi ha maggiore varietà inquantochè fra le forme laterali ora $\}10\bar{1}\{$ è maggiormente sviluppata, ora $\}100\{$, ora $\}110\{$, ora $\}10\bar{1}\{$ e 100$\{$, ora $\}10\bar{1}\{$ e $\}31\bar{1}\{$, ora queste due ultime forme unitamente a $\}210\{$. L'aspetto dei cristalli è reso ancora più vario dall'ineguale sviluppo delle faccie appartenenti ad una medesima forma semplice, massime nei gemelli.

Passo ora a descrivere brevemente l'aspetto fisico delle faccie spettanti alle singole forme semplici.

La base $\}111\{$ presenta senza dubbio il maggiore interesse.

Nei cristalli fortemente appiattiti secondo la base, questa rivela costantemente una triplice striatura, le cui tre direzioni s'incontrano ad angoli di 60° e sono parallele agli spigoli della base colle tre faccie più vicine del romboedro inverso $\}110\{$. Assai sovente si riconosce distintamente che la striatura è prodotta da combinazione

oscillatoria della base colle tre faccie più vicine di $\{110\}$, ovvero da sovrapposizione di sottili lamelle triangolari lateralmente limitate da queste tre faccie del suddetto romboedro inverso. Altre volte le strie sono finissime, ma sempre orientate nel medesimo modo, talchè non vi può essere dubbio alcuno che esse anche in questi casi sono dovute a combinazione oscillatoria di $\{111\}$ con $\{110\}$. Talora di questi tre sistemi di strie si osservano due soli, o anche più sovente uno solo, massime nei gemelli ad asse normale a $(2\bar{1}\bar{1})$, a giustapposizione, e allungati nel senso $[0\bar{1}1]$, che descriverò più sotto.

Quando le strie in discorso sono finissime, o, locchè vuol dire lo stesso, quando le lamelle triangolari sovrapposte sono sottilissime e in modo quasi continuo ridotte di dimensioni, i rialzi sulla base presentano l'aspetto di piramidi triangolari, i cui spigoli dall'apice della piramide sono diretti normalmente verso quelli che la base forma colle tre faccie più vicine di $\{100\}$ fig. 18.

Qualche rara volta si vedono sulla base liscia dei medesimi cristalli lamellari dei piccoli incavi o, per così dire, delle piccole piramidi negative, sempre formate da tre faccie del romboedro inverso $\{110\}$ e, come è senz'altro chiaro, in posizione inversa rispetto ai triangoli e alle piramidi trigonali sopra descritti.

Mentre nei cristalli laminari non vediamo che i disegni triangolari quali furono descritti più sopra, la cosa cambia affatto passando ai cristalli più grossi o allungati alquanto nel senso $[111]$. Ivi invece vediamo dei rialzi sotto forma di piramidi esagono-regolari, le cui faccie cioè sono in zona con quelle delle forme $\{31\bar{1}\}$ e $\{210\}$, mentre non di rado l'apice della piramide è troncato dalla base. Le faccie di tali rialzi piramidali sono sempre finamente striate nel senso orizzontale e generalmente curve, cioè a superficie cilindrica concava (fig. 19). Singolare è il fenomeno che questi rialzi presentano talora in certi cristalli allungati, sottili dalla parte ove erano impiantati sulla parete del tubo, e rapidamente ingrossati verso l'estremità libera. Mentre verso quest'ultima parte i rialzi sono terminati da faccie curve e striate quali or ora le abbiamo descritte, verso il lato sottile essi presentano, splendenti e perfettamente liscie e piane, faccie appartenenti alle forme $\{31\bar{1}\}$ $\{210\}$ $\{100\}$ $\{110\}$ (fig. 31).

Il prisma $\{10\bar{1}\}$ si presenta in tutti i cristalli laminari con faccie splendentissime e perfettamente piane che si prestano egregiamente alle misure goniometriche; nei cristalli più grossi nel senso $[111]$, le sue faccie sono invece sovente alquanto curve, forse per un principio di fusione dai cristalli subìta per essere stati esposti in fine ad una temperatura troppo elevata; non di rado le faccie di $\{10\bar{1}\}$ mostrano anche striature nel senso degli spigoli con $\{100\}$, locchè impedisce bensì esatte misure, ma riesce comodo per riconoscere con maggiore sicurezza certi gemelli ad asse $[111]$ e a penetrazione.

Le faccie del prisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ ora strette, ora larghe, sono quasi sempre meno piane, benchè liscie e splendenti.

Perfettamente piane e liscie sono le faccie delle due piramidi esagono-regolari $\{31\bar{1}\}$ e $\{210\}$, almeno nei cristalli tavolari e in quelli più grossi che non svelano traccia di subita fusione superficiale. Ed altrettanto dicasi dello scalenoedro inverso $\{21\bar{1}\}$, il quale, del resto, non fu trovato bene sviluppato, che in una dozzina circa di cristalli o gruppi tavolari.

Dei due romboedri, quello diretto }100{, presente in tutti i cristalli, generalmente è assai sviluppato, ma non di rado anche ridotto a relativamente piccole faccette. Benchè splendenti e liscie, pure, per essere quasi sempre leggermente curve, le sue faccie sono inferiori, per perfezione, a quelle delle faccie di }$10\bar{1}${ }$31\bar{1}${ }210{.

Il romboedro inverso }110{ è ancora assai frequente e mostra faccie splendentissime, ma, a motivo della fina striatura orizzontale, di rado si presta a misure paragonabili a quelle che si ottengono nelle zone delle piramidi.

Il prisma dodecagono }$5\bar{1}\bar{4}$?{ non fu osservato che poche volte in strettissime faccette splendenti ma non esattamente misurabili. Il suo simbolo acquista forse qualche probabilità dalla circostanza che la forma sarebbe in zona con }111{ e }211{, benchè precisamente nei cristalli in cui si osservò lo scalenoedro }$21\bar{1}${, il prisma dodecagono in questione manca affatto.

Dalla descrizione data dell'aspetto fisico delle singole forme, i cui simboli si deducono, del resto, tutti da almeno due zone, segue ad evidenza che le faccie che si prestano alle più esatte misure, sono quelle del prisma }$10\bar{1}${ e delle due piramidi }$31\bar{1}${ e }210{. Quindi il calcolo della costante cristallografica dell'ossido cromico fu unicamente fondato sopra misure ottenute da angoli fra le sovraddette forme, ed anzi furono scelti soltanto degli angoli misurati sovra faccie riflettenti nettamente il reticolo del cannocchiale del goniometro.

Sovra tre cristalli dei più perfetti si trovò

	$(10\bar{1}):(31\bar{1})$	$(31\bar{1}):(210)$
1.	28° 35′	18° 55′
2.	28° 33′	18° 52′
3.	28° 35′ 30″	18° 50′ 30″
media	= 28° 34′ 30″	18° 52′ 30″

Prendendo per base del calcolo l'angolo $(10\bar{1}):(31\bar{1}) = 28°34'30''$ o il suo complementare $(31\bar{1}):(111) = 61°25'30''$ si trova per $(31\bar{1}):(210)$ il valore 18° 52′ 21″, il quale va tanto bene di accordo col valore medio trovato di 18° 52′ 30″, che possiamo ritenere l'angolo $(31\bar{1}):(111) = 61°25'30''$ come fondamentale. Da esso si calcola il seguente quadro degli angoli, fra i quali, per comodità del lettore, figurano parecchi che sono somme o differenze di altri angoli parimente indicati.

	calcolati	trovati Strüver	G. Rose	Blake	Miller
$(111):(31\bar{1})$	= 61° 25′ 30″ *	61° 25′ 30″	—	—	—
id. :(100)	= 57 50 2	—	—	58° 5′ *	—
id. :(110)	= 38 29 8	—	—	38° 22′ (calc. 38° 45′)	—
id. :(210)	= 42 33 9	—	—		—
id. :$(21\bar{1})$	= 64 34 23	—	—	—	—
(100):(010)	= 94 17 36	—	94° 5′	94° 38′ calc.	94° 8′
id. :(110)	= 47 8 48	—	—	—	—
id. :$(31\bar{1})$	= 26 2 46	—	—	—	—
id. :(210)	= 27 23 1	—	—	—	—
id. :$(21\bar{1})$	= 36 14 42	—	—	—	—

	calcolati	trovati Strüver	G. Rose	Blake	Miller
$(31\bar{1}):(210)$	$= 18^{\circ}52'21''$ *	$18^{\circ}52'30''$	—	—	—
id. $:(21\bar{1})$	$= 10\ \ 11\ \ 56$	—	—	—	—
$(21\bar{1}):(01\bar{1})$	$= 53\ \ 45\ \ 18$	—	—	—	—
$(110):(210)$	$= 19\ \ 45\ \ 47$	—	—	—	—
$(100):(0\bar{1}\bar{1})$	$= 83\ \ 40\ \ 50$	—	—	$83^{\circ}15'$ (calc. $83^{\circ}10'$)	—

La media dell'angolo (100):(010) dedotta dalle osservazioni, poco concordanti fra loro, di G. Rose, Blake e Miller, si trova $= 94^{\circ}17'$, valore quasi identico a quello dedotto dalle nostre misure.

Assai notevoli sono i cristalli, ottenuti dal Cossa, per le molteplici associazioni regolari che presentano.

I. *Gemelli ad asse* [111].

Mentre relativamente pochi cristalli sono semplici, abbondano invece i gemelli per i quali è asse di geminazione la normale alla base ossia la linea di simmetria trigonale. Quasi tutte le combinazioni sopra menzionate si presentano sotto forma di gemelli secondo la legge accennata, e quello che è certamente più interessante, tali gemelli rivelano, si può dire, tutte le associazioni possibili. Così vi sono gemelli in cui i due individui sono sovrapposti l'uno all'altro in modo che si toccano colla base, altri ve ne ha a completa penetrazione colla base comune, altri a giustapposizione ossia ad asse normale a $(2\bar{1}\bar{1})$ ed a base comune, altri ancora che in parte sono a penetrazione, in parte a giustapposizione, altri ancora polisintetici.

Furono raffigurati alcuni pochi soltanto degli esempî più interessanti.

Al n. 20 è disegnato un gemello della combinazione $\}111\{\ \}10\bar{1}\{\ \}100\{$ in cui i due individui sono sovrapposti l'uno all'altro di modo che lateralmente si vedono coincidenti le faccie di $\}10\bar{1}\{$ dei due individui, mentre quelle di $\}100\{$ vi formano tre angoli rientranti.

La fig. 21 rappresenta un gemello a penetrazione della combinazione $\}111\{\ \}10\bar{1}\{$ $\}2\bar{1}\bar{1}\{\ \}100\{\ \}31\bar{1}\{\ \}210\{$, nel quale si vedono angoli rientranti non solo alle due estremità, ma anche lateralmente per la ricomparsa delle faccie del romboedro $\}100\{$.

Ma assai più varî sono i gemelli a giustapposizione che si toccano con un piano di $\}2\bar{1}\bar{1}\{$ comune, mentre hanno in pari tempo comune la base. Essi rassomigliano talmente agli analoghi gemelli della ematite vulcanica, che a prima vista si prenderebbero per tali, tanto più che vi ha anche color nero superficiale e vivo splendore quasi metallico nei nostri cristalli. Tutti sono allungati nel senso normale alla faccia $(01\bar{1})$ qualora si prenda per piano di geminazione e di giustapposizione la faccia $(2\bar{1}\bar{1})$. In pari tempo svelano una notevole differenza nello sviluppo delle varie forme semplici alle due estremità, di attacco alla parete l'una libera l'altra.

Alcuni degli esempî più notevoli sono raffigurati, projettati sopra la base comune, ai n.[i] 22-31.

Al N. 22 vediamo uno di tali geminati tavolari che presenta la combinazione $\}111\{\ \}100\{\ \}10\bar{1}\{\ \}31\bar{1}\{\ \}210\{$, ma mentre dal lato ove era attaccato alla parete

del tubo in cui si produsse, o ad altro cristallo, le faccie delle due piramidi sono sviluppatissime sopra e sotto, all'estremità libera di tutte le faccie piramidali non si scorge che una sola di $\{210\}$ comune ai due individui.

La figura 23 rappresenta invece un gemello della combinazione $\{111\}$ $\{100\}$ $\{10\bar{1}\}$ $\{31\bar{1}\}$ $\{210\}$ $\{110\}$ in cui le piramidi sono sviluppatissime verso l'estremità libera, ma dal solo lato superiore, mentre dal lato opposto non si vedono che poche faccie ridotte ad esilissime striscie e vi domina quasi assolutamente la base. Tale gemello si distingue inoltre da quello precedente per ciò che nella zona $[01\bar{1}]$ comune ai due individui sono sviluppate due faccie del romboedro $\{110\}$ mentre nel primo vi si osservano due faccie di $\{100\}$.

Assai sovente, in questa medesima zona, secondo la quale i due individui riuniti a gemello sono costantemente allungati, si vede sviluppata una faccia di $\{100\}$ in uno, e invece una faccia di $\{110\}$ nell'altro. Si confrontino le figure 24 e 25, 26 e 27, 28 e 29, ai quali numeri furono raffigurati tre di tali gemelli proiettati sulle due faccie della base.

I due individui riuniti a gemello sono poscia per lo più di diversa larghezza, come ciò si vede p. e. distintamente ai n[i]. 24, 25, 30, 31, mentre all'estremità libera terminano generalmente con una faccia di $\{10\bar{1}\}$ comune ossia sono della medesima lunghezza. Pure vi ha qualche eccezione a quest'ultima regola, essendo talvolta dei due individui uno più corto dell'altro (fig. 31).

Non sempre l'aggruppamento è cosi semplice come negli esempî raffigurati ai n[i]. 22-25, 30, 31; assai sovente, e sovrattutto nei cristalli lamellari più larghi, vi ha un maggior numero di individui, sempre riuniti secondo la medesima legge, talchè non vi ha che individui in due posizioni diverse, ma, a motivo della variabilissima disposizione dei singoli individui, gli aggruppamenti si presentano con contorni talvolta assai irregolari; di più, tali aggruppamenti rivelano quasi sempre distribuzione diversa degli individui secondochè si guardano da un lato o dall'altro della base comune. Le figure 26 e 27, 28 e 29, 41 e 42 rappresentano tre casi che, senza ulteriore descrizione, si intenderanno facilmente dalla disposizione dei disegni triangolari caratteristici della base.

II. *Gemelli ad asse normale ad una faccia di* $\{100\}$.

Questa legge, come abbiamo visto, fu scoperta da G. Rose, ma non è fuor di proposito di tornarci sopra svelando i nostri cristalli maggiore variabilità nella disposizione degli individui.

Molti dei gemelli si presentano sviluppati come fu raffigurato al n.° 33, cioè a giustapposizione. La figura 32, nella quale si vedono due individui della combinazione $\{10\bar{1}\}$ $\{100\}$ $\{31\bar{1}\}$ $\{110\}$ $\{111\}$ proiettati sopra una faccia di $\{10\bar{1}\}$ comune ai due individui semplici supponendo (010), normale al piano del disegno, come piano di geminazione, renderà più intelligibile la disposizione del geminato. È anzitutto chiaro che l'estremità libera del gemello corrisponde a quel lato della fig. 32, ove si vedono le basi formare un angolo rientrante, ma poscia per il preponderante sviluppo delle faccie appartenenti alla zona $[101]$ comune ai due individui si ottiene

l'aspetto di un prisma ad otto faccie due a due parallele cioè due parallele al piano di geminazione, due di $\}10\bar{1}\{$ comuni ai due individui, e quattro della piramide $\}31\bar{1}\{$. La terminazione del prisma è formata da alcune soltanto delle faccie rappresentate nella figura teorica, come risulterà chiaro senz'altro dal paragone delle due figure 32 e 33 ove furono iscritti i simboli corrispondenti sovra tutte le faccie. L'angolo tra le due basi è di 64° 19′ 56″.

Oltre a questi gemelli a giustapposizione vi sono altri a penetrazione parziale, in cui cioè uno dei due individui continua al di là dell'altro. Un tale gemello potrebbe anche considerarsi come costituito da tre individui a giustapposizione, il primo e il terzo essendo in posizione parallela, come di fatti, vi sono numerosi gemelli polisintetici, composti di maggior numero di individui, e che si presentano come un *quid intermedium* tra un gemello polisintetico a giustapposizione in cui tutti gli individui di numero d'ordine pari, rispettivamente impari, sono in identica posizione, e una sequela di gemelli a penetrazione tutti parallelamente disposti e colla zona $[10\bar{1}]$ comune. Disgraziatamente questi ultimi gemelli polisintetici sono a faccie quasi tutte curve per aver subìto un principio di fusione superficiale, talchè dovetti limitarmi a constatare in genere la loro natura senza poter mettere fuori di dubbio i simboli di tutte le singole faccie. Mi propongo quindi di tornare sulla questione di questi singolari e complicatissimi gemelli polisintetici purchè al Cossa riesca di ottenerne di meglio sviluppati.

III. *Altre associazioni regolari.*

Forse più interessanti ancora dei gemelli che ho fin qui descritti e che presentano le diverse modalità delle due leggi di geminazione conosciute anche nella ematite, sono certe associazioni di due od anche più individui, le quali difficilmente possono spiegarsi ammettendo una delle solite leggi di geminazione per cui asse di rivoluzione è la normale ad una faccia possibile ovvero uno spigolo possibile.

Vi ha fra i miei cristalli un grandissimo numero, un buon terzo fra parecchie centinaia, di aggruppamenti di due individui lamellari secondo la base e allungati nel senso normale ad una faccia di $\}2\bar{1}\bar{1}\{$, i quali s'incrocicchiano in modo che una faccia di $\}31\bar{1}\{$ dell'uno è parallela alla base dell'altro, e *viceversa*, mentre in pari tempo coincide nei due cristalli la zona $[111,\ 31\bar{1}]$; le basi dei due individui si tagliano quindi in linee parallele a questa zona e normali ad una delle tre direzioni di strie caratteristiche della base; di più, segue che i due individui hanno parallele due faccie di $\}2\bar{1}\bar{1}\{$ e non di $\}10\bar{1}\{$ come era il caso dei gemelli con asse normale ad una faccia del romboedro $\}100\{$. La disposizione delle faccie dei due individui è resa evidente dalla fig. 37, la quale rappresenta la loro projezione stereografica sopra il piano (2,1) comune ai due individui; i poli rappresentati da punti circondati da circoletti più grandi corrispondono alle faccie coincidenti o parallele nei due individui, i poli senza circoletti e distinti da lettere non sottolineate, ad un individuo, i poli circondati da circoletti più piccoli e contrassegnati da lettere sottolineate all'altro individuo.

Le basi dei due individui formano fra loro un angolo di 61° 25′ 30″, e lo stesso angolo è formato dalle faccie di $\}10\bar{1}\{$ normali a $(2\bar{1}\bar{1})$: inoltre due faccie della piramide $\}31\bar{1}\{$ appartenenti alla zona $[2\bar{1}\bar{1}]$ si trovano vicine l'una all'altra formando

fra di loro un angolo di 4° 16′ 30″, come anche due faccie di }110{ sono molto ravvicinate.

Ora perchè le due basi formino l'angolo suindicato e i due individui abbiano una faccia di }2$\bar{1}\bar{1}${ comune basterebbe supporre come piano di geminazione una faccia di piramide che facesse colla base o l'angolo di 30° 42′ 45″, metà dell'angolo (111) : (31$\bar{1}$) o l'angolo complementare al primo, cioè di 59° 17′ 15″. Per determinare il simbolo di una tale piramide, torna assai utile e comoda la formola data dal Miller nel suo *Treatise on crystallography* al paragrafo 128, tenendo conto della condizione generale cui devono soddisfare i simboli delle piramidi esagono-regolari che cioè $h+k+l=3k$ ove $h>k>l$. Chiamando A il polo di (100), O il polo di (111), e P il polo di (hkl) si trova

$$\sqrt{3}\,\frac{\tan PO}{\tan AO}=\frac{h-k}{k}$$

Ponendo ora una volta PO = 30°42′45″, l' altra volta PO = 59°17′15″ e AO in ambedue i casi = 57° 50′ 2″, si trova nel primo caso

$$\frac{h-k}{k}=0.6471$$

e ponendo $k=1$,

$$h=1.6471\,;\; k=1\,;\; l=2k-h=0.3529.$$

Facendo ora $l=1$, troviamo la proporzione

$$h:k:l::\ 4.667:2.834:1$$

per la quale con grande approssimazione possiamo mettere

$$h:k:l::\ 46\tfrac{2}{3}:28\tfrac{1}{3}:10::140:85:30::28:17:6.$$

Difatti calcolando l'angolo (111) : (28. 17. 6) per il nostro ossido cromico troviamo 30° 42′ 39″, il quale valore differisce di soli 6″ da 30° 42′ 45″. Nel secondo caso troviamo

$$\frac{h-k}{k}=1.83368$$

e da ciò come sopra

$$h:k:l::\ 2.83368:1:-0.83368.$$

Possiamo con grande approssimazione porre

$$h:k:l\ ::28\tfrac{1}{3}:10:-8\tfrac{1}{3}::85:30:-25::17:6:-5.$$

Calcolando l'angolo (111) : (17. 6. $\bar{5}$) si trova 59° 16′ 58″, il quale valore differisce di soli 17″ da 59° 17′ 15″.

Entro i limiti dell'osservazione, si potrebbe quindi ammettere una legge di geminazione per la quale l'asse di rivoluzione fosse normale ad una faccia della piramide }28. 17. 6{ o della piramide }17. 6. $\bar{5}${. Se invece della normale ad una faccia delle piramidi trovate si volesse prendere per asse di geminazione la linea d'altezza di questa faccia ossia l'intersezione di essa colla faccia di }2$\bar{1}\bar{1}${ ad essa normale, si

troverebbe per asse di geminazione nel primo caso lo spigolo [$\overline{29}$. 22. 73] od analogo, nel secondo caso, lo spigolo [2. 11. 20] od analogo.

Osserviamo qui anzi tutto, che la prima legge per la quale sarebbe asse di geminazione la normale ad una faccia di }28. 17. 6{ ovvero uno spigolo [$\overline{29}$. 22. 73] non si può ammettere nel nostro caso, vista la distribuzione delle faccie di }100{ e di }110{ quale si vede sugli aggruppamenti e quale fu rappresentata nella projezione stereografica fig: 37 e nelle figure 34, 35, 36, di cui la prima rappresenta la projezione del gruppo sopra la base di uno dei due individui, la seconda la sua projezione sopra la faccia comune di }2$\bar{1}\bar{1}${ e la terza ripete, più in grande, la posizione del secondo individuo della fig. 34.

Si noti ancora che assai sovente l'aggruppamento si presenta sotto aspetto molto più complicato, per essere i due individui semplici disegnati ai N. 34 e 35 in realtà sostituiti da una serie di individui più o meno numerosi parallelamente aggruppati.

Resterebbe quindi come sola legge ammissibile, entro i limiti dell'osservazione, quella per la quale asse di rivoluzione sarebbe la normale ad una faccia di }17. 6. $\bar{5}${ ovvero uno spigolo [2. 11. 20] od analogo.

Ma è lecito domandare se una simile legge di geminazione abbia qualche probabilità a suo favore. Avverto anzitutto che non si potrebbe sostituire a quel simbolo un altro più semplice di piramide vicina senza uscire di molto dai limiti dell'osservazione, anche astrazione fatta dal perfetto e costante parallelismo, in principio annunziato, della base di un individuo con una faccia di }31$\bar{1}${ dell'altro. Di più, una piramide di così complicato simbolo non solo non si osserva nel nostro ossido cromico ma non si conosce neppure nella ematite e nel corindone, isomorfi coll'ossido cromico, anzi, per quanto mi sappia, non fu mai trovata sopra nessuna delle sostanze romboedriche ed esagonali che fin qui si conoscono. Da ciò segue che è per lo meno assai dubbia l'esistenza di una simile legge di geminazione.

Dall'altra parte, ci si presenta un modo assai più semplice, e mi pare anche più naturale, di spiegare la costanza della singolare associazione in discorso. Difatti, è ovvio domandare se una regolare associazione, non esprimibile con una semplice legge di geminazione nel senso sinora comunemente adottato, fra cristalli della stessa composizione e della stessa forma, non sia *a priori* assai più probabile di una tale associazione fra cristalli di diversa composizione e di forma diversa. Fra i tanti esempî ormai noti di questi ultimi aggruppamenti basta ricordare uno solo, quello che più si accosta al caso nostro, cioè la regolare sovrapposizione di cristalli di rutilo sopra l'ematite, la quale procede in modo che una faccia del prisma }100{ del rutilo è parallela alla base dell'ematite e l'asse di simmetria principale del rutilo normale ad una delle direzioni delle strie triangolari della base dell'ematite. L'analogia tra l'esempio addotto e il nostro caso è senz'altro evidente, e certamente è più plausibile di supporre una influenza orientatrice tra cristalli di una medesima sostanza che tra cristalli diversi per composizione e per forma.

Che un tal modo di vedere non è privo di fondamento, è dimostrato ancora dalle due seguenti osservazioni che potei fare sugli stessi cristalli di ossido cromico.

In qualcuno degli aggruppamenti or ora descritti si vede come ad un primo individuo si associano due altri, sempre nel modo sopra esposto, ma l'uno normale ad

uno dei tre sistemi di strie della base del primo, l'altro ad un altro di tali sistemi. Non mi fu dato di vedere alcun esemplare in cui si sovrapponessero al primo individuo tre altri normali alle tre direzioni di strie, a completa analogia coll'associazione nota fra il rutilo e l'ematite.

Ma il fatto forse più convincente è fornito da un piccolo numero di aggruppamenti che differiscono da quelli sopra descritti soltanto in ciò che non sono più parallele fra loro la base di un individuo con una faccia di }31$\bar{1}${ dell'altro, e *viceversa*, bensì la base dell'uno con una faccia del prisma }10$\bar{1}${ dell'altro e *viceversa*, talchè le basi dei due individui si incrocicchiano ad angolo retto rimanendo, del resto, le linee d'intersezione dei due individui nella zona [111, 31$\bar{1}$] od analoga ossia normali ad una delle tre striature della base. Si confrontino le figure 38, 39, 40 la prima delle quali presenta l'aggruppamento proiettato sopra la base di uno dei due individui, la seconda la sua proiezione sopra la faccia di }2$\bar{1}\bar{1}${ comune ai due individui, e l'ultima la proiezione stereografica sopra la medesima faccia. Per questa proiezione stereografica valgono gli stessi schiarimenti dati per la fig. 37.

Anche qui potremmo assumere come asse di geminazione la normale ad una faccia di piramide, ma questa dovrebbe fare un angolo di 45° tanto colla base quanto col prisma }10$\bar{1}${, e applicando la sopradetta formola del Miller debitamente modificata, troveremmo

$$\frac{h-k}{k} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 57^\circ\, 50'\, 2''} = 1.089$$

ovvero

$$h:k:l :: 2.089 : 1 : -0.089$$

per cui possiamo mettere, con grande approssimazione,

$$h:k:l :: 209 : 100 : -9.$$

L'angolo (111) : (209. 100. $\bar{9}$) si calcola = 45° 1′ 6″.

Per la piramide }23. 11. $\bar{1}${ il cui simbolo si avvicina assai al primo e sarebbe alquanto più semplice, si troverebbe l'angolo (111) : (23. 11. $\bar{1}$) = 45° 2′ 32″. Ma tali simboli, come anche quelli degli spigoli [$\bar{4}\bar{1}$. 109. 259] e [$\bar{3}$. 8. 19] che potrebbero sostituirsi come assi di geminazione alle normali alle faccie piramidali sovra calcolate, sono evidentemente troppo complicati per ritenere probabili simili leggi di geminazione. Non si può pensare alla piramide }210{ le cui faccie formano colla base un angolo di 42° 33′ 9″, valore che differisce troppo da quello voluto di 45°.

Da tutto ciò che sono venuto esponendo mi pare scaturisca evidente la conclusione che qui abbiamo da fare non con aggruppamenti regolari spiegabili come geminati nel senso generalmente adottato, ma invece con aggruppamenti paragonabili, in una certa misura, agli aggruppamenti regolari di due sostanze diverse per composizione e per forma.

Richiamo ancora l'attenzione sul fatto, che nelle due associazioni descritte le basi formano fra di loro un angolo o di esattamente 90° o vicino a 60° o 120°, fatto che si potrebbe avvicinare p. e. all'altro osservato in qualche sostanza trimetrica in cui esistono geminati secondo i prismi }110{ e }130{ ad angoli vicini a 60° e 120°, le cui faccie quindi sono reciprocamente quasi normali fra loro. Di più, segue dai

calcoli sopra istituiti rispetto agli aggruppamenti in cui le basi formano un angolo di 61° 25′ 30″ fra loro, che i cristalli di ossido cromico si possono riferire ad assi ortogonali scegliendo per piani coordinati non solo, come si può fare per qualunque sostanza romboedrica od esagonale, due faccie qualunque prismatiche, normali fra loro, e la base, ma altresì, almeno con grandissima approssimazione, un piano di $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, uno di $\{17.\ 6.\ \bar{5}\}$ e uno di $\{28.\ 17.\ 6\}$. Si otterrebbero così sei sistemi di assi equivalenti in cui due angoli sarebbero esattamente retti, e il terzo = 89° 59′ 37″ cioè quasi esattamente retto.

IV. *Aggruppamenti secondo più leggi.*

Trovai finalmente parecchi esempi di aggruppamenti in cui gli individui sono riuniti secondo due delle leggi sovra esposte.

Anzitutto vi ha dei gruppi in cui coesistono le due leggi di geminazione con asse [111] e con asse normale ad una faccia di $\{100\}$. Uno di tali casi fu raffigurato ai N[i]. 41 e 42 ove si vede, projettato sulle due faccie della base comune, un gemello polisintetico ad asse [111] ossia ad asse normale ad una faccia di $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ e a giustapposizione. Coll'individuo che compare inferiormente nella fig. 41, è poscia riunito con asse normale ad una faccia di $\{100\}$, ed è quella che si vede anteriormente allungata da sinistra a destra, un altro individuo più piccolo.

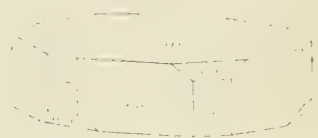
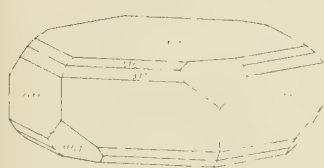
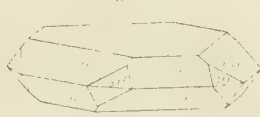
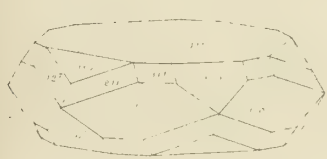
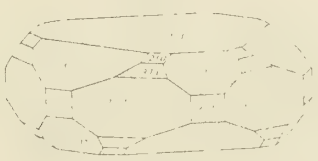
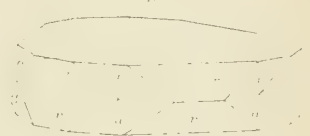
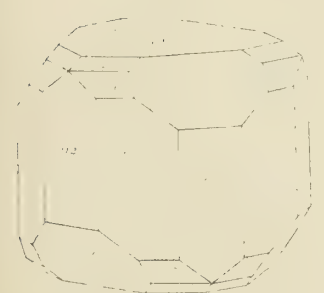
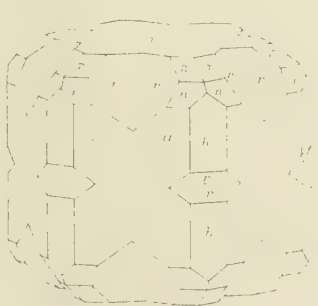
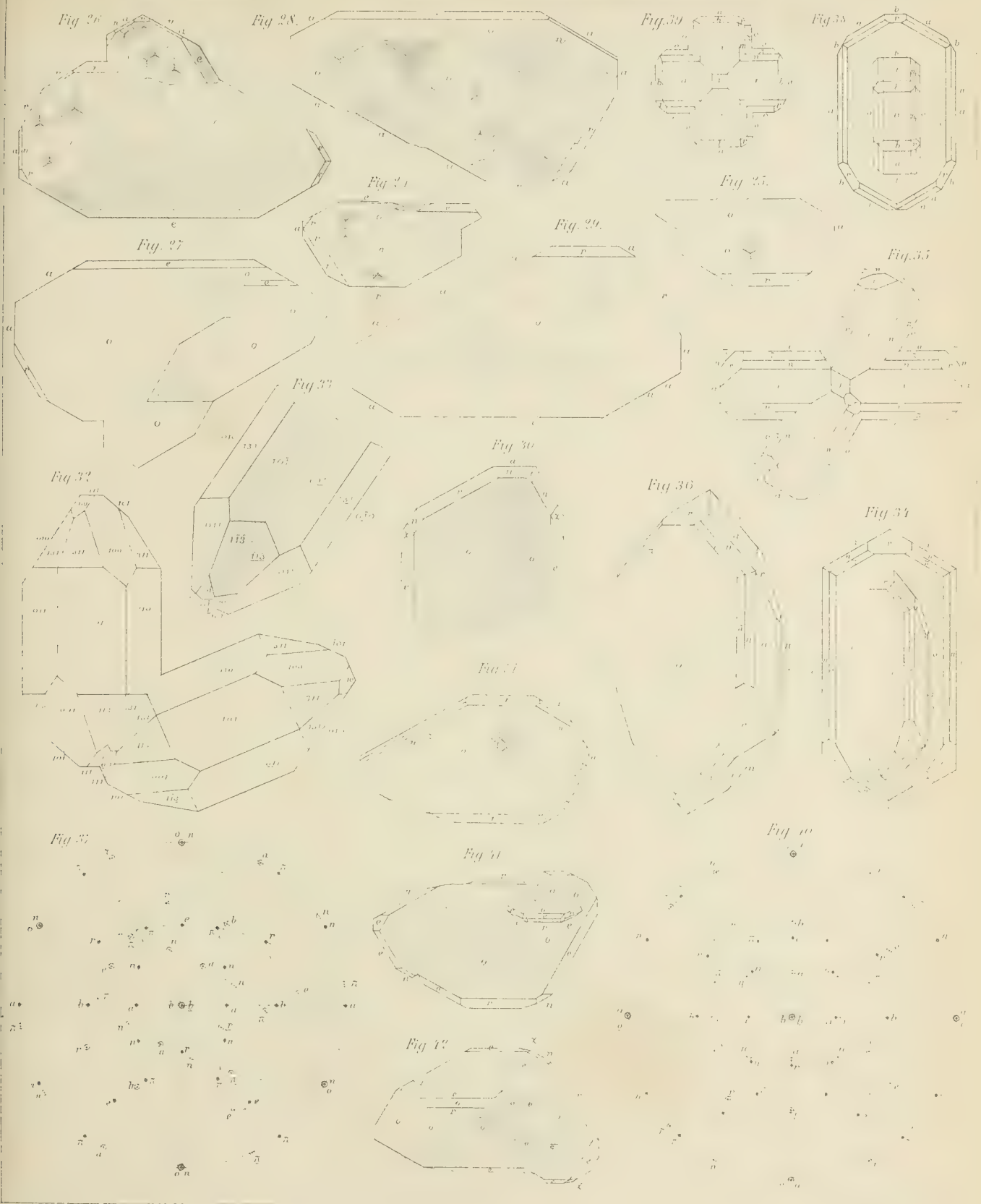
Non di rado si trovano poi esempî in cui si vedono uniti due individui secondo la legge per la quale l'asse di geminazione è la normale ad una faccia di $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ mentre vi si aggiunge un terzo individuo secondo la regola esposta nella prima parte del cap. III. Il lettore può facilmente farsi una idea esatta di questi aggruppamenti, supponendo collocata la fig. 36 sopra la fig. 23 in modo che le linee tratteggiate dei due disegni coincidano, ovvero anche supponendo nella fig. 34 invece dell'individuo semplice più grande e proiettato sopra la sua base, un gemello come quello della figura 23.

Lit. Bruno e Salomone Roma

Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42

Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1886.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 12 giugno 1887.

(Con una tavola).

Ho l'onore di presentare a questa R. Accademia l'effemeride e la statistica idraulica del fiume Tevere pel decorso anno 1886, quinto del settimo periodo decennale delle quotidiane osservazioni.

Come di consueto l'effemeride che presento contiene il registro delle altezze del pelo di acqua del Tevere osservate al mezzodì di ciascun giorno all'idometro collocato presso Orte, ed a quello di Ripetta; ossia prima e dopo la confluenza dell'Aniene in Tevere.

Ho in pari tempo l'onore di presentare l'effemeride e la statistica idrometrica dell'Aniene, ossia il registro delle altezze del pelo di acqua di detto fiume rilevate quotidianamente, alla stessa ora, durante il decorso anno 1886, all'idrometro posto al principio dei cunicoli del Monte Catillo presso Tivoli.

A queste effemeridi fanno seguito, come di consueto, le corrispondenti rappresentazioni grafiche o diagrammi.

Esaminando questi registri di altezze ed i risultati delle suddette statistiche idrometriche, e confrontandoli con i corrispondenti registri e colle corrispondenti statistiche dei settantaquattro anni precedenti se ne deduce:

1° Che, considerando il Tevere in *stato di magra* fino a che l'altezza del pelo d'acqua non raggiunge i metri 6 all'idrometro di Ripetta; in *stato ordinario* quando detta altezza, toccati i metri 6, non raggiunge gli 8 metri; in *stato d'intumescenza* a partire dagli 8 metri fino a che non giunge a metri 12; e finalmente in stato di *vera e minacciosa piena* quando la detta altezza raggiunge o sorpassa i metri 12, nell'anno 1886 le acque del Tevere si mantennero in *stato di magra* per giorni 80; corsero in *stato ordinario* per giorni 255; furono *intumescenti* per giorni 28; ed una sola volta per la durata di soli 2 giorni montarono in *piena*; la quale piena però fu di lieve importanza e non presentò alcun sintomo allarmante.

2° Che l'altezza media generale del pelo di acqua del Tevere misurata all'idrometro di Ripetta durante l'anno 1886 ragguagliò a metri 6,759.

3° Che fu quindi l'anno 1886 uno di quei molti nei quali il Tevere, confermando la sua indole mite e singolarmente perenne ebbe le acque per quasi 7 decimi dell'anno in *stato ordinario*; per poco più di 2 decimi in *stato di magra*; per $\frac{1}{13}$ *intumescenti*; e non montò che una sola volta in *piena*; e questa fu breve e di poca entità.

4° Finalmente che l'altezza media sopradetta di metri 6,759 di poco supera l'altezza media generale del periodo di 75 anni di quotidiane osservazioni che fin qui si posseggono.

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Orte al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1886.

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Giugno** Altezza osservata Met. lin.	**Luglio** Altezza osservata Met. lin.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
1	1,75	1,80	2,35	1,65	1,75	1,40	1,98	1,20	1,30	1,25	1,30	1,45
2	1,70	1,89	2,13	1,65	1,75	1,38	1,72	1,20	1,28	1,23	1,30	2.42
3	1,60	2,70	2,05	1,65	1,70	1,36	1,60	1,20	1,60	1,23	1,30	1,70
4	1,50	2,35	2,36	1,65	1,65	1,33	1,44	1,19	1,30	1,20	1,30	2,68
5	1,50	2,70	2,28	1,65	1,60	1,31	1,33	1,19	1,28	1,20	1,28	1,72
6	1,50	2,20	2,20	1,60	1,60	1,30	1,32	1,19	1,28	1,20	1,28	1,64
7	1,50	2,08	2,05	1,60	1,60	1,30	1,32	1,50	1,27	1,20	1,28	1,60
8	1,85	2,10	1,90	1,60	1,60	1,28	1,31	1,25	1,27	1,78	1,28	1,56
9	1,95	2,00	1,75	1,60	1,60	1,26	1,30	1,20	1,26	2,10	2,40	1,56
10	2,80	1,88	1,75	1,60	1,60	1,26	1,30	1,20	1,26	2,80	2,08	3,80
11	2,20	1,82	1,75	2,28	1,60	1,34	1,30	1,20	1,26	1,78	1,70	3,43
12	2,08	1,78	1,75	1,75	1,75	1,80	1,30	1,20	1,25	1,55	1,65	2,10
13	2,05	1,75	1,75	1,98	1,75	1,60	1,29	1,19	1.25	1,60	1,50	1,78
14	1,88	1,75	1,75	1,75	1,70	2,25	1,29	1,19	1,25	1,50	2,26	1,78
15	1,80	1,70	1,98	1,75	1,70	1,76	1,28	1,18	1,25	1,50	3,38	1,70
16	1,75	1,70	3,80	2,25	1,70	1,60	1,28	1,18	1,24	1,50	2,16	1,75
17	1,75	1,70	2,40	1,78	1,78	1,55	1,28	1,18	1,23	1,62	1,70	1,70
18	2,10	1,70	1,96	1,75	1,71	1,50	1,27	1,18	1,23	2,10	1,65	1,70
19	2,15	1,70	1,78	1,78	1,70	1,46	1,26	1,60	1,23	1,65	2,30	1,70
20	3,85	1,70	1,75	1,75	1,65	1,40	1,26	1,38	1,23	2,20	1,75	1,75
21	2,80	1,88	1,75	2,55	1,60	2,75	1,25	1,35	1,21	1,62	1,70	1,72
22	3,00	1,83	1,70	2,25	1,55	2,50	1,24	1,30	1,20	1,60	1,65	2,80
23	3,80	1,75	1,70	2,42	1,55	1,80	1,23	2,38	1,20	1,60	1,60	1,82
24	3,25	2,15	1,70	2,18	1.50	1,70	1,22	1,60	1,20	1,55	1,52	1,75
25	2,95	2.05	1,70	2,08	1,50	1,65	1,22	1,38	2,85	1,50	1,50	1,70
26	2,55	1,95	1,70	1,78	1,50	1,58	1.22	1,65	1,78	1,45	1,50	2,76
27	2,33	1,88	1,70	1,75	1,50	1,46	1,22	1,60	1,60	1,40	1,50	2 10
28	2,20	3,25	1,70	2,00	1,50	1,36	1,21	1,55	1,40	1,40	1,48	3,23
29	2,10		1,65	2,68	1,45	1,73	1,21	1,50	1,28	1,38	1,46	2,45
30	2,10		1,65	1,90	1,43	1,52	1,20	1,45	1,25	1,36	1,50	2,10
31	1,95		1,65		1,40		1,20	1,40		1,35		1,70
Sommata	68,29	55,74	60,09	56,66	49,97	47,49	40,85	41,96	40,49	48,40	50,26	63,65
Media	2,20	1,99	1,94	1,89	1,61	1,58	1,32	1,35	1,35	1,56	1,68	2,05
Massima	3,85	3,25	3,80	2,68	1,78	2,75	1,98	2,38	2,85	2,80	3,38	3,80
Minima	1,50	1,70	1,65	1,60	1,40	1,26	1,20	1,18	1,20	1,20	1,28	1,45
Differenza	2,35	1,55	2,15	1,08	0,38	1,49	0,78	1,20	1,65	1.60	2,10	2,35

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all' idrometro di Ripetta al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1886.

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Giugno** Altezza osservata Met. lin.	**Luglio** Altezza osservata Met. lin.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
1	6,61	7,80	8,97	6,58	7,10	6,28	6,31	5,84	5,93	5,88	5,88	6,04
2	6,50	7,62	7,45	6,56	7,15	6,28	7,17	5,83	5,90	5,87	5,87	6,09
3	6,36	7,60	7,04	6,54	6,97	6,24	6,46	5 83	5,89	5,85	5,87	7,12
4	6,35	8,53	7,14	6,50	6,86	6,21	6,21	5,82	6,04	5,84	5,85	6,93
5	6,34	8,36	9,67	6,48	6,77	6,20	6,15	5,86	5,97	5,82	5,88	6,35
6	6,34	8,29	8,18	6,48	6,70	6,21	6,12	5,82	5,92	5,82	5,87	6,95
7	6,37	7,68	8,00	6,47	6,73	6,27	6,08	5,91	5,90	5,85	5,89	6,58
8	6,56	7,63	7,68	6,46	6,74	6,22	6,06	6,03	5,86	5,93	6,16	6,40
9	6,90	7,39	7,42	6,47	6,69	6,22	6,04	5,87	5,84	6,17	6,09	6,42
10	7,95	7,35	7,19	6,48	6,65	6,27	6,04	5,86	5,82	8,94	8,01	7,45
11	7,99	7,28	7,06	7,01	6,58	6,35	6,23	5,84	5,81	7,46	7,15	11,51
12	7,41	7,18	6,98	7,40	6,55	7,04	6,26	5,84	5,87	6,42	6,54	8,87
13	7,33	7,12	6,90	7,09	6,82	7,07	6,08	5,82	5,97	6,74	6,30	7,89
14	7,07	7,07	6,82	6,85	6,72	6,63	6,04	5,80	5,95	6,33	6,15	7,54
15	6,94	6,97	6,81	6,87	6,92	7,34	6,04	5,80	5,89	6,12	10,21	7,28
16	6,92	6,39	9,02	6,85	7,35	6,82	6,02	5,75	5,89	6,22	8,22	7,04
17	6,83	6,88	9,45	7,16	7,21	6,52	6,00	5,84	5,88	6,19	7,01	6,96
18	6,82	6,82	7,92	6,90	7,05	6,38	5,88	5,81	5,84	6,84	6,66	6,94
19	7,23	6,78	7,52	6,95	6,89	6,31	5,98	5,85	5,83	6,64	6,47	7,02
20	9,76	6,74	7,27	6,81	6,75	6,26	5,97	6,20	5,85	7,78	6,88	7,02
21	10,27	6,73	7,13	7,14	6,65	6,26	5,95	6,01	5,90	6,79	6,57	6,82
22	8,98	6,71	7,02	8,66	6,59	7,22	5,94	5,95	5,90	6,33	6,30	6,94
23	12,45	6,79	6,95	8,44	6,54	7,46	5,92	6,14	5,90	6,32	6,28	7,65
24	12,16	7,32	6,89	7,91	6,52	6,75	5,91	7,19	5,90	6,31	6,31	7,35
25	10,30	6,90	6,84	7,86	6,49	6,53	5,90	6,17	5,87	6,10	6,20	7,24
26	9,15	6,75	6,79	7,68	6,50	6,40	5,89	6,37	7,48	6,03	6,14	7,35
27	8,82	6,70	6,72	7,34	6,41	6,93	5,87	6,36	6,57	5,98	6,13	7,94
28	8,53	7,08	6,69	7,17	6,38	6,46	5,85	6,34	6,23	5,96	6,11	7,67
29	8,37		6,66	7,20	6,35	6,40	5,85	6,20	5,97	5,93	6,07	8,80
30	8,48		6,63	7,15	6,32	6,60	5,85	6,00	5,92	5,92	6,04	7,96
31	8,10		6,58		6,29		5,85	5,94		5,90		7,40
Sommata	248,14	202,46	229,39	211,46	208,24	196,13	187,92	184,89	179,49	196,28	195,11	227,52
Media	8,00	7,23	7,40	7,05	6,72	6,54	6,07	5,96	5,98	6,33	6,50	7,34
Massima	12,45	8,53	9,67	8,66	7,35	7,46	7,17	7,19	7,48	8,94	10,21	11,51
Minima	6,34	6,39	6,58	6,46	6,29	6,20	5,85	5,75	5,81	5,82	5,85	6,04
Differenza	6,11	2,14	3,09	2,20	1,06	1,26	1,32	1,44	1,67	3,12	4,36	5,47

Effemeride dell'Aniene, ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Aniene all'idrometro esistente all'imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli, al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1886.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	1,45	1,75	1,60	1,50	1,80	1,60	1,45	1,35	1,40	1,35	1,35	1,30
2	1,45	1,85	1,60	1,50	1,80	1,60	1,45	1,35	1,40	1,35	1,35	1,60
3	1,45	1,80	1,60	1,50	1,80	1,60	1,45	1,30	1,40	1,35	1,35	1,60
4	1,45	1,95	3,00	1,50	1,80	1,60	1,40	1,30	1,40	1,35	1,35	1,70
5	1,45	1,85	2,15	1,50	1,80	1,60	1,40	1,30	1,35	1,35	1,45	1,70
6	1,45	1,80	2,10	1,50	1,75	1,60	1,40	1,30	1,35	1,35	1,40	1,60
7	1,45	1,75	1,90	1,50	1,70	1,60	1,40	1,30	1,35	1,40	1,65	1,50
8	1,50	1,70	1,75	1,50	1,70	1,55	1,40	1,30	1,35	1,40	1,50	1,60
9	1,80	1,70	1,70	1,50	1,70	1,55	1,40	1,30	1,35	1,60	2,10	1,70
10	1,80	1,70	1,70	1,70	1,70	1,55	1,40	1,30	1,35	1,60	1,65	2,80
11	1,70	1,70	1,65	1,80	1,70	1,80	1,40	1,30	1,35	1,45	1,50	2,20
12	1,60	1,65	1,60	1,80	1,65	1,80	1,40	1,30	1,50	1,40	1,45	1,80
13	1,60	1,65	1,55	1,80	1,65	1,70	1,40	1,30	1,40	1,40	1,40	1,70
14	1,55	1,65	1,55	1,75	2,00	1,80	1,40	1,30	1,40	1,40	1,50	1,65
15	1,55	1,60	1,60	1,70	2,10	1,75	1,40	1,30	1,40	1,40	1,85	1,60
16	1,55	1,60	1,90	1,70	1,80	1,70	1,40	1,30	1,35	1,45	1,70	1,60
17	1,55	1,60	1,80	1,70	1,80	1,70	1,35	1,60	1,35	1,80	1,55	1,65
18	1,55	1,55	1,75	1,70	1,80	1,65	1,35	1,55	1,45	1,60	1,50	1,70
19	1,75	1,55	1,70	1,80	1,75	1,65	1.35	1,45	1,35	1,50	1,45	1,65
20	2,70	1,55	1,70	1,80	1,75	1,65	1,35	1,45	1,35	1,50	1,40	1,65
21	1,60	1,55	1,60	3,00	1,70	1,60	1,35	1,40	1,45	1,50	1,40	1,70
22	2,10	1,55	1,60	2,45	1,70	1,60	1,35	1,40	1,40	1,45	1,40	1,80
23	3,90	1,60	1,60	2,10	1,70	1,60	1,35	1,50	1,35	1,40	1,35	1,70
24	2,40	1,60	1,60	1,95	1,70	1,55	1,35	1,45	1.35	1,40	1,35	1,65
25	2,15	1,60	1,55	1,80	1,70	1,55	1,35	1,50	1,40	1,40	1,30	1,70
26	1,90	1,55	1,55	1,80	1,70	1,55	1,35	1,60	1,50	1,40	1,30	1,80
27	1,90	1,55	1,50	1,80	1,65	1,50	1,35	1,55	1,45	1,35	1,30	1,70
28	1,80	1,60	1,50	1,80	1,65	1,50	1,35	1,50	1,40	1,35	1,30	1,90
29	1,80		1,50	1,95	1,60	1,50	1,35	1,45	1,35	1,35	1,30	1,80
30	1,80		1,50	1,90	1,60	1,50	1,35	1,40	1,35	1,35	1,00	1,70
31	1,80		1,50		1,60		1,35	1,40		1,35		1,60
Sommàta	55,50	46,55	52,90	53,30	53,85	48,50	42,80	43,10	41,60	44,30	43,75	53,35
Media	1,79	1,66	1,71	1,78	1,74	1,62	1,38	1,39	1,39	1,43	1,46	1,72
Massima	3,90	1,95	3,00	3,00	2,10	1,80	1,45	1,60	1,50	1,80	2,10	2,80
Minima	1,45	1,55	1,50	1,50	1,60	1,50	1,35	1,30	1,35	1,35	1,30	1,30
Differenza	2,45	0,40	1,50	1,50	0,50	0,30	0,10	0,30	0,15	0,45	0,80	1,50

Anno 1886.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	68,29	2,20	3,85	1,50	2,35
Febbraio	55,74	1,99	3,25	1,70	1,55
Marzo	60,09	1,94	3,80	1,65	2,15
Aprile	56,66	1,89	2,68	1,60	1,08
Maggio	49,97	1,61	1,78	1,40	0,38
Giugno	47,49	1,58	2,75	1,26	1,49
Luglio	40,85	1,32	1,98	1,20	0,78
Agosto	41,96	1,35	2,38	1,18	1,20
Settembre	40,49	1,35	2,85	1,20	1,65
Ottobre	48,40	1,56	2,80	1,20	1,60
Novembre	50,26	1,68	3,38	1,28	2,10
Dicembre	63,65	2,05	3,80	1,45	2,35
	623,85				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{623,85}{365} = 1,7092$.

Altezza massima dell' intero anno met. lin. 3,85 } differenza massima 2,67.
" minima " " 1,18 }

Anno 1886.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	248,14	8,00	12,45	6,34	6,11
Febbraio	202,46	7,23	8,53	6,39	2,14
Marzo	229,39	7,40	9,67	6,58	3,09
Aprile	211,46	7,05	8,66	6,46	2,20
Maggio	208,24	6,72	7,35	6,29	1,06
Giugno	196,13	6,54	7,46	6,20	1,26
Luglio	187,92	6,07	7,17	5,85	1,32
Agosto	184,89	5,96	7,19	5,75	1,44
Settembre	179,49	5,98	7,48	5,81	1,67
Ottobre	196,28	6,33	8,94	5,82	3,12
Novembre	195,11	6,50	10,21	5,85	4,36
Dicembre	227,52	7,34	11,51	6,04	5,47
	2467,03				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{2467,03}{365} = 6,7590$.

Altezza massima dell' intero anno met. lin. 12,45 } differenza massima 6,70.
" minima " " 5,75 }

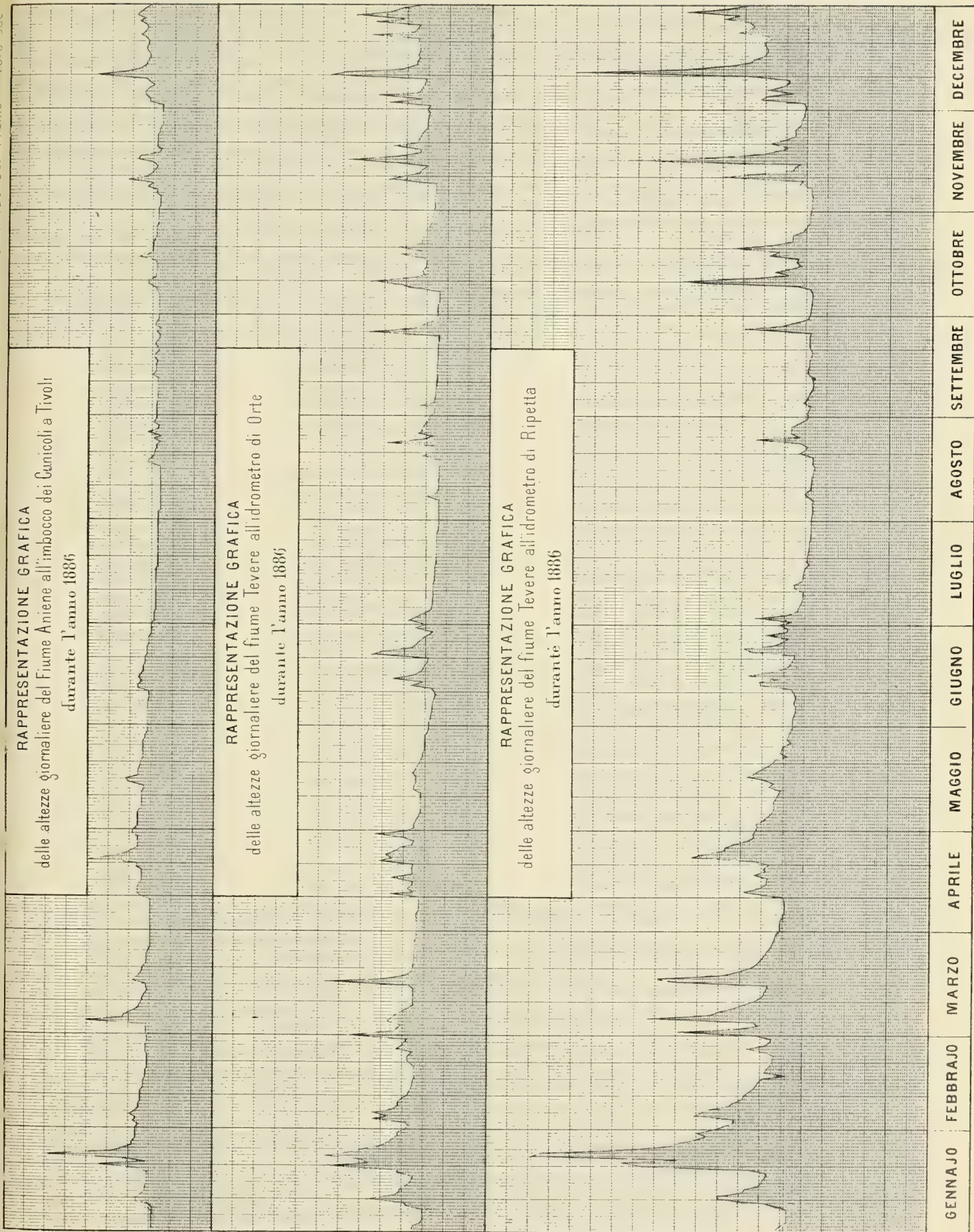
Anno 1886.

STASISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio.	55,50	1,79	3,90	1,45	2,45
Febbraio	46,55	1,66	1,95	1,55	0,40
Marzo	52,90	1,71	3,00	1,50	1,50
Aprile	53,30	1,78	3,00	1,50	1,50
Maggio	53,85	1,74	2,10	1,60	0,50
Giugno	48,50	1,62	1,80	1,50	0,30
Luglio	42,80	1,38	1,45	1,35	0,10
Agosto	43,10	1,39	1,60	1,30	0,30
Settembre	41,60	1,39	1,50	1,35	0,15
Ottobre	44,30	1,43	1,80	1,35	0,45
Novembre	43,75	1,46	2,10	1,30	0,80
Dicembre	53,35	1,72	2,80	1,30	1,50
	579,50				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{579,50}{365} = 1,5877$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 3,90 } differenza massima 2,60.
» minima » » 1,30 }

Sulle forme differenziali quadratiche indefinite.

Memoria del Corrispondente LUIGI BIANCHI

letta nella seduta del 4 novembre 1888.

PREFAZIONE

Le ricerche sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten, contenute nella mia Memoria del tomo XIII, serie 2ª degli Annali di matematica e in quella del vol. IV, serie 4ª degli Atti di questa r. Accademia (¹), trattano il problema di ridurre una forma differenziale quadratica positiva a tre variabili, colla curvatura nulla o costante, alla forma ortogonale

$$H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2 ,$$

in guisa che anche la forma parziale a due variabili

$$H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2$$

sia a curvatura costante.

La presente Memoria ha per oggetto principale di dimostrare come i risultati prima ottenuti si possano estendere al caso di forme indefinite (non positive) a curvatura costante.

È ben noto che anche a tali forme si può dare un significato geometrico, assumendole come espressioni del quadrato dell'elemento lineare di uno spazio a curvatura costante. Per tali spazî vengono però a sussistere alcune proposizioni, che nell'ordinaria geometria si escludono, come ad esempio la esistenza di punti non coincidenti a distanza nulla, l'impossibilità di ricondurre un piano, per rotazione attorno ad una sua retta, alla sua posizione primitiva ecc. (²).

Comincio dal trattare il caso delle forme indefinite a curvatura nulla, che sono trasformabili nella forma normale

$$dx^2 + dy^2 - dz^2$$

o nella opposta. La corrispondente geometria è quella parabolica, ma la quadrica *assoluto* in luogo di degenerare in una conica immaginaria, come accade nell'ordinaria geometria euclidea, degenera in una conica reale.

(¹) Citerò questi due lavori rispettivamente con (M. A), (M. L).

(²) Veggasi: Klein, *Ueber die nicht-euklidische Geometrie* (Math. Annalen, IVᵉʳ Band, p. 590). — Poincaré, *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie* (Bulletin de la Société mathématique, tome XV, p. 206).

Stabilisco nel § II le formole generali relative alle linee ed ai raggi principali di curvatura di una superficie immersa in questo spazio, che indico per brevità col nome di spazio S. Queste formole permettono di estendere anche alle superficie di S il teorema di Weingarten sulle evolute.

Applico nel § III le formole trovate alle superficie d'area minima in S, superficie la cui ricerca dipende dalla integrazione dell'equazione a derivate parziali:

$$(A) \qquad (1-q^2)r+2pqs+(1-p^2)t=0 .$$

Dimostro come questa equazione si possa ricondurre alla nota equazione, integrata da Liouville,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}=e^{2\varphi}$$

e come si possa integrare direttamente con formole analoghe a quelle di Weierstrass per le ordinarie superficie minime.

Nel § IV tratto la questione, analoga al problema di Plateau, di determinare una porzione semplicemente connessa di superficie $z=z(x, y)$, integrale della (A), che sia terminata ad un contorno chiuso assegnato e nell'interno sia priva di punti singolari.

Se il contorno dato è costituito di tratti rettilinei, oppure se è un contorno formato, al modo di Schwarz, con tratti rettilinei e con piani i quali ultimi debbano tagliare ortogonalmente la superficie, il problema si riduce a rappresentare in modo conforme l'area racchiusa sulla pseudosfera da un poligono geodetico sopra un mezzo piano. La continuazione analitica della porzione così limitata di superficie si compone d' infiniti pezzi, i quali sono contornati nel medesimo modo da tratti rettilinei e da piani e in ogni porzione finita di spazio si addensano in generale in numero infinito. Se si vuole al contrario che tale continuazione analitica formi una superficie regolarmente diffusa per lo spazio, come le ordinarie superficie minime studiate da Schwarz e Neovius, occorre che il poligono geodetico sulla pseudosfera sia il semi-poligono generatore di un gruppo Fuchsiano. A queste superficie, la cui teoria viene così a collegarsi a quella delle funzioni Fuchsiane do il nome di *superficie Fuchsiane* (1). Qui mi limito a constatare, in un caso abbastanza esteso, l'esistenza di tali superficie, dimostrando che ad ogni gruppo Fuchsiano simmetrico della 1ª famiglia corrisponde sempre un certo numero di superficie Fuchsiane. Spero di ritornare in seguito su questo argomento che mi sembra offrire, sì dal punto di vista geometrico che analitico un'applicazione interessante delle belle teorie del sig. Poincaré.

Il § V tratta delle superficie a curvatura costante nello spazio S. Ivi è dimostrato che la trasformazione di Bäcklund conserva qui ancora la sua validità e in particolare la trasformazione complementare è ancora applicabile alle superficie pseudosferiche. Ne risulta nuovamente, per queste ultime superficie, l'esistenza dei sistemi ciclici di Ribancour (n. 27).

Vengo quindi al problema fondamentale, enunciato in principio, che geometricamente equivale alla ricerca dei sistemi di Weingarten nei nuovi spazî, sistemi di cui

(1) Alcune notizie su queste superficie ho già pubblicato nei Rendiconti, vol. IV, fascicolo 6°, settembre 1888.

al § precedente si è constatata in un caso particolare l'esistenza. Nei §§ VI, VII è considerato il caso, in cui le superficie Σ di una delle tre serie, componenti il sistema triplo ortogonale, hanno la medesima curvatura costante e vi si dimostra come la trasformazione di Bäcklund e quella complementare diano il modo, partendo da un sistema noto di Weingarten, di dedurne sempre infiniti nuovi. In particolare trovano così un'adeguata interpretazione geometrica quelle formole che ai n. 16-21 della precedente Memoria (M. L) avevano soltanto un significato analitico.

Nel § VIII tale teoria viene estesa al caso in cui la curvatura delle superficie Σ varii dall'una all'altra superficie.

Da ultimo studio brevemente il problema stesso per le forme indefinite a curvatura costante, giungendo anche per queste forme a risultati analoghi.

Alla Memoria è premessa (§ I) la deduzione di alcune formole che legano fra loro le soluzioni di certe equazioni a derivate parziali, formole di cui ricorre frequente l'uso nel presente lavoro come nei due precedenti.

---

§ I.

Proprietà di alcune equazioni a derivate parziali.

1. Le formole così semplici

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial x}=0,$$

che legano fra loro la parte reale t e il coefficiente dell'immaginario z in una funzione $t+iz$ della variabile complessa $x+iy$, ovvero due soluzioni (coniugate) della equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

possono generalizzarsi nel modo seguente. Proponiamoci di determinare le funzioni

$$\mathrm{F}(z,t),\ \Phi(z,t)$$

di z, t in guisa che nelle equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial t}{\partial y}=\mathrm{F}(z,t) \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial t}{\partial x}=\Phi(z,t) \end{cases}$$

considerando z come data e t come incognita, la condizione d'integrabilità rispetto a t prenda la forma

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi(z)$$

e similmente eliminando z ne risulti per t l'equazione

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\psi(t).$$

Se ciò è possibile, nota una soluzione z della (2), l'integrazione di una equazione differenziale ordinaria farà conoscere una soluzione t della (3), contenente una costante arbitraria e inversamente da una soluzione nota della (3) si otterranno ∞^1 soluzioni della (2). Formando effettivamente la condizione d'integrabilità delle (1) rispetto a t, troviamo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\Phi\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\left(\mathrm{F}-\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Dovendo questa, per ipotesi, ridursi alla (2), ne seguirà intanto

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t}&=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}&=-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t},\end{aligned}\right.$$

cioè $\mathrm{F}+i\Phi$ dovrà essere funzione della variabile complessa $z+it$, poniamo

$$\mathrm{F}+i\Phi=w(z+it)$$

e resterà quindi

$$\varphi(z)=\mathrm{F}\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\Phi\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t},$$

ossia F, Φ dovranno ulteriormente soddisfare la equazione

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{F}\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\Phi\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}\right)=\mathrm{F}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}-\Phi\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial t^2}=0.$$

Se ora si elimina invece z dalle (1), supponendo le (4) soddisfatte, si trova

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\Phi\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}-\mathrm{F}\frac{\partial \Phi}{\partial z}=\psi(t);$$

però la condizione, che ne risulta:

$$\Phi\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z^2}-\mathrm{F}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$$

è una conseguenza delle (4) (5). Resta dunque che determiniamo F, Φ in guisa da soddisfare le (4) e la (5). Per ciò osserviamo che la (5) può scriversi

$$(a)\quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}=\lambda\Phi\ ,\quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial t^2}=\lambda\mathrm{F},$$

essendo λ una conveniente funzione di z, t. Ora se alle (a) si associano le altre che ne sono conseguenza

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z\partial t}=\lambda\Phi\ ,\quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\partial t}=-\lambda\mathrm{F},$$

se ne deduce

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t}-\frac{\partial(\lambda\mathrm{F})}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial z}+\frac{\partial(\lambda\mathrm{F})}{\partial t}&=0;\end{aligned}\right.$$

queste, paragonate colle (4), danno subito

$$\lambda=c,$$

indicando c una costante reale.

2. Se c non è nulla, potremo supporla positiva giacchè nel caso opposto basta scambiare z con t, F con Φ; poniamo dunque

$$c = k^2 .$$

Ne risulterà

$$w'' = k^2 w$$

e integrando

$$w = C_1\, e^{k(z+it)} + C_2\, e^{-k(z+it)} ,$$

dove C_1, C_2 sono costanti.

Indicando con ϱ_1 ϱ_2 i moduli e con a, b gli argomenti delle costanti complesse C_1 C_2, avremo una coppia di equazioni (1), dotate delle proprietà richieste, nelle formole

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial t}{\partial y} = \varrho_1\, e^{kz} \cos k(t+a) + \varrho_2\, e^{-kz} \cos k(b-t) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial t}{\partial x} = \varrho_1\, e^{kz} \operatorname{sen} k(t+a) + \varrho_2\, e^{-kz} \operatorname{sen} k(b-t), \end{cases}$$

dalle quali seguono rispettivamente per z, t le equazioni a derivate parziali

$$(6') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k \left\{ \varrho_1{}^2\, e^{2kz} - \varrho_2{}^2\, e^{-2kz} \right\} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} = -\, 2k\, \varrho_1\, \varrho_2 \operatorname{sen} k\,(2t + a - b) . \end{cases}$$

Ora se non sono zero nè ϱ_1, nè ϱ_2 si possono fare eguali cangiando z in $z + \text{cost}^{\text{te}}$ e inoltre si può fare $k = 1$, cangiando z, t in $\dfrac{z}{k}$, $\dfrac{t}{k}$. Col mutare x, y in ax, ay possiamo dare a $\varrho_1 = \varrho_2$ un valore numerico scelto ad arbitrio, determinando convenientemente la costante a; poniamo dunque

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \tfrac{1}{2} \quad , \quad k = 1 .$$

In fine cangiamo t in $t + \text{cost}$ in guisa da rendere $a - b = \pi$ e poniamo

$$a = \alpha - \frac{\pi}{2} ;$$

otterremo le formole:

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial t}{\partial y} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} z \cos t + \cos \alpha \cosh z \operatorname{sen} t \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial t}{\partial x} = \operatorname{sen} \alpha \cosh z \operatorname{sen} t - \cos \alpha \operatorname{senh} z \cos t , \end{cases}$$

che, restando α una costante arbitraria, raggiungono lo scopo prefisso per la coppia di equazioni a derivate parziali

$$(\mathrm{A}') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \operatorname{senh} z \cosh z \\[2ex] \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \operatorname{sen} t \cos t . \end{cases}$$

Di queste formole ho già fatto uso nella citata Memoria del vol. IV di questi Atti (v. formole (22), n. 18). Nel presente lavoro esse appariranno come espressione

analitica della trasformazione complementare e di Bäcklund per le superficie pseudosferiche dello spazio S, il cui elemento lineare ds è dato da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

(Cf. la Prefazione ed il § V).

3. Supponiamo ora che sia zero ϱ_1 o ϱ_2, p. e. ϱ_2. Senza alterare la generalità, potremo fare

$$k = 1 \quad , \quad \varrho_1 = 1 \quad , \quad a = 0$$

ed avremo così le formole

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} &= e^z \cos t \\ \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x} &= e^z \operatorname{sen} t \,, \end{aligned} \right.$$

le quali legano fra loro le soluzioni delle due equazioni

$$(\mathrm{B}') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= e^{2z} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} &= 0 \,. \end{aligned} \right.$$

La prima di essa colle sostituzioni

$$\xi = \frac{x + iy}{2} \qquad \eta = \frac{x - iy}{2}$$

si riduce alla equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} = e^{2z}$$

integrata da Liouville colla formola

$$e^{2z} = \frac{f'\left(\frac{x+iy}{2}\right) \varphi'\left(\frac{x-iy}{2}\right)}{\left[f\left(\frac{x+iy}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+iy}{2}\right)\right]^2} \,,$$

dove le funzioni arbitrarie f, φ, quando si voglia z reale, dovranno prendersi coniugate.

Per le formole (B) la sua integrazione si effettua anche nel modo seguente. Sia t un integrale qualunque della 2ª equazione (B′) e T la funzione coniugata; si avrà

$$e^{-z} = e^{-\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{C} - \int e^{\mathrm{T}} (\cos t \, dx + \operatorname{sen} t \, dy) \right\} .$$

In fine consideriamo il caso in cui la costante c del numero 1 sia zero; allora sarà

$$w = \mathrm{C}_1 (z + it) + \mathrm{C}_2$$

e, senza alterare la generalità, potremo scrivere le formole corrispondenti

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} &= z \cos \alpha - t \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x} &= z \operatorname{sen} \alpha + t \cos \alpha \end{aligned} \right.$$

le quali legano fra loro due soluzioni z, t della medesima equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\varphi .$$

4. Consideriamo ora il sistema di equazioni simultanee, analogo al sistema (1)

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(z+t)}{\partial x}=\mathrm{F}(z\,,t) \\ \dfrac{\partial(z-t)}{\partial y}=\Phi(z\,,t) \end{cases}$$

e proponiamoci di determinare F, Φ in guisa che la condizione d'integrabilità rispetto a t assuma la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\varphi(z)$$

e quella rispetto a t

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}=\psi(t) .$$

Per ciò troviamo in primo luogo le condizioni

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}=0\quad,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0 ,$$

il che dimostrai ntanto che F deve essere funzione di $z-t$ e Φ di $z+t$. Ne segue inoltre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\tfrac{1}{2}\,(\Phi\mathrm{F}'+\mathrm{F}\Phi')$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}=\tfrac{1}{2}\,(\Phi\mathrm{F}'-\mathrm{F}\Phi') ,$$

per cui dovrà aversi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\mathrm{F}'+\mathrm{F}\Phi')=0\quad,\quad \frac{\partial}{\partial z}(\Phi\mathrm{F}'-\mathrm{F}\Phi')=0 ,$$

ossia

$$\mathrm{F}\Phi''-\Phi\mathrm{F}''=0 .$$

Lasciando da parte il caso, privo d'interesse, in cui F o Φ è nulla, avremo quindi

$$\mathrm{F}''=c\mathrm{F}\quad,\quad \Phi''=c\Phi$$

essendo c una costante.

Distinguiamo ora tre casi a seconda del segno di c.

1°. Sia c positiva, poniamo $c=k^2$. Senza alterare la generalità potremo fare $k=1$ ed avremo le formole corrispondenti

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(z+t)}{\partial x}=ae^{z-t}+be^{-(z-t)} \\ \dfrac{\partial(z-t)}{\partial y}=ce^{z+t}+de^{-(z+t)} \end{cases}$$

(dove a, b, c, d sono quattro costanti arbitrarie) che legano fra loro le soluzioni delle equazioni a derivate parziali

$$(\mathrm{C}')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=ac\,e^{2z}-bde^{-2z} \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}=ade^{-2t}-bce^{2t} \end{cases}$$

Se poniamo

$$a = -b = \frac{\alpha}{2} \quad , \quad c = -d = \frac{1}{\alpha}$$

avremo in particolare le formole

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(z+t)}{\partial x} = \alpha \operatorname{senh}(z-t) \\ \dfrac{\partial(z-t)}{\partial y} = \dfrac{2}{\alpha} \operatorname{senh}(z+t), \end{cases}$$

di cui in seguito dovremo far uso. Esse legano le soluzioni z, t della medesima equazione

$$\text{(D}'\text{)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{senh} 2z \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \operatorname{senh} 2t \end{cases}$$

Facciamo ancora

$$a = 1 \quad b = 0$$
$$c = 1 \quad d = 0$$

ed avremo le formole

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(z+t)}{\partial x} = e^{z-t} \\ \dfrac{\partial(z-t)}{\partial y} = e^{z+t} \end{cases}$$

colle corrispondenti equazioni a derivate parziali

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{2z} \quad , \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = 0\,.$$

La soluzione generale della 2ª (E′) essendo

$$t = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$$

dove X è funzione arbitraria di x e Y di y, se si sostituisce nelle (E), ponendole sotto la forma lineare rispetto ad e^{-z}:

$$de^{-z} = \left\{ e^{-z} \frac{\partial t}{\partial x} - e^{-t} \right\} dx - \left\{ e^{-z} \frac{\partial t}{\partial y} + e^{t} \right\} dy\,,$$

e si integra si avrà

$$e^{-z} = e^{\mathrm{X}-\mathrm{Y}} \int \left\{ e^{-2\mathrm{X}} dx + e^{2\mathrm{Y}} dy \right\}.$$

Ponendo

$$e^{-2\mathrm{X}} = \varphi'(y) \quad , \quad e^{2\mathrm{Y}} = \psi'(y)$$

avremo l'integrale generale della 1ª equazione (E′) sotto la forma data da Liouville

$$e^{2z} = \frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{\{\varphi(x) + \psi(y)\}^2}\,.$$

2°. Sia c negativa, poniamo $c = -k^2$. Senza alterare la generalità, le formole corrispondenti possono scriversi

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(z+t)}{\partial x} = \alpha \operatorname{sen}(z-t) \\ \dfrac{\partial(z-t)}{\partial y} = \dfrac{2}{\alpha} \operatorname{sen}(z+t); \end{cases}$$

esse legano fra loro le soluzioni z, t della medesima equazione a derivate parziali

$$
(\mathrm{F}') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen} 2z \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen} 2t . \end{cases}
$$

Queste sono, con altre notazioni, le formole della trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche dello spazio euclideo (M. A, n. 25).

3°. Sia $c = 0$. Allora si hanno le formole

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial(z+t)}{\partial x} = z - t \\ \dfrac{\partial(z-t)}{\partial y} = z + t \end{cases}
$$

e z, t soddisfano l'equazione

$$
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \varphi .
$$

§ II.

Linee e raggi principali di curvatura di una superficie nello spazio che ha per elemento lineare

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

5. La geometria dello spazio S a curvatura nulla definito dalla forma superiore dell'elemento lineare appartiene al tipo parabolico. Se si riguardano x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto in uno spazio euclideo rappresentativo, la determinazione metrica speciale dello spazio S si ottiene prendendo per superficie del 2° ordine fondamentale (assoluto) una quadrica degenere in una conica reale; è questa la conica all'infinito del cono circolare retto

$$
(1) \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0 .
$$

Le rette (geodetiche) e i piani dello spazio S hanno per immagini rette e piani dello spazio euclideo. Ma rispetto allo spazio S le rette, come i piani, si debbono distinguere in due specie. Una retta si dirà di 1ª specie se la sua parallela, tirata per l'origine, è interna al cono (1) e di 2ª specie se la detta parallela è invece esterna al cono. La distanza δ di due punti (x, y, z), (x', y', z') è data da

$$
\delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 - (z-z')^2}
$$

se la loro congiungente è di 2ª specie e da

$$
\delta = \sqrt{(z-z')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2}
$$

se tale congiungente è di 1ª specie.

Similmente diremo di 1ª specie un piano se incontra la conica all'infinito in punti immaginarî e di 2ª specie se la incontra in punti reali. È chiaro che la normale (ordinaria) di un piano è di 1ª o 2ª specie secondo che il piano stesso è di 1ª o 2ª specie.

La metrica angolare nello spazio S è differente secondo che gli angoli da misurarsi sono in piani di 1ª o di 2ª specie. Nel 1° caso indicando con a, b le rette che

racchiudono l'angolo e con c, d le due rette (coniugate immaginarie) che dal vertice dell'angolo vanno ai punti ove il suo piano interseca il circolo assoluto, il valore θ dell'angolo si otterrà dividendo per $2i$ il logaritmo del rapporto anarmonico $[abcd]$ delle quattro rette a, b, c, d. Nel 2° caso invece le rette $c.d$ sono reali e θ si ottiene dividendo per 2 il logaritmo di $[abcd]$ (cfr. Klein, l. c. [1]).

Nello spazio S meritano speciale menzione quelle curve, alle quali, secondo la formola

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2,$$

deve attribuirsi una *lunghezza nulla*. Nello spazio euclideo rappresentativo sono evidentemente definite dalla proprietà che la loro tangente è inclinata costantemente di 45° sull'asse z; esse sono cioè eliche di cilindri paralleli all'asse z (di base arbitraria), che ne tagliano le generatrici sotto l'angolo di 45°.

6. Consideriamo ora nello spazio S una superficie qualunque Σ, la cui equazione sia

$$z = z(x, y),$$

e poniamo, come al solito:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ ecc.}$$

L'elemento lineare della superficie Σ nello spazio S sarà dato da

$$(1) \qquad ds^2 = (1 - p^2)\, dx^2 - 2pq\, dx\, dy + (1 - q^2)\, dy^2.$$

Il discriminante

$$1 - p^2 - q^2$$

di questa forma differenziale sarà positivo nei punti ove il piano tangente a Σ è di 1ª specie, punti che diremo di 1ª specie, e negativo nei punti ove il piano tangente è di 2ª specie (punti di 2ª specie). In generale una superficie Σ conterrà una regione di punti di 1ª specie ed una regione di punti di 2ª specie; ma noi considereremo sempre l'una regione separatamente dall'altra. Diremo perciò che una superficie è di 1ª o 2ª specie, secondo che i suoi piani tangenti sono di 1ª o 2ª specie. Sopra

[1] Se r è una retta qualunque dello spazio, si tiri per l'origine O una retta parallela e, a partire da O si stacchi un segmento $\overline{OM}$ eguale all'unità lineare. Le coordinate X, Y, Z dell'estremo M soddisfano all'equazione

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = \mp 1,$$

secondochè la retta r è di 1ª o 2ª specie. Ove si considerino due direzioni (X, Y, Z), (X', Y', Z') della medesima specie e si indichi con θ il loro angolo si troverà facilmente, ricorrendo alla definizione data dell'angolo:

$$\cos\theta = XX' + YY' - ZZ'$$

se l'angolo è di 1ª specie e invece

$$\cosh\theta = XX' + YY' - ZZ'$$

se l'angolo è di 2ª specie. Con ciò resta giustificato il nome di *coseni di direzione* (circolari o iperbolici) che daremo a X, Y, Z.

Quando poi le due direzioni (X, Y, Z) (X', Y', Z') fossero di specie contraria, l'angolo θ sarebbe immaginario, ma basterebbe cangiare il segno della quantità sotto il segno logaritmico per ottenere

$$\operatorname{senh}\theta = XX' + YY' - ZZ'.$$

una superficie di 1ª specie le linee di lunghezza nulla, definite dalla equazione differenziale

$$ds^2 = (1-p^2)\,dx^2 - 2pq\,dx\,dy + (1-q^2)\,dy^2 = 0\,,$$

sono immaginarie, mentre esse sono invece reali sulle superficie di 2ª specie. Un'altra importante distinzione fra le due specie di superficie sussiste riguardo alle loro linee di curvatura ([1]). La equazione differenziale di queste linee si ottiene eguagliando a zero il Jacobiano della forma differenziale (1) e dell'altra

$$r dx^2 + 2s\,dx\,dy + t dy^2\,;$$

essa si scrive cioè:

$$\text{(A)}\qquad \begin{vmatrix} (1-p^2)\,dx - pq\,dy\,, & -pq\,dx + (1-q^2)\,dy \\ r dx + s dy & s dx + t dy \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ora se la superficie $z = z(x, y)$ è di 1ª specie, il discriminante della forma (1) è positivo, quello della forma (A) è per conseguenza negativo e perciò le linee di curvatura sono certamente reali. Se si tratta invece di una superficie di 2ª specie, le linee di curvatura possono essere reali o immaginarie. In questo lavoro però, ove non si avverta esplicitamente il contrario, fra le superficie di 2ª specie considereremo solo quelle le cui linee di curvatura sono reali.

7. Supponiamo che la forma quadratica fondamentale

$$dx^2 + dy^2 - dz^2$$

sia trasformabile nell'altra

$$a\,du^2 + b\,dv^2 + c\,dw^2\,,$$

dove a, b, c sono funzioni delle variabili u, v, w. In primo luogo dovranno due dei coefficienti a, b, c essere positivi, e il terzo negativo; siano p. e. a, b i due positivi e poniamo

$$a = H_1^2 \qquad b = H_2^2 \qquad c = -H_3^2\,.$$

Affinchè la forma

$$H_1^2\,du^2 + H_2^2\,dv^2 - H_3^2\,dw^2$$

sia a curvatura nulla, dovranno essere verificate le seguenti equazioni, che tengono qui il luogo delle equazioni di Lamé per lo spazio euclideo:

$$\text{(I)}\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial v\,\partial w} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial w\,du} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial u\,\partial v} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial u} \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)}\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right) - \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right) + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u} &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right) + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v} &= 0\,. \end{aligned} \right.$$

([1]) Come nello spazio euclideo, così nello spazio S una linea L tracciata sopra una superficie Σ si dirà linea di curvatura se le normali a Σ lungo L sono le tangenti di una curva nello spazio.

Inversamente se H_1, H_2, H_3 soddisfano le (I), (II), ne risulterà per una opportuna sostituzione reale l'eguaglianza

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 - H_3^2\, dw^2 \quad (2)$$ [1].

La ricerca delle effettive formole di trasformazione dipende dalle considerazioni seguenti. Poniamo

$$(3)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial x}{\partial u}\,, & Y_1 = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial y}{\partial u}\,, & Z_1 = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial z}{\partial u} \\ X_2 = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial x}{\partial v}\,, & Y_2 = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial y}{\partial v}\,, & Z_2 = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ X_3 = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial x}{\partial w}\,, & Y_3 = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial y}{\partial w}\,, & Z_3 = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial z}{\partial w} \end{cases}$$

di guisa che avremo per la (2)

$$(4)\quad \begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 - Z_1^2 = 1 \\ X_2^2 + Y_2^2 - Z_2^2 = 1 \\ X_3^2 + Y_3^2 - Z_3^2 = -1 \end{cases}$$

$$(5)\quad X_i X_k + Y_i Y_k - Z_i Z_k = 0\,;\quad i\,, k = 1\,, 2\,, 3\,.$$

Ricorrendo alle note formole di Christoffel relative alle condizioni di trasformabilità di due forme quadratiche differenziali l'una nell'altra [2], troviamo subito che X_1, X_2' X_2 debbono soddisfare alle equazioni seguenti:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}X_2 + \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}X_3\,, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}X_2\,, & \dfrac{\partial X_1}{\partial w} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}X_1\,, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}X_1 + \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}X_2\,, & \dfrac{\partial X_2}{\partial w} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}X_3 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}X_1\,, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}X_2\,, & \dfrac{\partial X_3}{\partial w} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}X_1 + \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}X_2 \end{cases}$$

e alle medesime equazioni debbono soddisfare le altre due terne di funzioni Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3.

Il sistema di equazioni (6) ai differenziali totali per le tre funzioni incognite X_1, X_1, X_3 è *illimitatamente integrabile*, quando siano soddisfatte le (I), (II). Basta quindi scegliere tre terne d'integrali delle (6)

$$(X_1\,, X_2\,, X_3)\ ,\ (Y_1\,, Y_2\,, Y_3)\ ,\ Z_1\,, Z_2\,, Z_3)$$

in guisa che per un sistema iniziale di valori $u_0\, v_0\, w_0$ delle variabili u, v, w soddisfino le (4) (5) e le quadrature

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int (H_1 X_1\, du + H_2 X_2\, dv + H_3 X_3\, dw) \\ y = \displaystyle\int (H_1 Y_1\, du + H_2 Y_2\, dv + H_3 Y_3\, dw) \\ z = \displaystyle\int (H_1 Z_1\, du + H_2 Z_2\, dv + H_3 Z_3\, dw) \end{cases}$$

[1] Nella determinazione metrica angolare dello spazio S le superficie

$$u = \text{cost}\,,\quad v = \text{cost}\,,\quad w = \text{cost}$$

costituiscono un sistema triplo ortogonale.

[2] Crelle's Journal Bd. 70.

daranno le formole di trasformazione richieste. Oltre che del sistema di formole precedenti, avremo bisogno in seguito anche del sistema analogo che si riferisce alla forma quadratica

$$H^2_1\, du^2 - H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2,$$

supposta trasformabile nella forma fondamentale

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 .$$

Delle equazioni di Lamé le (I) rimangono invariate mentre le (II) sono sostituite dalle altre

$$(\mathrm{II}^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}\right) + \dfrac{1}{H_3^2}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}\dfrac{\partial H_2}{\partial w} = 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}\right) + \dfrac{1}{H_1^2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}\dfrac{\partial H_3}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}\right) - \dfrac{1}{H_2^2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}\dfrac{\partial H_1}{\partial v} = 0 . \end{cases}$$

Facendo ancora le posizioni (3), in luogo delle (4) abbiamo le formole

$$(4^*)\quad \begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 - Z_1^2 = 1 \\ X_2^2 + Y_2^2 - Z_2^2 = -1 \\ X_3^2 + Y_3^2 - Z_3^2 = 1. \end{cases}$$

mentre le (5) rimangono le stesse.

In fine le (6) diventano nel caso attuale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}X_2 - \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}X_3 , & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}X_2 , & \dfrac{\partial X_1}{\partial w} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}X_1 , & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}X_1 + \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}X_3 , & \dfrac{\partial X_2}{\partial w} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}X_3 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}X_1 , & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}X_2 & \dfrac{\partial X_3}{\partial w} = -\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}X_1 + \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}X_2 . \end{cases}$$

8. Consideriamo nello spazio S una superficie Σ e tutte le sue parallele. Questo sistema di superficie insieme colle sviluppabili luogo delle normali a Σ lungo le linee di curvatura forma un sistema triplo ortogonale.

Prendiamo questo sistema triplo per sistema coordinato (u, v, w), riferendovi i punti dello spazio S, e siano le $w = \text{cost}$ le superficie parallele: avremo

$$(\alpha)\qquad ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 - H_3^2\, dw^2$$

se la superficie Σ è di 1ª specie e invece

$$(\beta)\qquad ds^2 = H_1^2\, du^2 - H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2$$

se la superficie Σ è di 2ª specie. Nell'uno e nell'altro caso le linee lungo le quali varia la sola w sono, per ipotesi, rette e perciò dovendo H_3 essere indipendente da u, v, si potrà porre $H_3 = 1$. Avremo dunque

$$(\alpha')\qquad dx^2 + dy^2 - dz^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 - dw^2$$

nel 1° caso e

$$(\beta')\qquad dx^2 + dy^2 - dz^2 = H_1^2\, du^2 - H_2^2\, dv^2 + dw^2$$

nel 2° caso. Le linee coordinate u, v sopra la Σ e le superficie parallele sono le linee di curvatura.

Cominciamo dal caso (α') e facciamo quindi nelle equazioni di Lamé (I), (II) n. 7

$$H_3 = 1 .$$

Le due ultime (II) danno

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial w^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_2}{\partial w^2} = 0 ,$$

quindi H_1, H_2 sono funzioni lineari di w. Se indichiamo con $\sqrt{E}, \sqrt{G}$ i valori di $H_1\ H_2$ per $w = 0$, cioè se supponiamo che l'elemento lineare della Σ, riferito alle linee di curvatura u, v prenda la forma

$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2 ,$$

potremo porre

$$(\gamma) \qquad H_1 = \sqrt{E} - \frac{\sqrt{E}}{r_2} w ,\ H_2 = \sqrt{G} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} w ,$$

dove $r_1\ r_2$ sono due nuove funzioni di u, v che rappresentano, come ora vedremo, i raggi principali di curvatura della superficie Σ. Coi valori (γ) di $H_1\ H_2$ e per $H_3 = 1$ le due prime (I) diventano

$$(8) \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} = 0 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

mentre la 3ª è identicamente soddisfatta. In fine la 1ª delle (II) dà fra $r_1\ r_2$ l'ulteriore relazione

$$(9) \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} .$$

Basta ora applicare le formole generali date dal sig. Voss nel 16° volume dei Matematische Annalen [1] per riconoscere che $r_1\, r_2$ sono i raggi principali di curvatura di Σ. Ciò risulta del resto anche dalle considerazioni seguenti.

8bis. Facendo $w = 0$ nelle formole (6) n. 7 troviamo

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_3 , & \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 , & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}}{r_2} X_1 , & \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}}{r_1} X_2 . \end{cases}$$

Se portiamo sulla normale alla superficie Σ, a partire dal piede, la lunghezza r_1, le coordinate $x'\ y'\ z'$ dell'estremo sono date da

$$(11) \qquad x' = x + r_1 X_3 , \quad y' = y + r_1 Y_3 , \quad z' = z + r_1 Z_3$$

e dalle (10) risulta

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \sqrt{E} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) X_1 + \frac{\partial r_1}{\partial u} X_3 , \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial r_1}{\partial v} X_3$$

[1] *Differentialausdrücke und Krummung* pag. 150.

e analogamente per y', z'. Queste formole dimostrano che le normali alla Σ lungo una linea $u = \text{cost}^{\text{te}}$ inviluppano una curva C e la porzione di normale compresa fra il piede e il punto di contatto con C è eguale a r_1; dunque r_1 è il raggio principale di curvatura di Σ relativo alla linea $u = \text{cost}$. Similmente dicasi per r_2.

Le formole (11) danno dunque le coordinate del 1° centro di curvatura di Σ e similmente le altre

$$(11')\qquad x'' = x + r_2 X_3\,,\quad y'' = y + r_2 Y_3\,,\quad z'' = z + r_2 Z_3$$

danno quelle del 2° centro.

Dalla precedente discussione risulta il teorema:

Se una superficie Σ di 1ª specie si riferisce alle sue linee di curvatura u, v e con

$$(\delta)\qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

si indica il quadrato del suo elemento lineare e con r_1, r_2 i suoi raggi principali di curvatura, fra E, G, r_1, r_2 hanno luogo le relazioni (8) (9). Inversamente se E, G, r_1, r_2 sono quattro funzioni di u, v che soddisfino le (8) (9), esiste una corrispondente superficie Σ di 1ª specie, il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, è dato dalla (δ) e di cui r_1 r_2 sono i raggi principali di curvatura.

Nel caso che la superficie Σ sia di 2ª specie i calcoli sono del tutto simili ai precedenti. L'elemento lineare della superficie prende allora la forma

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 - \mathrm{G}\,dv^2\,;$$

i raggi principali di curvatura r_1 r_2 soddisfano ancora alle (8), ma in luogo della (9) si ha l'altra

$$(9^*)\qquad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)\right\}.$$

In fine alle formole (10) vengono sostituite le seguenti:

$$(10')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} X_2 + \dfrac{\sqrt{\mathrm{E}}}{r_2} X_3\,, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} X_2 \\[2ex] \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} X_1 & , \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} X_1 - \dfrac{\sqrt{\mathrm{G}}}{r_1} X_3 \\[2ex] \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{\mathrm{E}}}{r_2} X_1 & , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{\mathrm{G}}}{r_1} X_2\,. \end{cases}$$

Notiamo poi che le formole (α') (β') diventano rispettivamente

$$(12)\qquad ds^2 = \mathrm{E}\left(1 - \frac{w}{r_2}\right)^2 du^2 + \mathrm{G}\left(1 - \frac{w}{r_1}\right)^2 dv^2 - dw^2$$

$$(12')\qquad ds^2 = \mathrm{E}\left(1 - \frac{w}{r_2}\right)^2 du^2 - \mathrm{G}\left(1 - \frac{w}{r_1}\right)^2 dv^2 + dw^2\,,$$

valendo la prima se la superficie Σ è di 1ª specie, la seconda se Σ è di 2ª specie.

9. La definizione di *direzioni coniugate* sopra una superficie Σ, che si dà nel caso della geometria euclidea, è indipendente dalla speciale determinazione metrica dello spazio; essa può quindi ripetersi invariata per le superficie dello spazio S.

Ciò posto, siano MM', MM'' due elementi lineari coniugati sopra Σ, e indichiamo col simbolo d gli incrementi subìti da funzioni qualunque della posizione di M sopra Σ,

quando M si sposta nel punto infinitamente vicino M', e col simbolo δ gli analoghi incrementi quando M si sposta secondo la direzione coniugata M M''. Per esprimere che le due direzioni, secondo le quali hanno luogo gli incrementi d, δ, sono coniugate, troviamo la formola

$$(a) \qquad dx\,\delta X_3 + dy\,\delta Y_3 - dz\,\delta Z_3 = 0 \ \text{(1)},$$

dove x, y, z sono le coordinate di M e $X_3\ Y_3\ Z_3$ i coseni di direzione della normale.

Supponiamo la superficie Σ riferita, come ai due numeri precedenti, alle sue linee di curvatura u, v. Se la superficie Σ è di 1ª specie valgono le formole (10) e (4) e la formola sopra scritta (a) diviene

$$(b) \qquad \frac{E}{r_2}\,du\,\delta u + \frac{G}{r_1}\,dv\,\delta v = 0\,;$$

se invece la superficie Σ è di 2ª specie, applicando le (10*) (4*) la (a) diventa

$$(b') \qquad \frac{E}{r_2}\,du\,\delta u - \frac{G}{r_1}\,dv\,\delta v = 0\,.$$

Una linea L tracciata sopra Σ si dirà *assintotica* quando tutte le sue tangenti siano coniugate a sè medesime, ossia quando in ogni punto di L il piano osculatore della linea coincida col piano tangente della superficie (2).

Per le (b) (b') l'equazione differenziale delle linee assintotiche sarà

$$(13) \qquad \frac{E}{r_2}\,du^2 + \frac{G}{r_1}\,dv^2 = 0$$

se la superficie Σ è di 1ª specie, mentre essa sarà data da

$$(14) \qquad \frac{E}{r_2}\,du^2 - \frac{G}{r_1}\,dv^2 = 0$$

se la superficie Σ è di 2ª specie.

Per le superficie di 1ª specie esiste dunque un doppio sistema di linee assintotiche *reali* quando r_1, r_2 abbiano segno contrario. L'opposto accade per le superficie di 2ª specie.

9^{bis}. Come nel caso dello spazio euclideo, vi è luogo di considerare per la superficie data Σ la superficie luogo dei suoi centri di curvatura, superficie composta di due falde e che si dirà anche qui la evoluta di Σ. Gli elementi lineari $ds_1\,ds_2$ delle due falde dell'evoluta si otterranno dalle formole generali (12), (12') n. 8 facendovi $w = r_1$ o $w = r_2$. Si avrà così

$$(15) \qquad \begin{cases} ds_1{}^2 = E\left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2 - dr_1{}^2 \\[2ex] ds_2{}^2 = G\left(1 - \dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 dv^2 - dr_2{}^2 \end{cases}$$

(1) A causa di

$$X_3\,dx + Y_3\,dy - Z_3\,dz = 0$$
$$X_3\,\delta x + Y_3\,\delta y - Z_3\,\delta z = 0$$

essa può anche scriversi

$$\delta x\,dX_3 + \delta y\,dY_3 - \delta z\,dZ_3 = 0\,.$$

(2) Naturalmente una superficie Σ ha le medesime linee assintotiche, tanto se si pensa come esistente nello spazio S, quanto nello spazio euclideo.

se la superficie Σ è di 1ª specie e invece

$$(16)\qquad \begin{cases} ds_1^2 = E\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2 + dr_1^2 \\ ds_2^2 = -G\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)^2 dv^2 + dr_2^2 \end{cases}$$

se la superficie Σ è di 2ª specie. Come si vede, nel 1° caso ambedue le falde dell'evoluta sono superficie di 2ª specie, mentre nel 2° caso una delle falde è di 1ª specie e l'altra di 2ª. Ora supponiamo che i raggi di curvatura r_1 r_2 della evolvente Σ siano funzioni l'uno dell'altro. In tal caso, valendo le stesse formole (8), che hanno luogo nello spazio euclideo, si concluderà anche qui che cangiando convenientemente i parametri u, v, si può porre

$$(17)\qquad \sqrt{E} = e^{\int \frac{r_1\, dr_2}{r_2(r_1-r_2)}}, \quad \sqrt{G} = e^{\int \frac{r_2\, dr_1}{r_1(r_2-r_1)}}$$

e però le (15) (16) diventano:

$$(15')\qquad \begin{cases} ds_1^2 = e^{2\int \frac{dr_1}{r_1-r_2}} du^2 - dr_1^2 \\ ds_2^2 = e^{2\int \frac{dr_2}{r_2-r_1}} dv^2 - dr_2^2 \end{cases}$$

$$(16')\qquad \begin{cases} ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_1-r_2}} du^2 \\ ds_2^2 = dr_2^2 - e^{2\int \frac{dr_2}{r_2-r_1}} dv^2 . \end{cases}$$

Queste forme dell'elemento lineare appartengono ai tre tipi

$$(a)\qquad d\alpha^2 + \varphi^2(\alpha)\, d\beta^2$$

$$(b)\qquad d\alpha^2 - \varphi^2(\alpha)\, d\beta^2$$

$$(c)\qquad - d\alpha^2 + \varphi^2(\alpha)\, d\beta^2,$$

che possono realizzarsi con superficie di rotazione dello spazio S. E infatti le formole

$$(a')\qquad x = \varphi(\alpha)\cos\beta\,, \quad y = \varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\beta\,, \quad z = \int \sqrt{\varphi'^2(\alpha) - 1}\; d\alpha\,,$$

che definiscono una superficie di rotazione attorno all'asse z dànno appunto alla espressione di $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ la forma (a), mentre le altre

$$(b')\qquad x = \varphi(\alpha)\cosh\beta \quad y = \int \sqrt{1 - \varphi'^2(\alpha)}\; d\alpha \quad z = \varphi(\alpha)\,\mathrm{senh}\,\beta$$

$$(c')\qquad x = \varphi(\alpha)\,\mathrm{senh}\,\beta \quad y = \int \sqrt{1 + \varphi'^2(\alpha)}\; d\alpha \quad z = \varphi(\alpha)\cosh\beta\,,$$

che definiscono una superficie di rotazione attorno all'asse y danno luogo alle forme (b) (c) dell'elemento lineare. Se ne conclude che anche nello spazio S sussiste il teorema di Weingarten:

Ciascuna falda dell'evoluta di una superficie, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, è applicabile sopra una superficie di rotazione.

E sarebbe pur facile dimostrare che sussiste il teorema inverso (cf. M. L.' n. 7).

Osservazione. Se si suppone che la differenza $r_1 - r_2$ dei raggi di curvatura della evolvente sia costante, le (15') (16') dimostrano che le due falde dell'evoluta sono superficie a curvatura costante. La trasformazione complementare è quindi applicabile anche nello spazio S a queste superficie. Ma di questa trasformazione come di quella più generale di Bäcklund si tratterà più diffusamente al § V.

§ III.

Le superficie d'area minima nello spazio S.

10. L'elemento lineare di una superficie $z = z(x, y)$ essendo dato da

$$ds^2 = (1-p^2)\,dx^2 - 2pq\,dx\,dy + (1-q^2)\,dy^2\,,$$

il suo elemento d'area sarà

$$d\sigma = \sqrt{1-p^2-q^2}\,dx\,dy\,.$$

Se fra tutte le superficie terminate ad un contorno chiuso fisso si cerca quella d'area minima, si dovrà render minimo l'integrale doppio

$$\int\!\!\int \sqrt{1-p^2-q^2}\,dx\,dy\,,$$

i limiti essendo fissi. Ne risulta che la funzione incognita z deve soddisfare all'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1-p^2-q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1-p^2-q^2}} = 0$$

ossia

$$(1) \qquad (1-q^2)\,r + 2pqs + (1-p^2)\,t = 0 \quad (^1).$$

Applicando le formole citate di Voss (Math. Annalen Bd. 16) si trova facilmente che la (1) esprime la proprietà geometrica della superficie cercata di avere nulla la somma dei raggi principali di curvatura. Le superficie dotate di quest'ultima proprietà si diranno perciò superficie d'area minima.

Applichiamo le formole generali del paragrafo precedente a queste superficie. Avendosi qui

$$r_1 + r_2 = 0\,,$$

se si suppone r_2 positivo, dalle (17) n. 9^{bis} si vede che si può porre

$$E = G = r_2$$

e quindi, indicando con θ una conveniente funzione di u, v,

$$E = G = e^{2\theta}$$

$$r_2 = e^{2\theta} \quad r_1 = -e^{2\theta}.$$

[1] Confrontandola colla equazione

$$(1') \qquad (1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0$$

che caratterizza le ordinarie superficie minime, si vede che ogni integrale z dell'una, diviso per $\sqrt{-1}$, dà un integrale dell'altra. Ove non si faccia distinzione fra reale ed immaginario le due equazioni non differiscono fra di loro. Ma qui, dove appunto ci proponiamo di trovare gli integrali *reali* della (1) (o, se si vuole, gli integrali *puramente immaginari* della (1')) si rende necessario un calcolo diretto, il quale ci condurrà poi, come si vedrà al seguente paragrafo nella trattazione del problema di Plateau, a risultati che difficilmente potrebbero stabilirsi per altra via.

Se la superficie è di 1ª specie si avrà pel suo elemento lineare

(2) $$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)$$

e la funzione θ dovrà soddisfare la equazione a derivate parziali che segue dalla (9) n. 8

(3) $$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + e^{-2\theta} = 0\,.$$

Se invece la superficie cercata è di 2ª specie si avrà pel suo elemento lineare

(2′) $$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 - dv^2)$$

e θ soddisferà l'equazione (cf. (9*) n. 8)

(3′) $$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}.$$

Inversamente ad ogni soluzione della (3) o della (3′) corrisponderà una superficie minima di 1ª o 2ª specie, la cui determinazione completa, come ora vedremo, dipende solo da quadrature. Ma queste equazioni (3) (3′), con semplici sostituzioni, si riducono alla equazione di Liouville di cui si conosce l' integrale generale (nn. 3, 4); ne segue che si può anche trovare l' integrale della (1).

Notiamo che sulle superficie minime di 1ª specie le linee assintotiche sono reali ed hanno per equazione (cf. n. 9)

$$u - v = \text{cost}^{\text{te}} \qquad u + v = \text{cost}^{\text{te}},$$

mentre su quelle di 2ª specie le linee assintotiche sono immaginarie.

11. Dai risultati precedenti è facile dedurre le formole, analoghe a quelle di Monge e Weierstrass per le ordinarie superficie minime, che danno per quadrature l' integrale generale della (1) con due funzioni arbitrarie.

Ritenendo le notazioni del § II n. 7, i coseni di direzione X_3, Y_3, Z_3 della normale alla superficie soddisfano l'equazione

(4) $$X_3{}^2 + Y_3{}^2 - Z_3{}^2 = -1$$

o l'altra

(4′) $$X_3{}^2 + Y_3{}^2 - Z_3{}^2 = 1$$

secondo che la superficie è di 1ª o 2ª specie.

Possiamo anche considerare X_3 Y_3 Z_3 come coordinate di un punto mobile sopra una sfera rappresentativa di 1ª o 2ª specie. La rappresentazione è fatta al modo di Gauss, secondo la legge di parallelismo delle normali nei punti corrispondenti della superficie e della sfera. Se diciamo ds' l'elemento lineare di questa sfera risulta subito dalle (10), (10*) n. 8 la formola

(5) $$ds'^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2) \qquad \text{nel } 1^\circ \text{ caso}$$

e

(5′) $$ds'^2 = e^{-2\theta}(du^2 - dv^2) \qquad \text{nel } 2^\circ \text{ caso}\,.$$

Si vede di qui che la rappresentazione sferica di Gauss per le superficie minime dello spazio S conserva ancora la similitudine delle parti infinitesime.

Per trovare le formole accennate da principio si può procedere nello stesso modo come per stabilire le formole di Weierstrass per le ordinarie superficie minime [1]. Eseguiremo questi calcoli per le superficie di 2ª specie, l'altro caso essendo ancora più da vicino collegato coll'ordinario.

[1] Vedi Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen.*

Se poniamo nelle (2′) (5′)

$$u - v = \sigma \qquad u + v = \tau ,$$

avremo

$$(\alpha) \qquad ds^2 = e^{2\theta}\, d\sigma\, d\tau$$

$$(\beta) \qquad ds'^2 = e^{-2\theta}\, d\sigma\, d\tau$$

e le linee *reali* $\sigma = \text{cost}^{te}$, $\tau = \text{cost}^{te}$ saranno tanto sulla superficie che sulla sfera rappresentativa le curve di lunghezza nulla. Introduciamo ora due variabili ausiliarie ξ, η per le quali esprimiamo le coordinate $X_3\, Y_3\, Z_3$ del punto mobile sulla sfera (4′) colle formole

$$(6) \qquad X_3 = \frac{1 - \xi\eta}{\eta - \xi}, \quad Y_3 = \frac{\eta + \xi}{\eta - \xi}, \quad Z_3 = \frac{1 + \eta\xi}{\eta - \xi}$$

e ne dedurremo:

$$ds'^2 = dX_3^2 + dY_3^2 - dZ_3^2 = \frac{4}{(\eta - \xi)^2}\, d\xi\, d\eta ;$$

confrontata colla (β), questa dimostra che σ dovrà essere funzione o della sola ξ o della sola η e corrispondentemente τ di η soltanto o di ξ soltanto. Possiamo dunque porre

$$\sigma = \sigma(\xi), \qquad \tau = \tau(\eta),$$

l'altro caso equivalendo a scambiare $\xi\eta$. Dal confronto delle due formole risulta

$$(\gamma) \qquad e^{2\theta} = \frac{(\eta - \xi)^2}{4} \frac{d\sigma}{d\xi} \frac{d\tau}{d\eta}$$

e quindi

$$(\delta) \qquad ds^2 = \frac{(\eta - \xi)^2}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{d\eta}\right)^2 d\xi\, d\eta .$$

Ora, applicando le formole (10*) n. 8, otteniamo per le coordinate x, y, z di un punto mobile sulla superficie:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \int e^{2\theta}\left(-\frac{\partial X_3}{\partial u}\, du + \frac{\partial X_3}{\partial v}\, dv\right) \\ y &= \int e^{2\theta}\left(-\frac{\partial Y_3}{\partial u}\, du + \frac{\partial Y_3}{\partial v}\, dv\right) \\ z &= \int e^{2\theta}\left(-\frac{\partial Z_3}{\partial u}\, du + \frac{\partial Z_3}{\partial v}\, dv\right). \end{aligned} \right.$$

Se si osservano le formole

$$\left\{ \begin{aligned} du &= \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{d\xi}\, d\xi + \frac{1}{2}\frac{d\tau}{d\eta}\, d\eta \\ dv &= -\frac{1}{2}\frac{d\sigma}{d\xi}\, d\xi + \frac{1}{2}\frac{d\tau}{d\eta}\, d\eta \end{aligned} \right.$$

e la (γ), si vede che qualunque sia la funzione $\Phi(u, v)$, esprimendola per le nuove variabili ξ, η, si ha

$$e^{2\theta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\, du - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\, dv\right) = (\eta - \xi)^2 \left\{ \frac{1}{4}\left(\frac{d\sigma}{d\xi}\right)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\, d\xi + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\, d\eta \right\}.$$

Ponendo in quest' ultima formola successivamente,

$$\Phi = X_3,\ Y_3,\ Z_3$$

e osservando le (6), le (7) diventano

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int(1-\xi^2)\,F(\xi)\,d\xi + \int(1-\eta^2)\,F_1(\eta)\,d\eta \\ y &= \int(2\xi\,F(\xi)\,d\xi + \int 2\eta\,F_1(\eta)\,d\eta \\ z &= \int(1+\xi^2)\,F(\xi)\,d\xi + \int(1+\eta^2)\,F_1(\eta)\,d\eta\,, \end{aligned}\right.$$

dove si è posto

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\sigma}{d\xi}\right)^2 = F(\xi)\,,\qquad -\frac{1}{4}\left(\frac{d\tau}{d\eta}\right)^2 = F_1(\eta)\,.$$

In queste formole $F(\xi)$ $F_1(\eta)$ indicano due funzioni di ξ, η rispettivamente, soggette alla condizione di avere segno contrario, ma del resto arbitrarie. La condizione restrittiva rispetto ai segni di F, F_1 dipende dall'aver supposto che la superficie minima di 2ª specie considerata abbia le linee di curvatura reali. Ma anche se $F(\xi)$ $F_1(\eta)$ sono funzioni affatto arbitrarie, le (8) danno sempre una superficie integrale della (1); soltanto siccome la equazione differenziale delle linee di curvatura è data da

$$F(\xi)\,d\xi^2 + F_1(\eta)\,d\eta^2 = 0\,,$$

si vede che, ove F, F_1 abbiano lo stesso segno, le linee di curvatura sono immaginarie (cf. n. 6).

Dalla (δ), o con calcolo diretto, si trova subito per l'elemento lineare della superficie

$$(9)\qquad ds^2 = -4\,(\eta-\xi)^2\,F(\xi)\,F_1(\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

Questo valore di ds^2 non muta se si cangiano F, F_1 rispettivamente in kF, $\frac{F_1}{k}$, essendo k una costante arbitraria. Dunque le superficie minime di 2ª specie nello spazio S possono flettersi con continuità, restando superficie d'area minima.

12. Le formole (8) possono anche scriversi sotto altra forma. Siano

$$\varphi_1(\lambda)\,,\quad \varphi_2(\lambda)\,,\quad \varphi_3(\lambda)$$

tre funzioni della variabile λ, le cui derivate prime siano legate fra loro dalla relazione

$$\left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_3}{d\lambda}\right)^2,$$

e similmente

$$\psi_1(\mu)\quad \psi_2(\mu)\quad \psi_3(\mu)$$

tre funzioni di una seconda variabile reale μ, legate dalla relazione

$$\left(\frac{d\psi_1}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\psi_2}{d\mu}\right)^2 = \left(\frac{d\psi_3}{d\mu}\right)^2;$$

alle formole (8) potremo sostituire le seguenti:

$$(8')\qquad x = \varphi_1(\lambda) + \psi_1(\mu)\,,\quad y = \varphi_2(\lambda) + \psi_2(\mu)\,,\quad z = \varphi_3(\lambda) + \psi_3(\mu)\,.$$

Le formole (8), (8′) dimostrano che nell'ordinaria metrica euclidea queste superficie, integrali della (1), appartengono alla classe delle superficie di *traslazione*; le

loro curve generatrici sono eliche di cilindri paralleli all'asse z e ne tagliano le generatrici sotto l'angolo di 45°. Queste curve, come già si è detto al n. 5, rappresentano nello spazio S le linee di lunghezza nulla [1].

Se nelle (8) poniamo le funzioni arbitrarie $F(\xi)$, $F_1(\eta)$ rispettivamente eguali alle derivate terze $\varphi'''(\xi)$, $\psi'''(\eta)$ di due funzioni arbitrarie $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$, esse possono scriversi, senza segni di integrazione:

$$(10)\quad \begin{cases} x = \{(1-\xi^2)\varphi''(\xi)+2\xi\varphi'(\xi)-2\varphi(\xi)\} + \{(1-\eta^2)\psi''(\eta)+2\eta\psi'(\eta)-2\psi(\eta)\} \\ y = \{2\xi\varphi''(\xi)-2\varphi'(\xi)\} + \{2\eta\psi''(\eta)-2\psi'(\eta)\} \\ z = \{(1+\xi^2)\varphi''(\xi)-2\xi\varphi'(\xi)+2\varphi(\xi)\} + \{(1+\eta^2)\psi''(\eta)-2\eta\psi'(\eta)+2\psi(\eta)\} . \end{cases}$$

Da queste formole risulta che se $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ sono funzioni algebriche dei loro argomenti, la corrispondente superficie sarà algebrica. Ma sussiste anche la proposizione inversa:

Tutte le superficie minime di 2ª specie algebriche si ottengono dalle (10) ponendo per $\varphi(\xi)$ una funzione algebrica di ξ e per $\psi(\eta)$ una funzione algebrica di η [2].

13. Passiamo a trattare delle superficie d'area minima di 1ª specie. Alle formole relative a queste superficie si potrebbe pervenire con calcoli del tutto simili a quelli fatti al n. 11 per stabilire le formole (8); ma esse si possono anche dedurre subito dalle (8) supponendo che ξ, η, anzichè variabili reali, siano variabili complesse *coniugate*, che indicheremo con $\omega\ \omega_1$ e le funzioni F, F_1 siano pure coniugate. In tal caso

[1] Fra le superficie in questione sono notevoli quelle che hanno per curve generatrici eliche circolari di egual raggio. Se le eliche girano nel medesimo senso si ottiene l'ordinaria elicoide rigata d'area minima, se girano in senso contrario la superficie di rotazione che ha per meridiano una sinusoide (vedi Voss, Mathematische Annalen Bd. 19, p. 13-15).

[2] E infatti la superficie (10) può essere algebrica solo quando le due eliche generatrici sono algebriche, poichè se E, E′ sono due diverse posizioni di una delle eliche generatrici, la traslazione che porta E in E′ trasporta la superficie Σ in una nuova posizione Σ' e la curva E′ fa parte della intersezione di due superficie algebriche Σ, Σ'. Ora se l'elica

$$\begin{cases} x = (1-\xi^2)\varphi'' + 2\xi\varphi' - 2\varphi \\ y = 2\xi\varphi'' - 2\varphi' \\ z = (1+\xi^2)\varphi'' - 2\xi\varphi' + 2\varphi \end{cases}$$

è algebrica, saranno x, y funzioni algebriche di z e quindi

$$\frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)}{\left(\frac{dy}{dz}\right)} = \frac{\frac{dx}{d\xi}}{\frac{dy}{d\xi}} = \frac{1-\xi^2}{2\xi}$$

sarà pure funzione algebrica di z e perciò z, come anche x, y dovranno essere funzioni algebriche di ξ. Ne risulta che

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{4}(\xi^2-1)x - \frac{1}{2}\xi y + \frac{1}{4}(\xi^2+1)z$$

è funzione algebrica di ξ c. d. d.

le formole (8), cangiando F, F_1 in $\frac{1}{2}F, \frac{1}{2}F_1$ e denotando col simbolo $R(w)$ la parte reale di una quantità complessa w, diventano:

$$(11) \quad x=R\int(1-\omega^2)F(\omega)d\omega, \quad y=R\int 2\omega F(\omega)d\omega, \quad z=R\int(1+\omega^2)F(\omega)d\omega$$

e danno tutte le superficie *reali* d'area minima di 1ª specie dello spazio S [1]. Per l'elemento lineare di questa superficie si ha

$$(12) \qquad ds^2=-(\omega_1-\omega)^2 F(\omega) F_1(\omega_1) d\omega\, d\omega_1,$$

e la relazione fra la variabile complessa

$$\sigma=u+iv$$

e la variabile ω è espressa dalla formola

$$(13) \qquad F(\omega)=\frac{i}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2.$$

Dalla (12) si vede che ds non cangia mutando F in $e^{i\alpha}F$, quindi F_1 in $e^{-i\alpha}F_1$, essendo α una costante reale; dunque le nostre superficie possono flettersi con continuità nello spazio S, sempre restando ad area minima, precisamente come le ordinarie superficie minime nello spazio euclideo. In particolare vi ha luogo anche qui di considerare la superficie coniugata in applicabilità della (11), che si ottiene cangiando F in iF.

Paragonando le formole (8) con quelle di Weierstrass per le ordinarie superficie minime, troviamo per le nostre superficie la costruzione seguente:

Si considerino due superficie ordinarie d'area minima, coniugate in applicabilità date dalle formole:

$$x=R\int(1-\omega^2)F(\omega)d\omega, \quad y=R\int 2\omega F(\omega)d\omega, \quad z=R\int i(1+\omega^2)F(\omega)d\omega$$

$$x=R\int i(1-\omega^2)F(\omega)d\omega, \quad y=R\int 2i\omega F(\omega)d\omega, \quad z_1=R\int -(1+\omega^2)F(\omega)d\omega,$$

per ogni punto P della 1ª si tiri la normale al piano xy e per il punto P_1 corrispondente della 2ª il piano parallelo al piano xy che incontri nel punto Q la detta normale. La superficie luogo del punto Q darà un integrale (di 1ª specie) della equazione (1):

$$(1-q^2)r+2pqs+(1-p^2)t=0.$$

Nè tralascieremo di notare che il problema di determinare una superficie di 1ª o 2ª specie, integrale della (1), in guisa che passi per una curva (*analitica*) assegnata e lungo di essa abbia piani tangenti determinati (quando cioè della superficie sia assegnata una striscia analitica) si risolve anche qui, in modo unico e determinato, per quadrature con formole analoghe a quelle di Schwarz per le ordinarie superficie minime.

Osservazione. Nell'integrare la equazione (1) abbiamo supposto $p^2+q^2 \gtrless 1$. Ogni integrale della equazione

$$p^2+q^2=1$$

[1] Le superficie *algebriche* di questa specie si ottengono tutte prendendo per $F(\omega)$ la derivata terza di una funzione algebrica di ω (cf. sopra).

è altresì un integrale della (1). La superficie corrispondente è una sviluppabile avente per spigolo di regresso un' elica di lunghezza nulla (n. 5); una tale superficie deve considerarsi, in ogni sua estensione, come avente un' area nulla.

§ IV.

Superficie Fuchsiane.

14. Veniamo ora al problema più difficile ed interessante, che si può proporre nella determinazione delle superficie minime dello spazio S, voglio dire al problema analogo a quello di Plateau per le ordinarie superficie minime:

Dato nello spazio un contorno chiuso, determinare una porzione di superficie, semplicemente connessa, terminata a questo contorno, che nell' interno sia priva di punti singolari e soddisfi alla equazione

$$(1) \qquad (1-q^2)\,r + 2pqs + (1-p^2)\,t = 0\,.$$

Ci limiteremo a considerare le superficie di 1ª specie, per le quali, come per le ordinarie superficie minime, la questione si collega col problema delle rappresentazioni conformi; per le superficie di 2ª specie occorrono invece considerazioni d' indole diversa.

Abbiamo veduto (§ precte.) che l'elemento lineare di una superficie minima di 1ª specie, riferito alle linee di curvatura, prende la forma

$$(\alpha) \qquad ds^2 = r_2\,(du^2 + dv^2)\,,$$

mentre espresso per la variabile complessa ω e la coniugata ω_1 è dato dalla formola (12) n. 13.

$$(\beta) \qquad ds^2 = -(\omega_1 - \omega)^2\,\mathrm{F}(\omega)\,\mathrm{F}_1(\omega_1)\,d\omega\,d\omega_1\,.$$

Da queste due formole (α) (β) vengono stabilite due diverse rappresentazioni conformi della superficie minima Σ, l'una sul piano della variabile complessa

$$\sigma = u + iv\,,$$

l'altra sul piano della variabile complessa ω. Fra le variabili σ, ω sussiste la relazione (13) n. 13

$$(\gamma) \qquad \mathrm{F}(\omega) = \frac{i}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2\,.$$

I valori della variabile complessa ω possono anche intendersi distribuiti sulla sfera rappresentativa (n. 11), la cui equazione è

$$\mathrm{X}_3^2 + \mathrm{Y}_3^2 - \mathrm{Z}_3^2 = -1$$

e le coordinate dei cui punti si esprimono per la variabile ω e la coniugata ω_1 colle formole:

$$(2) \qquad \mathrm{X}_3 = i\,\frac{1-\omega\omega_1}{\omega-\omega_1}\,, \quad \mathrm{Y}_3 = i\,\frac{\omega+\omega_1}{\omega-\omega_1}\,, \quad \mathrm{Z}_3 = i\,\frac{1+\omega\omega_1}{\omega-\omega_1}\,.$$

L'elemento lineare di questa sfera, espresso per ω, ω_1 è dato da

$$ds'^2 = -\frac{4}{(\omega-\omega_1)^2}\,d\omega\,d\omega_1\,,$$

formola che appartiene altresì all'elemento lineare dell'ordinaria pseudosfera. Posto infatti

$$\omega = \beta + ie^{-\alpha} \qquad \omega_1 = \beta - ie^{-\alpha}\,,$$

si ha

$$-\frac{4}{(\omega_1-\omega)^2}\,d\omega\,d\omega_1 = d\alpha^2 + e^{2\alpha}\,d\beta^2 \ \text{(1)}.$$

Assegnata dunque una superficie minima Σ di 1ª specie, cioè data la funzione $F(\omega)$, possiamo dire che ne viene determinata una rappresentazione conforme della pseudosfera, che porta i valori della variabile ω, sul piano della variabile complessa σ.

Inversamente se il contorno assegnato alla superficie minima Σ è tale che ne risultino determinate le aree corrispondenti A, A′ sulla pseudosfera e sul piano, la questione si ridurrà a rappresentare in modo conforme l'area A sull'area A′, in guisa che al contorno dell'una corrisponda il contorno dell'altra. Eseguita la rappresentazione si otterrà σ in funzione di ω e basterà sostituire nelle formole:

$$\text{(A)}\quad x = R\int(1-\omega^2)F(\omega)\,d\omega\,, \qquad y = R\int 2\omega\, F(\omega)\,d\omega\,, \qquad z = R\int(1+\omega^2)F(\omega)d\omega$$

(1) Trovano qui luogo opportuno le osservazioni seguenti.

Si può determinare la posizione di un punto (x, y, z) nello spazio S per mezzo delle variabili ω, ω_1 e della sua distanza ϱ dall' origine colle formole

$$x = i\varrho\,\frac{1-\omega\omega_1}{\omega-\omega_1}\,, \quad y = i\varrho\,\frac{\omega+\omega_1}{\omega-\omega_1}\,, \quad z = i\varrho\,\frac{1+\omega\omega_1}{\omega-\omega_1}\,.$$

È noto che ogni sostituzione lineare

$$\text{(B)}\qquad \omega = \frac{\alpha\omega'+\beta}{\gamma\omega'+\delta}$$

a coefficienti reali e a determinante $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, effettuata sulla variabile ω, rappresenta un movimento della pseudosfera in sè medesima. Se a questa formola associamo l'altra $\varrho=\varrho'$, avremo definito un movimento di tutto lo spazio S in sè medesimo e propriamente una rotazione attorno all'origine delle coordinate.

Le sostituzioni (B) si distinguono, come è noto, in ellittiche, iperboliche e paraboliche a seconda che le radici della equazione

$$\gamma\omega^2 + (\delta-\alpha)\,\omega - \beta = 0\,,$$

(cioè i valori di ω che rimangono fissi per la sostituzione (B)) sono immaginarie, reali e distinte o coincidenti. Se la sostituzione (B) è ellittica, la rotazione dello spazio S avviene attorno ad una retta di 1ª specie, se è iperbolica attorno ad una retta di 2ª specie; in fine se la sostituzione è parabolica l'asse di rotazione coincide con una generatrice del cono $x^2+y^2-z^2=0$. Calcolando l'effetto prodotto dalla sostituzione (B) sopra x, y, z si trova facilmente che esso si riduce alla sostituzione ternaria omogenea

$$\text{(C)}\qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2}{2}\,, & \gamma\delta-\alpha\beta\,, & \dfrac{-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{2} \\ \beta\delta-\alpha\gamma\,, & \alpha\delta+\beta\gamma\,, & \beta\delta+\alpha\gamma \\ \dfrac{-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2}{2}\,, & \alpha\beta+\gamma\delta\,, & \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{2} \end{pmatrix}$$

eseguita sopra x, y, z.

La (C) dà la sostituzione più generale che trasforma in sè medesima la forma ternaria indefinita $x^2+y^2-z^2$. Se si vuole che i coefficienti della (C) siano numeri interi, si ottiene il risultato enunciato da Gauss in una nota postuma (Werke, Bd. II, p. 311).

Osserviamo in fine che ad ogni gruppo Fuchsiano di sostituzioni (B) $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ corrisponderà, secondo la formola (C), un gruppo oloedricamente isomorfo di rotazioni dello spazio S.

per $F(\omega)$ il suo valore

$$F(\omega) = \frac{i}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2$$

per ottenere la superficie richiesta.

15. La circostanza sopra accennata si presenta quando il contorno assegnato è formato da tratti rettilinei e più in generale quando, essendo data una catena continua chiusa formata da tratti rettilinei e da piani, si vuole determinare una porzione di superficie minima di 1ª specie Σ, semplicemente connessa, limitata ai tratti rettilinei ed ai piani e che tagli questi ultimi ad angolo retto (naturalmente nel senso della metrica angolare dello spazio S) (1). In tal caso infatti i tratti rettilinei del contorno sono linee assintotiche di Σ e le curve secondo le quali la superficie Σ taglia i piani del contorno sono linee di curvatura. Le prime, avendo per equazione (v. n. 10)

$$u - v = \text{cost}^{\text{te}}, \qquad u + v = \text{cost}^{\text{te}}$$

vengono rappresentate sul piano complesso σ da rette inclinate di 45° sugli assi coordinati; le seconde, avendo per equazione

$$u = \text{cost}^{\text{te}}, \qquad v = \text{cost}^{\text{te}}$$

da rette parallele ai medesimi assi, cosicchè l'area A' sul piano σ è racchiusa da un poligono rettilineo. Sulla sfera rappresentativa la immagine di una retta esistente sopra Σ è nel piano parallelo condotto pel centro normalmente alla retta stessa e quella di ogni linea di curvatura, tagliata da un piano del contorno, è nel piano parallelo condotto pel centro, cosicchè l'area A è racchiusa da un poligono geodetico. Se si riguarda quest' ultimo poligono come tracciato nel piano della variabile complessa ω, ogni suo lato avendo un' equazione della forma

$$aX_3 + bY_3 + cZ_3 = 0 \qquad (a, b, c \text{ cost}^{\text{ti}}),$$

ossia per le (2)

$$a(1 - \omega\omega_1) + b(\omega + \omega_1) + c(1 + \omega\omega_1) = 0,$$

è un arco di circolo col centro sull'asse delle quantità reali (2). Chiameremo questo poligono ad archi di circolo del piano complesso ω il poligono P.

Effettuata la rappresentazione conforme del poligono P sul poligono A', quando si limiti nelle formole (A) n. 14 il corso della variabile complessa ω entro il poligono P, avremo analiticamente rappresentata la porzione di superficie Σ richiesta, terminata al contorno assegnato. Ma se si lascia muovere la variabile ω liberamente nel suo piano, le formole (A) ci daranno l' intera superficie minima, che nasce per continuazione analitica dalla porzione sopra considerata. Tale continuazione analitica ha luogo secondo le leggi seguenti.

Come per le ordinarie superficie minime, si può dimostrare che ogni retta giacente sopra una superficie minima dello spazio S è un asse di simmetria per la superficie e similmente ogni piano che tagli ortogonalmente la superficie un piano di

(1) Cf. Schwarz, *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen* (Monatsberichte der Berliner Akademie 1871).

(2) Cf. Poincaré, Acta Mathematica, Bd. I, § 1.

simmetria [1]. Ciò posto immaginiamo che il poligono fondamentale P, per riflessione (Spiegelung) sopra ciascuno degli archi circolari che lo limitano dia origine ad altrettanti nuovi poligoni, ciascuno aderente per un lato a P, e continuiamo indefinitamente la stessa operazione sui nuovi poligoni via via ottenuti [2]. Se l'indice della variabile ω esce dal poligono P per un suo lato α ed entra nel poligono aderente P', le formole (A), mentre l'indice di ω si muove entro P', danno una nuova porzione della superficie Σ, simmetrica della iniziale rispetto a quel lato a del contorno assegnato, che corrisponde al lato α del poligono P. Questa nuova porzione, contornata come la primitiva e aderente ad essa per il lato a, ne forma lungo questo lato la continuazione analitica. In generale se l'indice di ω, movendo da un punto interno di P, percorre una linea aperta, che traversi un certo numero di poligoni della rete, altrettante porzioni alternatamente simmetriche e congruenti, della superficie Σ, traverserà nello spazio il punto (x, y, z), le cui coordinate sono date dalle (A).

Queste infinite porzioni di superficie costituiscono analiticamente un' unica superficie sommamente intralciata, poichè in generale, come subito si vede, in ogni porzione *finita* dello spazio entrano infinite di quelle porzioni di superficie.

Perchè tale circostanza non si presenti, ma invece la superficie si estenda regolarmente nello spazio, a guisa p. e. della superficie minima ordinaria studiata dal sig. Schwarz [1], sarà in primo luogo *necessario* che la rete di poligoni ad archi di circolo, nata per successive riflessioni dal poligono P, ricuopra un sola volta, senza sovrapposizioni, il semi-piano. Bisognerà cioè, secondo la terminologia del sig. Poincaré, che il poligono P sia il semi-poligono generatore di un gruppo Fuchsiano (simmetrico). Nel caso generale di un contorno formato da tratti rettilinei e da piani tale condizione necessaria non è per altro sufficiente, ma si richiede ulteriormente che gli angoli del poligono P soddisfino a certe diseguaglianze, il cui esame dettagliato ci condurrebbe qui troppo lontano. Però se il contorno è unicamente formato di tratti rettilinei, basterà che il poligono P soddisfi alla condizione enunciata e la corrispondente superficie Σ sarà in tutta la sua estensione una superficie regolare.

In ogni caso alle superficie Σ sopra descritte, integrali della (3), costituite di infinite porzioni, che in ogni parte finita dello spazio entrino in numero *finito*, daremo il nome di *superficie Fuchsiane*.

[1] Queste proposizioni sono corollarî del teorema che una superficie minima è individuata da una sua striscia (v. n. 13 in fine e Schwarz, *Miscellen* ecc.). La simmetria rispetto ad una retta o ad un piano deve intendersi naturalmente nel senso della metrica dello spazio S, cioè:

Due punti sono simmetrici rispetto ad una retta o ad un piano quando il segmento rettilineo che li unisce è normale nel suo punto medio alla retta ed al piano.

Considerata rispetto all'ordinario spazio euclideo è questa una specie di simmetria che si può dire *obliqua*.

[2] Considerata sulla pseudosfera obiettiva, di cui il piano complesso ω è l'immagine, ogni tale operazione consiste nel ribaltare il corrispondente poligono geodetico attorno ad uno dei suoi lati.

[3] Superficie minima contornata da un quadrilatero sghembo, i cui lati sono quattro spigoli due a due opposti di un tetraedro regolare (*Gekrönte Preisschrift-Bestimmung einer speciellen Minimalfläche*. Berlin, 1871).

Per porre fuor di dubbio l'esistenza di infinite classi di superficie Fuchsiane consideriamo nei seguenti nn. 16-19 il caso di un contorno di Schwarz formato da due tratti rettilinei e da un piano. In fine, supponendo che il contorno sia tutto costituito di tratti rettilinei, dimostreremo che ogni gruppo Fuchsiano (simmetrico) della 1ª famiglia dà sempre origine a un certo numero di superficie Fuchsiane.

16. Sia dato un contorno Γ di Schwarz formato da due tratti rettilinei e da un piano; la porzione di superficie Σ, integrale dalla (1), limitata a questo contorno, avrà per immagine sul semi-piano positivo della variabile complessa ω (n. 15) un triangolo ABC i cui lati sono archi di circolo coi centri sull'asse reale. Per fissare le idee, supporremo che i due tratti rettilinei del contorno Γ siano rappresentati dai lati AB, AC. Se indichiamo con

$$\frac{\pi}{a}\,,\ \frac{\pi}{b}\,,\ \frac{\pi}{c}$$

i valori degli angoli in A, B, C del triangolo, dovendo essere la somma di questi angoli minore di due retti, sarà:

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1\,.$$

Inversamente, se a, b, c sono tre numeri reali che soddisfano la diseguaglianza (B) esiste sulla pseudosfera un triangolo geodetico cogli angoli $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}$ e, prescindendo da movimenti della pseudosfera in sè medesima, esso è perfettamente determinato. Affinchè il triangolo ABC, per successive riflessioni, generi una rete Fuchsiana è necessario e sufficiente (Poincaré, l. c. p. 37) che i numeri a, b, c siano interi, il che appunto supporremo.

L'immagine della stessa porzione di superficie Σ sul piano complesso σ sarà un triangolo rettangolo isoscele A′ B′ C′ colla ipotenusa B′ C′ parallela all'asse reale. Secondo il metodo generale del n. 15, per trovare la nostra superficie Σ basterà prendere per σ quella tale funzione di ω che effettua la rappresentazione conforme del triangolo rettilineo A′ B′ C′ sul triangolo ad archi di circolo ABC. Perciò rappresentiamo in modo conforme l'uno e l'altro triangolo sul semi-piano positivo di una variabile complessa ausiliaria w in guisa che il contorno del triangolo venga a corrispondere all'asse reale sul piano w. Per determinare completamente la funzione w di ω o di σ basterà in fine fissare che ai tre vertici del triangolo corrispondano tre determinati valori reali di w; noi supporremo:

$$\begin{array}{ll} \text{in A o A}' & w=0 \\ \text{in B o B}' & w=1 \\ \text{in C o C}' & w=\infty\,. \end{array}$$

Dalle note ricerche di Schwarz-Christoffel sulla rappresentazione conforme di un poligono rettilineo sul mezzo piano segue che σ si esprime per w colla formola

$$\sigma=\mathrm{T}\int\frac{dw}{w^{\frac{1}{2}}(1-w)^{\frac{3}{4}}}\,,$$

dove T è una costante. E poichè la funzione

$$\left(\frac{d\sigma}{dw}\right)^2=\frac{\mathrm{T}^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}$$

sul cateto A′ B′ del triangolo A′ B′ C′ ha per argomento $\frac{\pi}{2}\left(o\ 3\ \frac{\pi}{2}\right)$, ne segue

$$T^2 = \pm K i\,,$$

essendo K una costante reale e positiva.

Dalla teoria delle funzioni Fuchsiane risulta poi che w è funzione Fuchsiana (simmetrica) di ω e come tale essa è monodroma e continua in tutto il semipiano positivo di ω. La stessa teoria dà il modo di calcolare in ogni punto del semipiano il valore di w con processi convergenti di calcolo.

Determinato così σ in funzione di w e w in funzione di ω, otterremo la funzione $F(\omega)$ da sostituirsi nelle (A) colla formola

$$F(\omega) = \frac{i}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2$$

ossia

$$F(\omega) = \mp \frac{K}{2}\,\frac{1}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2.$$

Ponendo dunque $k = \mp \frac{K}{2}$, la superficie richiesta, ove esista, sarà data dalle formole

$$(3)\qquad x = kR\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1-\omega^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega\,,\quad y = kR\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{2\alpha}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\alpha\,,$$

$$z = kR\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1+\omega^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega\,,$$

ove si è indicato con ω_0 il valore di ω nel punto iniziale del cammino d'integrazione.

Siccome la funzione w in tutti i punti della rete Fuchsiana omologhi al punto A diventa infinitesima d'ordine a, mentre $1-w$ nel punti omologhi a B diventa infinitesima d'ordine b e ambedue diventano infinite d'ordine c nei punti omologhi a C, così è chiaro che nel caso generale la funzione

$$F(\omega) = \frac{k}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2,$$

che comparisce sotto il segno integrale nelle (3) avrà infiniti poli e punti critici algebrici nei vertici della rete.

17. A quali condizioni dovranno assoggettarsi a, b, c affinchè la funzione $F(\omega)$ in tutto il semipiano positivo ω (l'asse reale escluso) non abbia alcun punto singolare? In primo luogo per evitare la polidromia nascente dal radicale $\sqrt{1-w}$, basta supporre che b *sia pari*. Se poi osserviamo che $F(\omega)$ diventa infinita nei punti omologhi ad A, B, C degli ordini seguenti [1]:

nei punti omologhi ad A di ordine $= a - 2(a-1) = 2 - a$

nei punti omologhi a B d'ordine $= \frac{3}{2}b - 2(b-1) = 2 - \frac{1}{2}b$

nei punti omologhi a C d'ordine $= 2(c+1) - \frac{5}{2}c = 2 - \frac{1}{2}c\,,$

[1] In tale computo per infinito d'ordine negativo $-n$ s'intende, come al solito, un infinitesimo d'ordine n.

risulta chiaramente che sarà evitata per la funzione $F(\omega)$ ogni singolarità nel semipiano positivo (l'asse reale escluso), quando ai numeri interi a, b, c s'impongano le condizioni seguenti:

$$(D) \qquad \begin{cases} 1^\circ \ b \text{ sia pari} \\ 2^\circ \ \text{Si abbia } a \geq 2 , \quad b \geq 4 , \quad c \geq 4 . \end{cases}$$

Soddisfatte queste condizioni, sarà pure soddisfatta la diseguaglianza (B), purchè si intenda esclusa la combinazione dei valori estremi

$$a = 2 , \quad b = 4 , \quad c = 4 .$$

Ora supponiamo inversamente che a, b, c siano tre numeri interi, assoggettati soltanto alle condizioni (D), e costruita la corrispondente rete Fuchsiana e la conseguente funzione Fuchsiana w di ω dimostriamo che le formole (3) ci daranno una superficie Fuchsiana. Per quanto si è visto sopra le funzioni di ω, che compariscono sotto il segno integrale nelle (3), in tutto il semipiano positivo (l'asse reale escluso) saranno finite continue e monodrome. La superficie Σ, rappresentata dalle (3), avrà dunque dappertutto il carattere di superficie algebrica e sarà priva di punti singolari.

Resta soltanto da verificarsi che ogni porzione di superficie Σ, corrispondente ad uno qualunque dei triangoli della rete Fuchsiana, ha realmente un contorno costituito da due tratti rettilinei e da un segmento di curva piana, il cui piano è normale alla superficie. Basterà fare questa verifica pel triangolo ABC, ogni altro triangolo della rete trovandosi nelle medesime condizioni [1].

18. Supponiamo adunque che nelle formole (3) l'indice del limite superiore ω percorra un lato del triangolo ABC. Facciamo la sostituzione lineare

$$(4) \qquad \omega = \frac{\alpha\Omega + \beta}{\gamma\Omega + \delta}$$

a coefficienti reali e a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, in guisa che mentre l'indice di ω percorre l'arco di circolo in questione, l'indice di Ω percorra un tratto dell'asse immaginario, ciò che è sempre possibile. Colla sostituzione (4) le (3) diventano

$$(3^*) \qquad \begin{cases} x = k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{(\gamma\Omega + \delta)^2 - (\alpha\Omega + \beta)^2}{w\,(1 - w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 d\Omega \\ y = k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{(\,2\,(\alpha\Omega + \beta)\,\ (\gamma\Omega + \delta)}{w\,(1 - w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 d\Omega \\ z = k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{(\gamma\Omega + \delta)^2 + (\alpha\Omega + \beta)^2}{w\,(1 - w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 d\Omega . \end{cases}$$

Basterà ora supporre qui Ω puramente immaginario, poniamo

$$\Omega = iu$$

[1] N. B. Le verifiche del seguente numero valgono anche se a, b, c non sono numeri interi; soltanto la corrispondente superficie Σ non sarebbe più una superficie Fuchsiana.

e far variare u fra certi limiti $u_0\ u_1$ perchè l'indice del corrispondente valore (4) di ω percorra il lato voluto del triangolo ABC. Ora se questo lato è AB o AC, osserviamo che sopra di esso, essendo w reale e compreso fra $-\infty$ e $+1$, la funzione

$$\frac{1}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 = -\frac{1}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2$$

è reale e quindi separando nelle (3*) la parte reale si avrà subito:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = 2k(\gamma\delta-\alpha\beta)\displaystyle\int_{u_0}^{u}\frac{u}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 du + c_1 \\ y = 2k(\alpha\delta+\beta\gamma)\displaystyle\int_{u_0}^{u}\frac{u}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 du + c_2 \\ z = 2k(\gamma\delta+\alpha\beta)\displaystyle\int_{u_0}^{u}\frac{u}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 du + c_3\,, \end{cases}$$

dove le tre costanti additive (reali) c_1, c_2, c_3 dipendono dal punto iniziale del cammino d'integrazione. Da queste formole risulta che mentre l'indice del limite superiore ω negli integrali (3) percorre l'arco circolare AB o AC il punto $M \equiv (x, y, z)$ della superficie minima Σ percorre un tratto finito della retta che ha per equazioni

$$\frac{x-c_1}{\gamma\delta-\alpha\beta} = \frac{y-c_2}{\alpha\delta+\beta\gamma} = \frac{z-c_3}{\gamma\delta-\alpha\beta}\,.$$

Supponiamo ora invece che l'indice di ω percorra l'arco circolare BC. Facendo ancora uso di un' opportuna trasformazione (4) avremo nuovamente le formole (3*); ma poichè sull'arco BC la funzione w è reale e compresa fra $+1$ e $+\infty$, così la funzione

$$\frac{1}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 = \frac{-i}{w(w-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2$$

sarà puramente immaginaria. E in tal caso, separando nelle (3*) la parte reale otterremo le formole:

$$(5')\qquad \begin{cases} x = k\displaystyle\int_{u_0}^{u}\frac{(\alpha^2-\gamma^2)u^2+\delta^2-\beta^2}{w(w-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 du + c_1 \\ y = k\displaystyle\int_{u_0}^{u}\frac{-\alpha\gamma u^2+\beta\delta}{w(w-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 du + c_2 \\ z = k\displaystyle\int_{u_0}^{u}\frac{(-(\alpha^2+\gamma)u^2+\delta^2+\beta^2}{w(w-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 du + c_3. \end{cases}$$

Mentre l'indice di ω percorre l'arco BC le coordinate x, y, z del punto corrispondente M sopra Σ sono dunque legate fra loro dalla relazione lineare

$$(6) \qquad (\alpha\beta-\gamma\delta)(x-c_1)-(\alpha\delta+\beta\gamma)(y-c_2)+(\alpha\beta+\gamma\delta)(z-c_3)=0,$$

cioè il punto M descrive un arco di curva piana. Resta a vedersi che il piano di questa curva è normale alla superficie. Nel modo più semplice si fa quest' ultima verifica supponendo il triangolo ABC già orientato in guisa che il lato BC sia un tratto dell'asse immaginario. Allora dovremo fare nelle formole precedenti

$$\alpha=1 \quad \beta=0 \quad \gamma=0 \quad \delta=1,$$

il che dà per l'equazione del piano che contiene la curva

$$y=c_2.$$

D'altra parte se si suppone ω puramente immaginario nelle formole (2) n. 14 che danno i coseni di direzione $X_3\, Y_3\, Z_3$ della normale alla superficie si ha subito

$$Y_3=0,$$

il che dimostra appunto che il piano $y=c_2$ taglia normalmente la superficie.

19. Se consideriamo il triangolo ABC ed il suo simmetrico A'BC rispetto al lato BC, essi formano insieme un quadrilatero fondamentale della rete Fuchsiana. La porzione corrispondente di superficie Σ, data dalla (3), sarà limitata da un quadrilatero sghembo. Come il semi-piano della variabile complessa ω risulta diviso negli infiniti quadrilateri ad archi di circolo, che formano la rete Fuchsiana, così la superficie Σ si divide spontaneamente in infinite porzioni limitate da quadrilateri sghembi, ciascuna delle quali corrisponde univocamente ad un quadrilatero della rete Fuchsiana. In particolare intorno ad ogni punto della superficie Σ corrispondente ai vertici della rete omologhi ad A, B, C si aggrupperanno rispettivamente a, b, c di quei quadrilateri a superficie curva. Tutti questi quadrilateri curvi, il cui insieme forma l'intera superficie Σ sono congruenti fra loro nel senso della metrica dello spazio S.

Se si riguarda invece la superficie Σ come esistente nell'ordinario spazio euclideo, ciascuno di questi quadrilateri curvi nasce da uno fisso con una collineazione dello spazio, che è facile determinare. Supponiamo p. e che si voglia effettuare il passaggio dal quadrilatero curvo Q di Σ, corrispondente al quadrilatero fondamentale ABA'C della rete, ad un secondo quadrilatero Q' corrispondente a quel quadrilatero della rete che nasce dal fondamentale colla sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ del gruppo Fuchsiano. Se diciamo (x, y, z) le coordinate di un punto qualunque M sul quadrilatero curvo Q e (x', y', z') quelle del punto corrispondente M' sopra Q', mentre x, y, z sono date dalle (3), x', y', z' si otterranno dalle altre:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= c_1 + kR \int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{1-\Omega^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 d\Omega \\ y' &= c_2 + kR \int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{2\Omega}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 d\Omega \\ z' &= c_3 + kR \int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{1+\Omega^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\Omega}\right)^2 d\Omega, \end{aligned} \right.$$

dove si è posto

$$\Omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \Omega_0 = \frac{\alpha\omega_0 + \beta}{\gamma\omega_0 + \delta}$$

e le costanti c_1, c_2, c_3 indicano i valori di x, y, z in Ω_0 cioè:

$$(8) \quad \begin{cases} c_1 = k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\omega_0}^{\frac{\alpha\omega_0+\beta}{\gamma\omega_0+\delta}} \frac{1-\omega^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ c_2 = k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\omega_0}^{\frac{\alpha\omega_0+\beta}{\gamma\omega_0+\delta}} \frac{2\omega}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ c_3 = k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\omega_0}^{\frac{\alpha\omega_0+\beta}{\gamma\omega_0+\delta}} \frac{1+\omega^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega . \end{cases}$$

Effettuando negli integrali (7) il cangiamento di variabile

$$\Omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

ed osservando che si ha

$$w\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = w(\omega)$$

si otterrà:

$$(7^*) \quad \begin{cases} x' = c_1 + k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{(\gamma\omega+\delta)^2 - (\alpha\omega+\beta)^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ y' = c_2 + k\mathrm{R} \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{2(\gamma\omega+\delta)(\alpha\omega+\beta)}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ z' = c_3 + k\mathrm{R} \displaystyle\int_{x_0}^{\omega} \frac{(\gamma\omega+\delta)^2 + (\alpha\omega+\beta)^2}{w(1-w)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega . \end{cases}$$

Queste confrontate colle (3) ci danno subito le relazioni lineari richieste:

$$(9) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2}{2} x + (\gamma\delta - \alpha\beta) y + \dfrac{-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2} z + c_1 \\ y' = (\beta\delta - \alpha\gamma) x + (\alpha\delta + \beta\gamma) y + (\beta\delta + \alpha\gamma) z + c_2 \\ z' = \dfrac{-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2}{2} x + (\gamma\delta + \alpha\beta) y + \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2} z + c_3 . \end{cases}$$

Se la sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ percorre tutte le sostituzioni del gruppo Fuchsiano, le (9) definiscono un gruppo oloedricamente isomorfo di collineazioni dello spazio, per le quali la superficie Fuchsiana Σ si trasforma in sè medesima. E propriamente ogni collineazione del gruppo scambia fra loro i quadrilateri curvi il cui insieme forma la superficie. Questa proprietà è del resto comune a tutte le superficie Fuchsiane, poichè per ogni tale superficie sussistono le formole (9) che scambiano fra loro i poligoni curvi da cui la superficie è costituita.

Secondo le denominazioni introdotte da Princarè nel vol. V degli Acta Mathematica *Mémoire sur les fonctions Zétafuchsiennes* possiamo dire in altre parole: Le funzioni di ω che compariscono sotto il segno integrale nelle formole (A) n. 14, per una superficie Fuchsiana, sono funzioni Zetafuchsiane corrispondente al gruppo ternario

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2}{2}, & \gamma\delta-\alpha\beta, & \frac{-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{2} \\ \beta\delta-\alpha\gamma, & \alpha\delta+\beta\gamma, & \beta\delta+\alpha\gamma \\ \frac{-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2}{2}, & \gamma\delta+\alpha\beta, & \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{2} \end{pmatrix}$$

oloedricamente isomorfo al gruppo Fuchsiano.

20. Consideriamo come secondo esempio un contorno Γ formato da un quadrilatero sghembo. La porzione di superficie Σ limitata al quadrilatero Γ avrà per immagine sul piano complesso ω un quadrilatero ABCD ad archi di circolo, mentre sul piano σ la stessa porzione di superficie sarà rappresentata da un rettangolo, i cui lati sono inclinati di 45° sugli assi.

Se rappresentiamo in modo conforme il quadrilatero ABCD sul semi-piano di una variabile complessa ausiliaria ψ, in guisa che si abbia:

$$\text{in A}\ldots\psi=0\,, \quad \text{in B}\ldots\psi=1\,, \quad \text{in D}\ldots\psi=\infty\,,$$

il valore di ψ in C sarà reale, positivo e maggiore dell'unità e si potrà quindi indicare con $\psi_c=\frac{1}{k^2}$ essendo k reale, positivo e minore dell'unità.

Per rappresentare in modo conforme lo stesso semi-piano ψ sul rettangolo del piano σ abbiamo la formola

$$\sigma = \mathrm{H}e^{i\frac{\pi}{4}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{\psi(1-\psi)(1-k^2\psi)}}, \tag{10}$$

dove H è una costante reale. Ne risulta:

$$\mathrm{F}(\omega)=\frac{i}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2=-\frac{\mathrm{H}}{2}\,\frac{1}{\psi(1-\psi)(1-k^2\psi)}\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2$$

e le formole che danno la porzione di superficie richiesta Σ sono quindi:

$$(11)\quad \begin{cases} x = a\mathrm{R}\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1-\omega^2}{\psi(1-\psi)(1-k^2\psi)}\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ y = a\mathrm{R}\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{2\omega}{\psi(1-\psi)(1-k^2\psi)}\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ z = a\mathrm{R}\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1+\omega^2}{\psi(1-\psi)(1-k^2\psi)}\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 d\omega, \end{cases}$$

dove a è una costante reale.

Come al n. 18 si verificherà che se l'indice del limite superiore ω nelle formole (11) si muove entro il quadrilatero ABCD, la porzione di superficie Σ rappresentata è realmente contornata da un quadrilatero sghembo.

Supponiamo ora che il quadrilatero ABCD sia il semi-poligono generatore di un gruppo Fuchsiano. Indicando con

$$\frac{\pi}{a}\,,\ \frac{\pi}{b}\,,\ \frac{\pi}{c}\,,\ \frac{\pi}{d}$$

gli angoli in A, B, C, D del quadrilatero, la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò accada è che a, b, c, d siano numeri interi. E siccome in tal caso ciascuno di essi è almeno eguale a 2, la funzione $\mathrm{F}(\omega)$ in tutto il semipiano positivo (l'asse) reale escluso) sarà finita, continua e monodroma [1].

Dunque: Ad ogni rete Fuchsiana composta di quadrilateri (della 1ª famiglia) corrisponde sempre una superficie Fuchsiana.

Il caso considerato ai numeri precedenti 16, 19 rientra naturalmente nell'attuale. Basta supporre che il quadrilatero ABCD sia simmetrico rispetto alla diagonale BD. Allora il rettangolo del piano σ diventa un quadrato e il modulo k dell' integrale ellittico (10) acquista il valore

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Paragonando la funzione ψ delle formole (11) colla funzione w delle (3) ed esaminando la diramazione di ψ rapporto a w, si trova subito

$$w = \psi\,(2-\psi)$$

e con tale sostituzione effettivamente le (3) si cangiano nelle (11).

Già da questi semplici esempî si vede quanto più ricca è la classe delle superficie Fuchsiane in confronto della classe analoga fra le superficie ordinarie minime. Mentre fra queste ultime, come Schwarz ha dimostrato, ve ne sono *cinque* soltanto costituite da infiniti quadrilateri curvi, e tali che ogni porzione finita di spazio contenga solo un numero finito di essi, di superficie Fuchsiane composte di quadrilateri curvi ve ne ha invece un numero infinito.

[1] E infatti gli ordini d'infinito di $\mathrm{F}(\omega)$ nei vertici della rete rispettivamente omologhi ad A, B, C, D sono dati dai numeri negativi o nulli: $2-a$, $2-b$, $2-c$, $2-d$.

21. Da ultimo supponiamo che il contorno Γ sia un poligono sghembo con un numero qualunque $n+1$ di lati. La porzione di superficie Σ limitata al contorno Γ avrà per immagine sul piano ω un poligono P con $n+1$ lati circolari. Siano

$$\omega = \alpha_1 , \quad \omega = \alpha_2 , \ldots \omega = \alpha_n , \quad \omega = \alpha_{n+1}$$

i vertici di questo poligono in ordine di successione e

$$\frac{\pi}{\beta_1} , \frac{\pi}{\beta_2} , \ldots \frac{\pi}{\beta_n} , \frac{\pi}{\beta_{n+1}}$$

gli angoli corrispondenti del poligono; basterà supporre $\beta_1 , \beta_2 \ldots \beta_{n+1}$ numeri interi affinchè il poligono P sia il semipoligono generatore di un gruppo Fuchsiano ([1]).

Rappresentiamo in modo conforme il poligono P sul semipiano positivo di una variabile complessa w in guisa che al contorno di P corrisponda l'asse reale. Se poniamo

$$w(\alpha_1) = w_1 , \quad w(\alpha_2) = w_2 , \ldots w(\alpha_{n+1}) = w_{n+1} ,$$

la funzione Fuchsiana $w(\omega)$ sarà completamente determinata, assumendo p. e. nei tre vertici α_1 , α_2 , α_{n+1}

$$w_1 = 0 , \quad w_2 = 1 , \quad w_{n+1} = \infty .$$

La immagine della stessa porzione di superficie Σ sul piano complesso σ sarà un'area A, che supporremo ad un solo strato, racchiusa da tratti rettilinei inclinati di 45° sugli assi. Il poligono non intrecciato A avrà un certo numero ν di angoli concavi retti e un certo numero μ di angoli convessi, ciascuno eguale a 3 retti; fra i numeri ν, μ sussiste la relazione

$$\nu - \mu = 4 \text{ (}^2\text{)}.$$

Il numero $m = \nu + \mu$ dei lati del poligono A può essere eguale o inferiore ad $n+1$ ([3]).

Rappresentiamo ora in modo conforme il poligono A sul semipiano di w e per fissare le idee supponiamo che in uno dei ν angoli retti, p. e. nel ν^{mo} sia $w = \infty$, mentre negli altri i valori di w, presi nella serie $w_1 , w_2 , \ldots w_n$ siano

$$w_{r_1} \; w_{r_2} \ldots w_{r_\mu} \ldots \text{ nei } \mu \text{ angoli convessi}$$

e

$$w_{s_1} , \; w_{s_2} \ldots w_{s_{\nu-1}} , \; w_{s_\nu} = \infty \ldots \text{ nei } \nu \text{ angoli concavi.}$$

Applicando la formola di Schwarz-Christoffel avremo

$$\sigma = C \int \frac{\sqrt{(w - w_{r_1})(w - w_{r_2}) \ldots (w - w_{r_\mu})}}{\sqrt{(w - w_{s_1})(w - w_{s_2}) \ldots (w - w_{s_{\nu-1}})}} \, dw$$

e, come al numero precedente, l'argomento della costante C sarà $= \pm \frac{\pi}{4}$. La funzione $F(\omega)$ da sostituirsi nelle formole (A) n. 14 sarà quindi

$$(12) \qquad F(\omega) = \frac{i}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)^2 = a \frac{(w - w_{r_1})(w - w_{r_2}) \ldots (w - w_{r_\mu})}{(w - w_{s_1})(w - w_{s_2}) \ldots (w - w_{s_{\nu-1}})} \left(\frac{dw}{d\omega} \right)^2 ,$$

([1]) Poincaré, l. c. p. 38.

([2]) Applicando infatti il teorema sulla somma degli angoli di un poligono non intrecciato (V. p. e. Baltzer, *Planimetria* § 2, n.9) si ha

$$\nu \cdot \frac{\pi}{2} + \mu \cdot \frac{3\pi}{2} = (\mu + \nu - 2)\pi$$

cioè $\nu - \mu = 4$.

([3]) Sarà $m < n+1$ se qualche coppia successiva di lati del poligono Γ avrà per immagine sul piano σ due tratti rettilinei per diritto.

dove a è una costante reale. Questa funzione $F(\omega)$ in tutto il semipiano positivo ω (l'asse reale escluso) è finita, continua e monodroma. E infatti ogni fattore $w - w_s$ nel denominatore della (12) si annulla in un vertice

$$\omega = \alpha$$

del poligono P e in tutti i punti omologhi della rete Fuchsiana; questo infinitesimo di $w - w_s$ in tali punti è dell'ordine β, se in esso vertice l'angolo del poligono P è $= \frac{\pi}{\beta}$, per cui $F(\omega)$ vi si annulla dell'ordine

$$2(\beta - 1) - \beta = \beta - 2,$$

che in ogni caso, essendo β almeno eguale a 2, è un numero non negativo. La $F(\omega)$ potrebbe dunque tutto al più avere punti singolari dove $w = \infty$, cioè nel vertice

$$\omega = \alpha_{n+1}$$

del poligono P e nei punti omologhi; ma l'ordine con cui essa vi diventa infinita è dato da

$$2(\beta_{n+1} + 1) + \mu\beta_{n+1} - (\nu - 1)\beta_{n+1},$$

ovvero, a causa di $\nu - \mu = 4$, da

$$2 - \beta_{n+1}$$

che è certamente un numero nullo o negativo.

Dunque anche attorno al punto $\omega = \alpha_{n+1}$ e ai punti omologhi della rete la funzione $F(\omega)$ è regolare. Le formole

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= a\mathrm{R} \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \omega^2) \frac{(w - w_{r_1})(w - w_{r_2}) \dots (w - w_{r_\mu})}{(w - w_{s_1})(w - w_{s_2}) \dots (w - w_{s_{\nu-1}})} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ y &= a\mathrm{R} \int_{\omega_0}^{\omega} 2\omega \frac{(w - w_{r_1})(w - w_{r_2}) \dots (w - w_{r_\mu})}{(w - w_{s_1})(w - w_{s_2}) \dots (w - w_{s_{\nu-1}})} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega \\ z &= a\mathrm{R} \int_{\omega_0}^{\omega} (1 + \omega^2) \frac{(w - w_{r_1})(w - w_{r_2}) \dots (w - w_{r_\mu})}{(w - w_{s_1})(w - w_{s_2}) \dots (w - w_{s_{\nu-1}})} \left(\frac{dw}{d\omega}\right)^2 d\omega \end{aligned} \right.$$

definiscono per conseguenza una superficie Σ, che dappertutto si comporta come una superficie algebrica ed è priva di punti singolari.

Osservando che la funzione

$$\frac{(w - w_{r_1})(w - w_{r_2}) \dots (w - w_{r_\mu})}{(w - w_{s_1})(w - w_{s_2}) \dots (w - w_{s_{\nu-1}})}$$

su tutto il perimetro del poligono P è reale, col processo del n. 18 si dimostrerà che la porzione di superficie Σ corrispondente al semipoligono fondamentale P o ad ogni altro semipoligono della rete ha per contorno un poligono sghembo di $n+1$ lati. Le (13) definiscono quindi una superficie Fuchsiana. E poichè il numero ν resta arbitrario, purchè compreso fra i limiti

$$4 \leq \nu \leq \frac{n+5}{2},$$

e per ogni valore assegnato a v si ha un certo numero di possibili configurazioni del poligono A ne concludiamo:

Ad ogni gruppo Fuchsiano simmetrico della 1ª famiglia corrisponde sempre un certo numero di superficie Fuchsiane.

§ V.

Le superficie a curvatura costante dello spazio S.

22. Passiamo ora a trattare delle superficie a curvatura costante dello spazio S, il quadrato del cui elemento lineare è dato da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2, \tag{1}$$

Per valore della curvatura K di una superficie nello spazio S intendiamo quello che compete alla forma differenziale (1) quando x, y, z sono legate fra loro dalla equazione della superficie. Le formole (9) (9*) del § II dimostrano che si ha

$$K = \mp \frac{1}{r_1 r_2},$$

secondo che la superficie è di 1ª o di 2ª specie.

Cominciamo a considerare le superficie a curvatura costante positiva K e per semplicità poniamo $K = +1$. Se la superficie è di 1ª specie avremo

$$r_1 r_2 = -1$$

e indicando con ω una variabile ausiliaria potremo porre

$$r_2 = \cot\omega, \qquad r_1 = -\operatorname{tg}\omega.$$

Riferendo, come al § II, la superficie alle sue linee di curvatura le formole generali (17) n. 9 ci danno

$$\sqrt{E} = \cos\omega \qquad \sqrt{G} = \operatorname{sen}\omega,$$

dopo di che la (9) § II si muterà nella seguente equazione alle derivate parziali per ω

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} + \operatorname{sen}\omega\cos\omega = 0. \tag{2}$$

Inversamente, per quanto si disse alla fine del n. 8, ad ogni soluzione ω di questa equazione corrisponderà una superficie di 1ª specie a curvatura $K = +1$, il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, prenderà la forma:

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 \tag{3}$$

e i cui raggi principali di curvatura saranno dati da

$$r_2 = \cot\omega \qquad r_1 = -\operatorname{tg}\omega. \tag{4}$$

Se la superficie Σ a curvatura costante $K = +1$ è di 2ª specie, si avrà:

$$r_1 r_2 = +1$$

e indicando con θ una variabile ausiliaria potremo porre

$$r_2 = \coth\theta \qquad r_1 = \operatorname{tgh}\theta.$$

Con calcoli perfettamente simili ai precedenti troveremo per l'attuale superficie Σ le formole

$$ds^2 = \cosh^2\theta du^2 - \operatorname{senh}^2\theta dv^2 \tag{5}$$

$$r_2 = \coth\theta, \qquad r_1 = \operatorname{tgh}\theta \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0. \tag{7}$$

Ad ogni soluzione della equazione a derivate parziali (7) viene così a corrispondere una superficie di 2ª specie a curvatura $K = +1$.

23. Colle sostituzioni

$$x = \frac{v-u}{2\sqrt{2}} \qquad y = \frac{v+u}{2\sqrt{2}}$$

le equazioni (2) (7) si riducono alle (F′) (D′) del n. 4, cioè

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y} = \operatorname{sen} 2\omega \,, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \, \partial y} = \operatorname{senh} 2\theta \,.$$

Abbiamo visto al n. 4 come, nota una soluzione di queste equazioni, si possa trovarne delle nuove, integrando il sistema completo (F) o (D). Nelle attuali variabili u, v queste formole prendono l'aspetto seguente. Nota una soluzione ω della (2), se ne ottiene una nuova φ integrando il sistema completo:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} &= - \frac{\cos\varphi \operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \cos\omega}{\cos\sigma} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} &= \frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \operatorname{sen}\omega}{\cos\sigma} , \end{aligned} \right.$$

dove σ è una costante arbitraria.

Similmente da una soluzione nota θ della (7) se ne ottiene una nuova φ integrando il sistema completo

$$(8^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= - \frac{\cosh\varphi \operatorname{senh}\theta + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\varphi \cosh\theta}{\cos\sigma} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{\operatorname{senh}\varphi \cosh\theta + \operatorname{sen}\sigma \cosh\varphi \operatorname{senh}\theta}{\cos\sigma} . \end{aligned} \right.$$

A questa nuova soluzione φ della (2) o della (7), che contiene, oltre σ, una costante arbitraria C, corrisponderà una superficie Σ', di 1ª o 2ª specie, a curvatura $K = +1$. Vogliamo ora esaminare la dipendenza geometrica della nuova superficie Σ' dalla iniziale Σ e dimostrare che essa è precisamente la stessa come nel caso di due superficie pseudosferiche dello spazio euclideo, derivate l'una dall'altra per trasformazione di Bäcklund (M. A § 9). Dimostreremo cioè che le superficie Σ, Σ' sono le due superficie focali di un sistema di raggi e la distanza che intercede fra un punto F (fuoco) della Σ e il punto corrispondente F′ della Σ', misurata nella determinazione metrica dello spazio S, è costante.

24. Indichiamo con (x, y, z) le coordinate di F e con $(x'\, y'\, z')$ quelle di F′. Supponiamo dapprima che Σ e quindi anche Σ' sia di 1ª specie; sia ω la soluzione della (2) corrispondente a Σ e φ quella corrispondente a Σ', legata ad ω dalle (8). Mantenendo tutte le notazioni del § II verificheremo che x', y', z' sono date dalle formole

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= x - \cot\sigma \, (\cos\varphi \, X_1 + \operatorname{sen}\varphi \, X_2) \\ y' &= y - \cot\sigma \, (\cos\varphi \, Y_1 + \operatorname{sen}\varphi \, Y_2) \\ z' &= z - \cot\sigma \, (\cos\varphi \, Z_1 + \operatorname{sen}\varphi \, Z_2) \end{aligned} \right.$$

Queste esprimono appunto che il segmento $\overline{FF'}$, misurato nella determinazione metrica dello spazio S, ha la lunghezza costante $= \cot\sigma$ [1] e tocca in F la superficie Σ, formando colla linea di curvatura $v = \text{cost}^{te}$ l'angolo φ; d'altronde verificheremo ora che esso tocca in F' la superficie Σ'.

Le formole generali (10) n. 8, applicate alla superficie attuale Σ coi raggi principali di curvatura

$$r_2 = \cot\omega\,, \qquad r_1 = -\operatorname{tg}\omega\,,$$

diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen}\omega\, X_3\,, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial\omega}{\partial v} X_1 \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\operatorname{sen}\omega\, X_1 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial u} X_2\,, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial\omega}{\partial u} X_1 + \cos\omega\, X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \cos\omega\, X_2\,. \end{aligned}\right.$$

Se si derivano quindi le (9) tenendo conto delle (8), cui soddisfa φ, si trova

$$(a)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= \left(\cos\omega\cos^2\varphi - \frac{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right)X_1 + \left(\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{\operatorname{sen}\omega\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right)X_2 \\ &\quad + \cot\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\, X_3 \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= \left(\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{\cos\omega\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right)X_1 + \left(\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right)X_2 \\ &\quad - \cot\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\, X_3 \end{aligned}\right.$$

e analogamente per y', z'. Di qui segue subito

$$dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2\,,$$

formola che ci dà la verifica richiesta.

Se indichiamo poi con

$$X'_3\,, \quad Y'_3\,, \quad Z'_3$$

i coseni di direzione della normale alla superficie Σ' troveremo dalle (a)

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} X'_3 &= \cot\sigma\operatorname{sen}\varphi X_1 - \cot\sigma\cos\varphi X_2 - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma} X_3 \\ Y'_3 &= \cot\sigma\operatorname{sen}\varphi Y_1 - \cot\sigma\cos\varphi Y_2 - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma} Y_3 \\ Z'_3 &= \cot\sigma\operatorname{sen}\varphi Z_1 - \cot\sigma\cos\varphi Z_2 - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma} Z_3\,, \end{aligned}\right.$$

per cui risulterà

$$(x'-x)X'_3 + (y'-y)Y'_3 - (z'-z)Z'_3 = 0$$

$$X'_3 X_3 + Y'_3 Y_3 - Z'_3 Z_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\,.$$

La prima formola dimostra che il segmento $\overline{FF'}$ tocca in F' la superficie Σ' cioè Σ' è la seconda superficie focale del sistema di raggi FF'; la seconda ove si indichi

[1] Segue infatti dalle (9), osservando le formole (4) n. 7,

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 - (z'-z)^2 = \cot^2\sigma.$$

con ψ l'angolo che le due normali in F, F' alle Σ, Σ' rispettivamente formano fra di loro, si può scrivere (vedi Nota al n. 5)

$$\cosh \psi = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma}$$

e dimostra che l'angolo ψ delle due normali è costante.

Derivando le (b), avendo riguardo alle precedenti, si trova

$$\frac{\partial X'_3}{\partial u} = - \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial X'_3}{\partial v} = \cot \varphi \frac{\partial x'}{\partial v}$$

e analogamente per Y'_3, Z'_3. Se ne conclude che sulla superficie Σ' le linee u, v sono, come sulla Σ, le linee di curvatura e i raggi principali di curvatura sono dati da

$$\varrho_1 = - \operatorname{tg} \varphi \qquad \varrho_2 = \cot \varphi .$$

Sopra le superficie Σ, Σ' si corrispondono inoltre le linee assintotiche, le cui equazioni sono (n. 10)

$$u - v = \text{cost}^{\text{te}} \quad , \quad u + v = \text{cost}^{\text{te}}$$

e gli archi corrispondenti di assintotiche sono eguali (Cf. M. A § 9).

Analogamente se si tratta di passare da una superficie Σ di 2ª specie, corrispondente ad una soluzione θ della (7) all'altra superficie Σ' corrispondente ad una nuova soluzione φ della (7), legata a θ dalle (8*), potremo verificare che le coordinate x', y', z' di ogni punto F' della Σ' corrispondente ad un punto $F \equiv (x, y, z)$ della Σ, sono date dalle formole

$$\begin{cases} x' = x - \cot \sigma (\cosh \varphi X_1 + \operatorname{senh} \varphi X_2) \\ y' = y - \cot \sigma (\cosh \varphi Y_1 + \operatorname{senh} \varphi Y_2) \\ z' = z - \cot \sigma (\cosh \varphi Z_1 + \operatorname{senh} \varphi Z_2) . \end{cases}$$

E infatti derivando queste ultime col tener conto delle (10*) n. 8, si trova

$$dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cosh^2 \varphi \, du^2 - \operatorname{senh}^2 \varphi \, dv^2 .$$

Come nel caso delle superficie di 1ª specie si verificherà anche qui che Σ, Σ' sono le superficie focali del sistema di raggi $\overline{FF'}$ e che sopra Σ, Σ' le linee di curvatura si corrispondono. Quanto alle linee assintotiche, esse sono nel caso attuale immaginarie.

Vediamo adunque che la trasformazione, analiticamente rappresentata dalle formole (8) o (8*), per le superficie a curvatura costante $K = +1$ dello spazio S è l'analoga della trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche dello spazio euclideo, con questa differenza però, che nel caso presente tale trasformazione non si riduce mai ad una trasformazione complementare cioè il sistema di raggi $\overline{FF'}$ non ammette, per alcun valore speciale di σ, superficie ortogonali [1].

25. Consideriamo ora nello spazio S le superficie a curvatura costante negativa K e poniamo per semplicità $K = -1$. A queste superficie conserveremo il nome di superficie pseudosferiche. Procedendo come al n. 22 e riferendo la superficie pseudosferica Σ alle sue linee di curvatura u, v dalle formole generali del § II si otterranno per la superficie Σ i risultati seguenti.

[1] Se ciò potesse accadere si dovrebbe avere infatti

$$X'_3 X_3 + Y'_3 Y_3 - Z'_3 Z_3 = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} = 0.$$

Se la superficie è di 1ª specie, il suo elemento lineare prenderà la forma

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2\,, \tag{10}$$

dove θ è una soluzione della equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial\theta^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \tag{11}$$

e i raggi di curvatura saranno dati da:

$$r_1 = \operatorname{tgh}\theta \qquad r_2 = \coth\theta\,. \tag{12}$$

Inversamente ad ogni soluzione θ della (11) corrisponderà una superficie pseudosferica Σ di 1ª specie, per la quale sussisteranno le (10), (12).

Se la superficie è di 2ª specie, il suo elemento lineare prenderà la forma

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 - \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2\,, \tag{10*}$$

dove ω soddisfa l'equazione:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega \cos\omega \tag{11*}$$

e $r_1\, r_2$ sono dati da

$$r_1 = -\operatorname{tg}\omega\,, \qquad r_2 = \cot\omega\,. \tag{12*}$$

Inversamente ogni soluzione ω della (11*) darà una tale superficie.

Al n. 2 § I abbiamo dimostrato come fra le soluzioni delle (11), (11*) si possa stabilire una dipendenza espressa dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \cos\alpha \operatorname{senh}\theta \cos\omega - \operatorname{sen}\alpha \cosh\theta \operatorname{sen}\omega \\ \frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \operatorname{sen}\alpha \operatorname{senh}\theta \cos\omega + \cos\alpha \cosh\theta \operatorname{sen}\omega\,, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

dove α è una costante arbitraria, in guisa che se θ è una soluzione della (11), le equazioni simultanee (13) rispetto ad ω sono compatibili e integrate danno per α una soluzione della (11*) contenente, oltre α, una costante arbitraria. Inversamente se nelle (13) si sostituisce per ω un integrale della (11*), l' integrale θ delle (13) soddisfa la (11).

Cerchiamo ora l' interpretazione geometrica delle formole (13) per quanto si riferisce alle superficie pseudosferiche di 1ª o 2ª specie dello spazio S.

26. Sia Σ una superficie pseudosferica di 1ª specie corrispondente ad una soluzione θ della (11) e Σ' la superficie pseudosferica di 2ª specie corrispondente a quella soluzione ω della (11*) che si ottiene integrando le (13). Dimostreremo che se per ogni punto F della Σ si tira nel piano tangente in F una retta inclinata dell'angolo ω sulla linea di curvatura $v = \text{cost}^{\text{te}}$ e sopra di essa si stacca un segmento $\overline{FF'} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, il luogo degli estremi F' sarà la superficie Σ'.

Indicando con x, y, z le coordinate di F, con x', y', z' quelle di F', la costruzione geometrica sopra riferita si traduce analiticamente nelle formole

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos\omega\, X_1 + \operatorname{sen}\omega\, X_2\right\} \\ y' &= y - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos\omega\, Y_1 + \operatorname{sen}\omega\, Y_2\right\} \\ z' &= z - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos\omega\, Z_1 + \operatorname{sen}\omega\, Z_2\right\}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

sulle quali dovremo fare le opportune verifiche.

Applicando le formole generali (10) n. 8 alla nostra superficie pseudosferica Σ, troviamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \operatorname{senh}\theta X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1 \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\operatorname{senh}\theta X_1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \cosh\theta X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\cosh\theta X_2 \end{aligned}\right.$$

Derivando le (14), tenendo conto di queste ultime, risulta:

$$(15) \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= (\cosh\theta \cos^2\omega + \cot\alpha \operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\omega \cos\omega) X_1 + \\ &+ (\cosh\theta \operatorname{sen}\omega \cos\omega - \cot\alpha \operatorname{senh}\theta \cos^2\omega) X_2 + \frac{\operatorname{senh}\theta \cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha} X_3 \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= (\operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\omega \cos\omega + \cot\alpha \cosh\theta \operatorname{sen}^2\omega) X_1 + \\ &+ (\operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}^2\omega - \cot\alpha \cosh\theta \operatorname{sen}\omega \cos\omega) X_2 + \frac{\cosh\theta \operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha} Y_3 \end{aligned}\right.$$

e quindi

$$dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2\omega\, du^2 - \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2,$$

formola che ci dà la verifica richiesta.

Se indichiamo con X'_3, Y'_3, Z'_3 i coseni di direzione della normale alla superficie Σ', avremo per le (15)

$$\left\{\begin{aligned} X'_3 &= -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha} X_1 + \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha} X_2 - \cot\alpha X_3 \\ Y'_3 &= -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha} Y_1 + \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha} Y_2 - \cot\alpha Y_3 \\ Z'_3 &= -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha} Z_1 + \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha} Z_2 - \cot\alpha Z_3 \end{aligned}\right.$$

e conseguentemente

$$(x'-x) X'_3 + (y'-y) Y'_3 - (z'-z) Z'_3 = 0$$
$$X'_3 X + Y'_3 Y_3 - Z'_3 Z_3 = \cot\alpha .$$

Le superficie pseudosferiche Σ, Σ' sono dunque le due superficie focali del sistema di raggi $\overline{FF'}$ e le normali nei punti corrispondenti formano fra loro un angolo costante. In particolare se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ le due normali sono fra loro ortogonali. In tal caso Σ, Σ' sono le due falde della evoluta di una superficie, la differenza dei cui raggi principali di curvatura è costante (vedi n. 9[bis]).

Inversamente se partendo da una superficie pseudosferica Σ di 2ª specie corrispondente ad una determinata soluzione ω della (11*) vogliamo passare ad una superficie pseudosferica Σ' di 1ª specie, che corrisponda alla soluzione θ della (11) integrale delle (13), verificheremo agevolmente che le formole di passaggio sono le seguenti

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} (\cosh\theta X_1 - \operatorname{senh}\theta X_2) \\ y' &= y + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} (\cosh\theta Y_1 - \operatorname{senh}\theta Y_2) \\ z' &= z + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} (\cosh\theta Z_1 - \operatorname{senh}\theta Z_2) . \end{aligned}\right.$$

Per quanto sopra si è visto la trasformazione, analiticamente espressa dalle (13), rappresenta per le superficie pseudosferiche dello spazio S la *trasformazione di Bäcklund*, mentre per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ essa diventa la *trasformazione complementare*.

In quest' ultimo caso avendosi

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = \operatorname{senh} \theta \cos \omega \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} - \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = \cosh \theta \cos \omega \end{cases}$$

si vede che l'espressione

$$\cosh \theta \cos \omega \, du + \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \omega \, dv$$

è un differenziale esatto. Se poniamo

$$\psi = \int (\cosh \theta \cos \omega \, du + \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \omega \, dv)$$

sono altresì differenziali esatti le espressioni

$$e^{-\psi} \{ \cosh \theta \operatorname{sen} \omega \, du - \operatorname{senh} \theta \cos \omega \, dv \}$$

$$e^{\psi} \{ \operatorname{senh} \theta \cos \omega \, du + \cosh \theta \operatorname{sen} \omega \, dv \}$$

e chiamando β, γ le funzioni di u, v loro integrali risulterà:

$$\cosh^2 \theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, dv^2 = d\psi^2 + e^{2\psi} d\beta^2$$

$$\cos^2 \omega \, du^2 - \operatorname{sen}^2 \omega \, dv^2 = d\psi^2 - e^{-2\psi} d\gamma^2 ,$$

le quali formole pongono in evidenza la riduzione dell'elemento lineare delle superficie pseudosferiche complementari Σ, Σ' alla forma geodetica [1].

27. Consideriamo ora tutte le superficie pseudosferiche complementari di una data superficie pseudosferica Σ e dimostriamo che esse fanno parte di un sistema triplo di superficie ortogonali (*sistema ciclico di Ribaucour*).

Sia p. e. Σ una superficie pseudosferica di 1ª specie corrispondente ad una soluzione θ della (11); l'integrale ω delle (16) contiene una costante arbitraria che indicheremo con w e per ogni valore speciale di w le formole

$$\begin{cases} x' = x - \cos \omega X_1 - \operatorname{sen} \omega X_2 \\ y' = y - \cos \omega Y_1 - \operatorname{sen} \omega Y_2 \\ z' = z - \cos \omega Z_1 - \operatorname{sen} \omega Z_2 \end{cases}$$

danno una superficie pseudosferica complementare (di 2ª specie). Le formole (15), per $\alpha = \frac{\pi}{2}$, diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \cosh \theta \cos^2 \omega \, X_1 + \cosh \theta \operatorname{sen} \omega \cos \omega \, X_2 + \operatorname{senh} \theta \cos \omega \, X_3 \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \omega \cos \omega \, X_1 + \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen}^2 \omega \, X_2 + \cosh \theta \operatorname{sen} \omega \, X_3 \end{cases}$$

e d'altra parte derivando le precedenti rapporto a w otteniamo

$$\frac{\partial x'}{\partial w} = (\operatorname{sen} \omega \, X_1 - \cos \omega \, X_2) \frac{\partial \omega}{\partial w} \cdot$$

[1] Darboux, Comptes rendus de l'Académie, T. XCVII, ottobre 1883.

Se per determinare la posizione di un punto (x', y', z') nello spazio S prendiamo per variabili indipendenti u, v, w risulterà dunque pel quadrato dell'elemento lineare la formola

$$(17)\qquad ds^2 = dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2\omega\, du^2 - \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2 .$$

Questa pone appunto in evidenza che le superficie pseudosferiche

$$w = \text{cost}^{\text{te}}$$

complementari della Σ formano insieme colle $u = \text{cost}^{\text{te}}$ $v = \text{cost}^{\text{te}}$ un sistema triplo ortogonale. Le traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche $w = \text{cost}^{\text{te}}$ sono evidentemente circoli di raggio $= 1$, tracciati nei piani tangenti della superficie Σ, col centro nel punto di contatto.

Del tutto simile è il risultato se la superficie pseudosferica iniziale Σ è di 2ª specie. In tal caso se essa corrisponde ad una soluzione ω della (11*) e θ è l'integrale delle (16), contenente la costante arbitraria w, per l'elemento lineare dello spazio S, riferito al corrispondente sistema ciclico di Ribaucour, si trova

$$(17^*)\qquad ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2 .$$

§ VI.

Sistemi di Weingarten a curvatura positiva nello spazio S.

28. Dopo esserci accertati nel n. precedente della esistenza dei sistemi ciclici di Ribaucour nello spazio S, andiamo ora a trattare in modo generale il problema enunciato nella prefazione, cioè a ricercare tutti i possibili sistemi tripli di superficie ortogonali nello spazio S, di cui fa parte una serie di superficie Σ a curvatura costante. In questo e nel seguente paragrafo considereremo il caso in cui la curvatura K delle superficie Σ è la stessa per tutte, estendendo poi nel § VIII la ricerca al caso in cui K varia con continuità dall'una all'altra superficie Σ.

Supponiamo dapprima di avere un sistema di Weingarten, che, preso per sistema coordinato, dia all'elemento lineare dello spazio S la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 - H_3^2\, dw^2$$

e le superficie $w = \text{cost}^{\text{te}}$ (*di 1ª specie*) abbiano la stessa curvatura costante positiva K; prendiamo per semplicità

$$K = 1 .$$

Le funzioni H_1, H_2, H_3 di u, v, w dovranno soddisfare le equazioni fondamentali (I) (II) n. 7, e poichè inoltre si ha per ipotesi:

$$K = -\frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)\right\} = 1,$$

la 1ª delle (II) diventa

$$\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} \cdot \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = -1 .$$

Indicando con ω una funzione ausiliaria di u, v, w, potremo quindi porre

$$\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} = -\operatorname{tg}\omega , \qquad \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = \cot\omega$$

e sostituendo nelle due prime (I) avremo:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}=-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial v}, \qquad \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}=\cot\omega\frac{\partial\omega}{\partial u},$$

da cui risulta

$$H_1=\cos\omega\,.\,\varphi(u,w), \qquad H_2=\operatorname{sen}\omega\,.\,\psi(v,w).$$

Ora se si esclude il caso particolare che le superficie Σ siano di rotazione, si concluderà, come al n. 3 § 2 M. A, che φ, ψ sono indipendenti da w e conseguentemente, cangiando i parametri u, v si può porre

$$\varphi=\psi=1,$$

dopo di che si avrà

$$H_1=\cos\omega \quad H_2=\operatorname{sen}\omega \quad H_3=\frac{\partial\omega}{\partial w}.$$

Le equazioni fondamentali (I) (II) n. 7 si traducono per la nostra funzione incognita ω nel seguente sistema di equazioni a derivate parziali:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\operatorname{sen}\omega\cos\omega=0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)+\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial w}-\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\omega}{\partial v}=0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)+\operatorname{sen}\omega\frac{\partial\omega}{\partial w}+\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\omega}{\partial u}=0\\
&\frac{\partial^3\omega}{\partial u\,\partial v\,\partial w}+\operatorname{tg}\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\omega}{\partial v}-\cot\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\omega}{\partial u}=0,
\end{aligned}\right.$$

delle quali la 3ª p. e. potrebbe omettersi come conseguenza delle altre. Queste sono le equazioni stesse che abbiamo trovato nella M. L (v. formole (C) n. 15), per definire i sistemi di Weingarten a curvatura positiva nello spazio di Riemann.

Faremo qui pel sistema (1) un' osservazione, che si potrà poi ripetere per gli altri sistemi analoghi che incontreremo in seguito. Se si considera l'espressione

$$\varDelta=\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2,$$

si vede facilmente che in forza delle (1) si ha identicamente

$$\frac{\partial\varDelta}{\partial u}=0 \qquad \frac{\partial\varDelta}{\partial v}=0$$

e quindi

$$\varDelta=F(w)$$

dove F è funzione della sola w.

Inversamente se la funzione $\omega\ (u, v, w)$ soddisfa le equazioni:

$$(1^*)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\operatorname{sen}\omega\cos\omega=0\\
&\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2=F(w),
\end{aligned}\right.$$

essa soddisfa altresì le (1) [1].

[1] Se le (1*) sono soddisfatte, pongasi infatti

$$M=\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}, \quad N=\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}$$

Veniamo al caso in cui le superficie Σ a curvatura $K = +1$ sono *di 2ª specie*. L'elemento lineare dello spazio prenderà la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du^2 - H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2 ,$$

dove H_1, H_2, H_3 dovranno soddisfare le equazioni fondamentali (I), (II*) n. 7. Poichè inoltre si ha, per ipotesi

$$K = -\frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)\right\} = \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\cdot\frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = 1 ,$$

si potrà porre, indicando con θ una funzione ausiliaria di u, v, w,

$$\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} = \operatorname{tgh}\theta \qquad \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = \coth\theta .$$

Se concluderà, facendo uso delle equazioni (I) (II*) n. 7 che l'elemento lineare dello spazio S prende la forma

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 - \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2 ,$$

e derivando la 1ª delle (1*) rapporto a w e la 2ª una volta rapporto ad u, un'altra volta rapporto a v si avranno tre equazioni lineari rispetto alle derivate

$$(a)\qquad \frac{\partial M}{\partial u},\ \frac{\partial M}{\partial v},\ \frac{\partial N}{\partial u},\ \frac{\partial N}{\partial v};$$

queste congiunte colla quarta

$$\frac{\partial (M\cos\omega)}{\partial v} - \frac{\partial N \operatorname{sen}\omega}{\partial u} = 0$$

possono risolversi rispetto alle quattro incognite (a) e danno luogo appunto alle (1). La risoluzione è sempre possibile poichè il determinante Δ di quelle quattro equazioni lineari è dato da

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\omega & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\omega \\ 0 & \cos\omega & -\operatorname{sen}\omega & 0 \\ M & 0 & N & 0 \\ 0 & M & 0 & N \end{vmatrix} = N^2\cos^2\omega - M^2\operatorname{sen}^2\omega$$

non può essere zero. E invero se si avesse

$$M^2\operatorname{sen}^2\omega = N^2\cos^2\omega$$

seguirebbe dalla 2ª delle (1*)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} = \varepsilon\cos^2\omega\sqrt{F - \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2}, & \varepsilon = \pm 1 \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} = \varepsilon'\operatorname{sen}^2\omega\sqrt{F - \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2}, & \varepsilon' = \pm 1 \end{cases}$$

Derivando la 1ª di queste rapporto a v, la 2ª rapporto ad u e sottraendo risulterebbe $\dfrac{\partial\omega}{\partial u} = \pm\dfrac{\partial\omega}{\partial v}$ quindi $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2} = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial v^2}$ il che contraddice alla 1ª delle (1*).

dove la funzione $\theta(u, v, w)$ deve soddisfare alle equazioni simultanee:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) + \cosh\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w} - \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) - \operatorname{senh}\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w} - \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} - \operatorname{tgh}\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \coth\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

o, ciò che torna lo stesso (v. Nota precedente), al sistema equivalente

$$(2^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 \\ \dfrac{1}{\cosh^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = F(w). \end{cases}$$

Inversamente ad ogni soluzione ω delle (1) o (1*), come ad ogni soluzione θ delle (2) o (2*) corrisponderà un sistema di Weingarten nello spazio S.

29. È facile persuadersi della esistenza di soluzioni particolari del sistema (1*) e del sistema (2*). Basta p. e. cercare una soluzione che sia funzione di una combinazione lineare

$$\tau = au + bv + w$$

delle variabili; in tal caso, ove si prenda $F = \text{cost}^{\text{te}}$, le due equazioni (1*) o (2*) si riducono ad una sola equazione differenziale ordinaria che s' integra per funzioni ellittiche.

Ora, seguendo il processo del n. 27 § 9 M. A, dimostreremo che da ogni sistema noto di Weingarten dello spazio S, corrispondente ad una soluzione ω delle (1) o ad una soluzione θ delle (2), si può dedurre con trasformazione di Bäcklund una doppia infinità di tali sistemi e per tal modo ci accerteremo dell'esistenza di infiniti sistemi di Weingarten.

Supponiamo adunque che sia noto un sistema di Weingarten dello spazio S, composto p. e. di superficie Σ a curvatura $K = +1$ di 1ª specie. Sia

$$ds^2 = \cos^2\omega\,du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\,dv^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

la forma corrispondente dell'elemento lineare, dove ω è una soluzione delle (1). Trasformiamo ciascuna superficie Σ del sistema dato per mezzo di una trasformazione di Bäcklund (Cfr. nn. 23-24) in una nuova superficie Σ' a curvatura $K = 1$ e cerchiamo se è possibile eseguire ogni singola trasformazione in guisa che le superficie derivate Σ' facciano esse stesse parte di un nuovo sistema di Weingarten.

Se $\varphi(u, v, w)$ indica sopra ciascuna superficie Σ l'angolo corrispondente alla trasformazione eseguita e soddisfa quindi le (8) n. 23

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = -\dfrac{\cos\varphi\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\omega}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\cos\omega + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\omega}{\cos\sigma}, \end{cases}$$

le coordinate x', y', z' di un punto di Σ' si otterranno da quelle x, y, z del punto corrispondente sopra Σ colle formole (v. n. 24)

$$(\mathrm{C})\qquad\begin{cases} x' = x - \cot\sigma\,(\cos\varphi X_1 + \operatorname{sen}\varphi X_2) \\ y' = y - \cot\sigma\,(\cos\varphi Y_1 + \operatorname{sen}\varphi Y_2) \\ z' = z - \cot\sigma\,(\cos\varphi Z_1 + \operatorname{sen}\varphi Z_2)\,. \end{cases}$$

Applicando le formole generali (6) n. 7 al nostro sistema (A), troviamo:

$$(\mathrm{D})\begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\omega}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen}\omega X_3\,, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial v} X_1 & , \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\operatorname{sen}\omega X_1 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u} X_2 & , \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial u} X_1 + \cos\omega X_3\,, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \cos\omega X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial w_1} = \dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} X_3 & , \dfrac{\partial X_2}{\partial w} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} X_3 & , \dfrac{\partial X_3}{\partial w} = \dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} X_1 \\ & & + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} X_2\,. \end{cases}$$

Derivando le (C), coll'osservare le (B), (D), risulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \left(\cos\omega\cos^2\varphi - \dfrac{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right) X_1 + \left(\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right) X_2 \\ \qquad + \cot\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi X_3 \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \left(\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \dfrac{\cos\omega\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right) X_1 + \left(\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}^2\varphi - \dfrac{\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}\right) X_2 \\ \qquad - \cot\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi X_3 \\ \dfrac{\partial x'}{dw} = \cot\sigma\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial w} X_1 - \cot\sigma\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial w} X_2 + \left\{\dfrac{\partial\omega}{\partial w} - \cot\sigma\dfrac{\cos\varphi}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} - \right. \\ \qquad \left. - \cot\sigma\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right\} X_3\,. \end{cases}$$

Ponendo per brevità

$$M = \frac{\partial\omega}{\partial w} - \cot\sigma\frac{\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} - \cot\sigma\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}$$

si trova quindi:

$$(3)\qquad dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2 - \left\{M^2 - \cot^2\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right\} dw^2 -$$
$$- 2\cot\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\left(M + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)du\,dw + 2\cot\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\left(M + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)dv\,dw.$$

Ora se si vuole che le superficie Σ' costituiscano un nuovo sistema di Weingarten, bisognerà che la funzione φ, oltre al soddisfare le (B) renda anche

$$M + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w} = 0\,,$$

dopo di che la (3) diviene

$$(4)\qquad dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2\,.$$

Il sistema simultaneo di equazioni a derivate parziali che ne risulta per la funzione incognita φ:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial \omega}{\partial v}=-\dfrac{\cos\varphi \operatorname{sen}\omega+\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \cos\omega}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial \omega}{\partial u}=\dfrac{\operatorname{sen}\varphi\cos\omega+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\omega}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial w}=\cos\sigma\dfrac{\cos\varphi}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}+\cos\sigma\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial\omega}{\partial w} \end{cases}$$

è un sistema *illimitatamente* integrabile, come facilmente si verifica osservando le equazioni (1), cui per ipotesi soddisfa ω; l' integrale φ delle (5) contiene quindi, oltre σ, una costante arbitraria [1]. Dal sistema noto di Weingarten si deducono, colla trasformazione (5), ∞^2 nuovi sistemi della stessa specie.

L' integrale φ delle (5), corrispondendo ad un nuovo sistema di Weingarten, deve essere naturalmente una nuova soluzione delle (1) o (1*). Ciò è del resto facile a verificarsi direttamente con un semplice calcolo. Dalle (5), osservando le (1) si trae:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}=-\cos\sigma\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial w}+\dfrac{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}-\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}- \\ \qquad -\cos\varphi\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\cos\omega\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}=-\cos\sigma\operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial w}-\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos\varphi}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}+ \\ \qquad +\dfrac{\cos\omega\cos\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} \end{cases}$$

e quindi

$$(6)\quad \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2.$$

Inoltre dalle due prime (5) risulta subito

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=0\,;$$

dunque φ soddisfa le (1*) c. d. d.

Si abbia ora un sistema di Weingarten composto di superficie Σ di 2ª specie a curvatura $K=+1$ e sia

$$ds^2=\cosh^2\theta\,du^2-\operatorname{senh}^2\theta\,dv^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2dw^2$$

la forma corrispondente dell'elemento lineare, dove θ è una soluzione delle (2) o (2*). Come nel caso precedente, applicando a ciascuna superficie Σ una trasformazione di

[1] Come al n. 15 M. A, si osserverà per le equazioni (5) che, ponendo $A=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, esse possono considerarsi come un'equazione a differenziali totali della forma di Riccati per la funzione incognita A e basterà conoscere un integrale particolare per avere con quadrature l' integrale generale.

Bäcklund, potremo dedurne ∞^2 nuovi sistemi di Weingarten della stessa specie. Determiniamo infatti φ dal sistema illimitatamente integrabile

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}&=-\frac{\operatorname{senh}\theta\cosh\varphi+\operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cos\sigma}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}&=\frac{\cosh\theta\operatorname{senh}\varphi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\varphi}{\cos\sigma}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial w}&=\cos\sigma\frac{\cosh\varphi}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\cos\sigma\frac{\operatorname{senh}\varphi}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}\end{aligned}\right.$$

e le formole

$$\left\{\begin{aligned} x'&=x-\cot\sigma\,\{\cosh\varphi\,X_1+\operatorname{senh}\varphi\,X_2\}\\ y'&=y-\cot\sigma\,\{\cosh\varphi\,Y_1+\operatorname{senh}\varphi\,Y_2\}\\ z'&=z-\cot\sigma\,\{\cosh\varphi\,Z_1+\operatorname{senh}\varphi\,Z_2\}\end{aligned}\right.$$

daranno un nuovo sistema di Weingarten della stessa specie, corrispondente alla formola

$$ds^2=\cosh^2\varphi\,du^2-\operatorname{senh}^2\varphi\,dv^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2dw^2\ \text{(1)}.$$

Ogni integrale φ delle (7) è nuovamente una soluzione delle (2) o (2*).

§ VII.

Sistemi pseudosferici di Weingarten.

30. Veniamo a trattare dei sistemi di Weingarten dello spazio S, contenenti una serie di superficie Σ a curvatura $K=-1$, sistemi che diremo, per abbreviare, *pseudosferici*.

Supponiamo dapprima che le superficie Σ siano di 1ª specie e sia quindi

$$ds^2=H_1^2\,du^2+H_2^2\,dv^2-H_3^2\,dw^2$$

la forma corrispondente dell'elemento lineare dello spazio. Si ha per ipotesi

$$K=-\frac{1}{H_1H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)\right\}=-\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\cdot\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}=-1$$

e quindi, indicando con θ una funzione ausiliaria, si può porre

$$\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}=\operatorname{tgh}\theta\qquad \frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}=\coth\theta\,.$$

Le equazioni fondamentali (I) (II) n. 7 danno

$$H_1=\cosh\theta\,,\quad H_2=\operatorname{senh}\theta\,,\quad H_3=\frac{\partial\theta}{\partial w}$$

e $\theta(u,v,w)$ deve soddisfare le equazioni (B) n. 25 M. L. Colle osservazioni della nota al n. (28) si dimostra che questo sistema di equazioni è equivalente all'altro:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\\ &\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=F(w)\,.\end{aligned}\right.$$

(1) Sopprimiamo qui i calcoli affatto simili ai precedenti.

Inversamente ad ogni soluzione θ di queste equazioni corrisponde, nello spazio S, un sistema pseudosferico di 1ª specie.

Quando si consideri invece un sistema pseudosferico di 2ª specie, si vedrà che l'elemento lineare dello spazio prende la forma

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 - \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

dove ω soddisfa le (B') n. 18 M. L. Queste equazioni, che nella citata Memoria avevano soltanto un significato analitico, vengono così a ricevere nello spazio S un' interpretazione geometrica, come quelle che definiscono un sistema pseudosferico di 2ª specie. Esse possono anche essere sostituite dal sistema equivalente:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ &-\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 = \mathrm{F}(w).\end{aligned}\right.$$

Ai nn. 16, 17, 18 della citata Memoria (M. L), abbiamo veduto come partendo da una soluzione nota del sistema (1) o (2) possano dedursi sempre nuovi integrali dei sistemi stessi. Queste trasformazioni analitiche troveranno ora, nel nostro spazio S, la loro interpretazione geometrica come trasformazioni complementare e di Bäcklund pei sistemi pseudosferici di Weingarten (Cf. nn. 26, 27).

31. Si abbia un sistema pseudosferico di Weingarten di 1ª specie corrispondente alla formola

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

dove θ è una soluzione delle (1). Applichiamo a ciascuna superficie Σ del sistema una trasformazione complementare, definita dalle formole (16) n. 26

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta\cos\omega \\ &\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\partial\omega}{\partial u} = \cosh\theta\operatorname{sen}\omega\,;\end{aligned}\right.$$

otterremo così una serie ∞^1 di superficie pseudosferiche di 2ª specie Σ', le coordinate x', y', z' dei cui punti saranno date da:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x - \cos\omega\, X_1 - \operatorname{sen}\omega\, X_2 \\ y' &= y - \cos\omega\, Y_1 - \operatorname{sen}\omega\, Y_2 \\ z' &= z - \cos\omega\, Z_1 - \operatorname{sen}\omega\, Z_2\,.\end{aligned}\right.$$

Ora domandiamo se si può determinare ω in guisa che le superficie Σ' facciano parte di un nuovo sistema pseudosferico.

Applicando le formole (6) n. 8 troviamo

$$dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2\omega\, du^2 - \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 + \left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 - \mathrm{M}^2\right\} dw^2 +$$
$$+ 2\operatorname{senh}\theta\cos\omega\,\mathrm{M}\, du\, dw + 2\cosh\theta\operatorname{sen}\omega\,\mathrm{M}\, dv\, dw\,,$$

dove si è posto

$$\mathrm{M} = \frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{\cos\omega}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\,.$$

Dunque le superficie Σ' complementari delle Σ costituiranno un sistema di Weingarten corrispondente alla formola

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 - \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2\,,$$

quando ω, oltre che alle (3), soddisfi alla equazione in termini finiti (Cf. M. L, n. 21)

$$\frac{\cos\omega}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \frac{\partial\theta}{\partial w} = 0\,. \tag{5}$$

Resta dunque da verificarsi soltanto che la funzione ω definita dalla (5) soddisfa le (3), ciò che facilmente si vede, avendo riguardo alle equazioni (B) n. 15 M. L, cui soddisfa θ.

La equazione (5) dà in generale due valori per ω essenzialmente distinti ma essi sono reali soltanto quando la funzione $F(w)$ nelle (1) è *positiva* e coincidono se $F=0$. Ciò dà luogo, come nel caso dei sistemi pseudosferici di Weingarten dello spazio euclideo (M. A § 8), ad un' importante distinzione. Se indichiamo con $\frac{1}{\varrho}$ la flessione delle traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche Σ, si troverà

$$\left(\frac{1}{\varrho^2}-1\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = F(w)\,.$$

La trasformazione (5) condurrà quindi a *due* sistemi di Weingarten contigui al sistema dato se la flessione $\frac{1}{\varrho}$ sarà >1.

A ciascuno dei sistemi pseudosferici di 2ª specie così ottenuti potremo nuovamente applicare la trasformazione complementare. Osserviamo infatti dapprima che se ω soddisfa la (5) si ha

$$-\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 = \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2$$

come è facile riscontrare, e quindi la $F(w)$ nelle corrispondenti equazioni (1) (2) ha il medesimo valore. Ora se si determina Θ dalla equazione

$$\frac{\cosh\Theta}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} - \frac{\operatorname{senh}\Theta}{\operatorname{senh}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial\omega}{\partial w} = 0 \tag{5*}$$

che dà per Θ due valori reali distinti, essendo $F(w)>0$, colle formole

$$\begin{cases} x'' = x' + \cosh\Theta X'_1 - \operatorname{senh}\Theta X'_2 \\ y'' = y' + \cosh\Theta Y'_1 - \operatorname{senh}\Theta Y'_2 \\ z'' = z' + \cosh\Theta Z'_1 - \operatorname{senh}\Theta Z'_2 \end{cases} \tag{6}$$

si passerà ad un sistema pseudosferico di 1ª specie. Ma una delle soluzioni della (5*) è l'antico valore θ e quindi il corrispondente sistema pseudosferico (6) coincide coll'antico; la 2ª soluzione dà luogo invece ad un nuovo sistema. A questo applicando nuovamente la trasformazione complementare e così di seguito, è chiaro che costruiremo una serie di tali sistemi estendentesi all' infinito nei due sensi

$$\Sigma_{-2}\,,\ \Sigma_{-1}\,,\ \Sigma,\ \Sigma_1\,,\ \Sigma_2\,\ldots.$$

alternativamente composta di sistemi di 1ª e di 2ª specie (Cf. M. A n. 22).

Ma se $\frac{1}{\varrho}=1$ le due soluzioni della (5) o della (5*) coincidono e la serie precedente si riduce a due soli termini. Questi speciali sistemi di Weingarten si diranno a *flessione costante*; essi corrispondono al caso in cui la $F(w)$ nelle equazioni (1) o (2) è nulla. Fanno parte di questa classe i sistemi ciclici di cui al n. 27 abbiamo dimostrata l'esistenza.

32. Anche colla trasformazione più generale di Bäcklund (n. 26) si possono far derivare da un sistema pseudosferico di 1ª o 2ª specie nuovi sistemi pseudosferici di Weingarten. Partiamo p. e. da un sistema di 1ª specie corrispondente ad una soluzione θ delle (1) e applichiamo a ciascuna superficie pseudosferica Σ una trasformazione di Bäcklund definita dalle formole

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u}-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}=\cos\alpha\,\mathrm{senh}\,\theta\cos\omega-\mathrm{sen}\,\alpha\cosh\theta\,\mathrm{sen}\,\omega \\[2ex] \dfrac{\partial\omega}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{senh}\,\theta\cos\omega+\cos\alpha\cosh\theta\,\mathrm{sen}\,\omega\,. \end{cases}$$

Le superficie derivate Σ' saranno date dalle formole

$$\begin{cases} x'=x-\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}(\cos\omega\,X_1+\mathrm{sen}\,\omega\,X_2) \\[2ex] y'=y-\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}(\cos\omega\,Y_1+\mathrm{sen}\,\omega\,Y_2) \\[2ex] z'=z-\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}(\cos\omega\,Z_1+\mathrm{sen}\,\omega\,Z_2)\,; \end{cases}$$

cerchiamo ora di determinare ω in guisa che le superficie pseudosferiche Σ' facciano parte di un sistema di Weingarten di 2ª specie. Dirigendo i calcoli come al n. 29, troveremo che ω deve soddisfare l'ulteriore equazione

$$(\beta)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial w}=\frac{1}{\cos\alpha}\left\{\frac{\cos\omega}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{senh}\,\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\mathrm{sen}\,\alpha\frac{\partial\theta}{\partial w}\right\}.$$

Le tre equazioni simultanee (α) (β) per la funzione incognita ω formano, come già si riscontrò al n. 18 M. L, un sistema illimitatamente integrabile. La formola (24) n. 19 M. L dimostra poi che la funzione $F(w)$ per sistemi pseudosferici di Weingarten, derivati l'uno dall'altro per trasformazioni di Bäcklund, conserva il medesimo valore.

In particolare: Ogni sistema pseudosferico a flessione costante si cangia, per trasformazioni di Bäcklund, in sistemi della medesima classe.

Più particolarmente ancora: Ogni sistema ciclico si cangia per trasformazioni di Bäcklund in sistemi ciclici (Cf. M. A, n. 28).

§ VIII.

Sistemi di Weingarten a curvatura variabile.

33. I sistemi tripli ortogonali dello spazio S, che abbiamo finora considerato, contenevano una serie di superficie Σ colla medesima curvatura costante. Nel presente § tratteremo il caso più generale che le superficie Σ siano bensì a curvatura

costante K, ma K varii con continuità dall'una all'altra superficie. I calcoli da farsi sono tanto simili a quelli eseguiti ai §§ VI, VII che ci basterà accennarli brevemente. Distingueremo, come ai §§ citati, quattro casi.

1° Le superficie Σ siano di 1ª specie a curvatura costante positiva K. Poniamo

$$K=\frac{1}{R^2},$$

e l'elemento lineare dello spazio prenderà la forma

$$(a)\qquad ds^2=\cos^2\omega\,du^2+\operatorname{sen}^2\omega\,dv^2-R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2dw^2,$$

dove R è funzione della sola w, che si suppone finita e continua insieme colla derivata; le funzioni $\omega(u,v,w)$ $R(w)$ dovranno soddisfare le equazioni:

$$(1)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{R^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{R}\right)-\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\omega}{\partial v}=0\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)-\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{\cos\omega}{R}\right)+\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\omega}{\partial u}=0\\[2mm] \dfrac{\partial^3\omega}{\partial u\,\partial v\,\partial w}+\operatorname{tg}\omega\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\omega}{\partial v}-\cot\omega\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\omega}{\partial u}=0.\end{cases}$$

Inversamente se ω, R soddisfano queste equazioni, la formola (a) definirà nello spazio S un sistema di Weingarten della specie richiesta.

2° Le superficie Σ siano di 2ª specie e a curvatura positiva $\frac{1}{R^2}$. L'elemento lineare prendera la forma

$$(b)\qquad ds^2=\cosh^2\theta\,du^2-\operatorname{senh}^2\theta\,dv^2+R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2dw^2,$$ dove le funzioni θ, R soddisfano alle equazioni:

$$(2)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\dfrac{\operatorname{senh}\theta\cosh\theta}{R^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{R}\right)-\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}=0\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)-\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{\cosh\theta}{R}\right)-\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=0\\[2mm] \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}-\operatorname{tgh}\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}-\coth\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=0.\end{cases}$$

Inversamente se θ, R soddisfano le (2), la formola (b) definirà un sistema di Weingarten.

3° Le superficie Σ siano pseudosferiche di 1ª specie. Se poniamo $K=-\frac{1}{R^2}$, l'elemento lineare prenderà la forma

$$(c)\qquad ds^2=\cosh^2\theta\,du^2+\operatorname{senh}^2\theta\,dv^2-R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2dw^2,$$

e le funzioni $\theta(u,v,w)$, $R(w)$ dovranno soddisfare le equazioni (E) n. 23 M. L.

4° Le superficie Σ siano pseudosferiche di 2ª specie. Allora l'elemento lineare prende la forma

$$ds^2 = \cos^2 \omega \, du^2 - \operatorname{sen}^2 \omega \, dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

e le funzioni $\omega(u, v, w)$, $R(w)$ saranno legate fra loro dalle equazioni (E') n. 23 M. L.

Nei due ultimi casi perveniamo dunque a sistemi di equazioni già discussi di cui non staremo qui a ripetere la trattazione analitica. Solo osserveremo che le equazioni (29) (29') n. 23 M. L vengono ad assumere nel nostro spazio S il significato della trasformazione di Bäcklund applicata ai sistemi pseudosferici di Weingarten. Così p. e. se si parte da un sistema pseudosferico di 1ª specie, corrispondente ad una soluzione θ delle (E) n. 23. M. L e si determina ω dalla equazione a differenziali totali (29) l. c., applicando al sistema dato la trasformazione di Bäcklund analiticamente espressa dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x - c\,(\cos \omega X_1 + \operatorname{sen} \omega X_2) \\ y' &= y - c\,(\cos \omega Y_1 + \operatorname{sen} \omega Y_2) \\ z' &= z - c\,(\cos \omega Z_1 + \operatorname{sen} \alpha Z_2)\,, \end{aligned}\right.$$

perverremo ad un sistema pseudosferico di 2ª specie corrispondente alla formola

$$dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2 \omega \, du^2 - \operatorname{sen}^2 \omega \, dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

34. Resta che ci occupiamo dei sistemi di Weingarten appartenenti al 1° e al 2° caso. È facile accertarsi dell'esistenza di soluzioni particolari dei sistemi di equazioni (1) e (2) e da queste con trasformazioni di Bäcklund si potranno ottenere quante si vogliano nuove soluzioni.

Partiamo p. e. da un sistema di Weingarten corrispondente alla formola (a), dove ω, R soddisfano le (1). Indicando con c una costante arbitraria e definendo un angolo ausiliario σ dalla formola

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{R}{c},$$

applichiamo a ciascuna superficie pseudosferica Σ una trasformazione di Bäcklund espressa dalle formole

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x - c\,(\cos \varphi X_1 + \operatorname{sen} \varphi X_2) \\ y' &= y - c\,(\cos \varphi Y_1 + \operatorname{sen} \varphi Y_2) \\ z' &= z - c\,(\cos \varphi Z_1 + \operatorname{sen} \varphi Z_2)\,, \end{aligned}\right.$$

dove la funzione φ sia determinata dal sistema illimitatamente integrabile

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \omega + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \varphi \cos \omega}{c \operatorname{sen} \sigma}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \omega + \operatorname{sen} \sigma \cos \varphi \operatorname{sen} \omega}{c \operatorname{sen} \sigma}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \operatorname{sen} \sigma \left\{ c \frac{\cos \varphi}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial w} + c \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \, \partial w} - \frac{\partial \omega}{\partial w} \right\}.$$

Si troverà facilmente:

$$dx'^2 + dy'^2 - dz'^2 = \cos^2 \varphi \, du^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi \, dv^2 - c^2 \operatorname{tg}^2 \sigma \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

cioè le formole (3) ci danno un nuovo sistema di Weingarten della stessa specie.

Similmente se si parte da un sistema di Weingarten corrispondente alla formola (6), e si determina una funzione ausiliaria φ dal sistema illimitatamente integrabile

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{\operatorname{senh}\theta\cosh\varphi+\operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\varphi}{c\operatorname{sen}\sigma}\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{\cosh\theta\operatorname{senh}\varphi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\varphi}{c\operatorname{sen}\sigma}\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial w}=\operatorname{sen}\sigma\left\{c\frac{\cosh\varphi}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+c\frac{\operatorname{senh}\varphi}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\frac{\partial\theta}{\partial w}\right\},\end{aligned}\right.$$

la trasformazione di Bäcklund espressa dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} x'&=x-c\,(\cosh\varphi\,X_1+\operatorname{senh}\varphi\,X_2)\\ y'&=y-c\,(\cosh\varphi\,Y_1+\operatorname{senh}\varphi\,Y_2)\\ z'&=z-c\,(\cosh\varphi\,Z_1+\operatorname{senh}\varphi\,Z_2)\,,\end{aligned}\right.$$

farà nascere dal sistema dato un nuovo sistema di Weingarten, corrispondente alla formola

$$dx'^2+dy'^2-dz'^2=\cosh^2\varphi\,du^2-\operatorname{senh}^2\varphi\,dv^2+R^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2dw^2\,.$$

§ IX.

Forme indefinite a curvatura costante.

35. Le ricerche che abbiamo fatte sulla forma differenziale quadratica indefinita a curvatura nulla

$$dx^2+dy^2-dz^2$$

sono facilmente estendibili alle forme indefinite a curvatura costante K, per le quali può assumersi a forma tipica la seguente

$$(1)\qquad \varphi=\frac{dx^2+dy^2-dz^2}{\left(x^2+y^2+z^2+\frac{K}{4}\right)^2}\,.$$

Se supponiamo che la forma

$$(2)\qquad \psi=H_1^2\,du^2+H_2^2\,dv^2-H_3^2\,dw^2$$

sia a curvatura costante K, le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le funzioni H_1, H_2, H_3 di u, v, w sono espresse dalle formole

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial v\,\partial w}&=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial w}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial v}\\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial w\,\partial u}&=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial u}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial w}\\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial u\,\partial v}&=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{du}\frac{\partial H_1}{\partial v}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial u}\end{aligned}\right.$$

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)-\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}+KH_1H_2=0\\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}+KH_2H_3=0\\ &-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}+KH_3H_1=0\,,\end{aligned}\right.$$

delle quali le tre prime coincidono colle (I) n. 7. Quando le (A), (B) siano soddisfatte, la forma (2) è trasformabile nella (1).

Per il problema da trattarsi è opportuno di considerare anche la forma

$$(2^*) \qquad \psi' = H_1^2\, du^2 - H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2$$

ed esprimere le condizioni affinchè la sua curvatura sia una costante K. In tal caso le H_1, H_2, H_3 dovranno soddisfare le equazioni (A) e le tre seguenti

$$(B') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right) + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w} + K H_1 H_2 = 0 \\ -&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right) + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u} + K H_2 H_3 = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right) - \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v} + K H_3 H_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Assumendo la forma differenziale (1) come espressione del quadrato dell'elemento lineare di uno spazio (a curvatura costante K) potremmo qui estendere alla geometria delle superficie in questo spazio i risultati del § II relativi allo spazio S. Qui accenniamo soltanto come tale ricerca possa condursi coi medesimi metodi (Cf. M. L § I) e veniamo al problema, già enunciato nella prefazione, di determinare H_1, H_2, H_3 in guisa che la forma (2) o (2*) abbia la curvatura costante e nello stesso tempo le forme parziali

$$H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2, \qquad H_1^2\, du^2 - H_2^2\, dv^2,$$

che si ottengono facendo $w = \text{cost}^{\text{te}}$, siano esse stesse a curvatura costante.

36. *a*) Se si tratta della forma (2) dovranno H_1, H_2, H_3 soddisfare le (A) (B) e nello stesso tempo dovrà essere

$$(3) \qquad -\frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)\right\} = k,$$

ossia per la 1ª delle (B)

$$(4) \qquad \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} \cdot \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = K - k.$$

Suddistinguiamo ora due casi, secondo il segno di $K - k$, supponendo dapprima $k \lesseqgtr 0$.

1° Sia $K - k$ positivo, poniamo

$$K - k = \frac{1}{R^2};$$

dalla (4) e dalle (A) (B) con calcoli simili a quelli del n. 28 dedurremo che si può porre

$$H_1 = \cosh\theta \quad H_2 = \operatorname{senh}\theta \quad H_3 = R\frac{\partial\theta}{\partial w}$$

ove θ è una funzione ausiliaria. Le (A) (B) danno ora per θ un sistema di equazioni alle derivate parziali di forma diversa secondo il segno di k. Se $k > 0$ si potrà fare, senza alterare la generalità, $k = 1$ e si avranno per θ le equazioni (II), (II_a) n. 4 M. A; se invece $k < 0$, si farà $k = -1$ e θ dovrà soddisfare le equazioni (B) n. 15 M. L.

2° Sia $K - k$ negativo, poniamo

$$K - k = \frac{-1}{R^2}.$$

Dalle (4), (A), (B) si deduce

$$H_1 = \cos\theta\,, \qquad H_2 = \operatorname{sen}\theta\,, \qquad H_3 = R\frac{\partial\theta}{\partial w}$$

dove θ è una funzione ausiliaria. Potremo fare anche qui $k = \pm 1$. Se $k = +1$, θ dovrà soddisfare le equazioni (C) n. 15 M. L e se $k = -1$ le equazioni (I) n. 4 M. A.

b) Supponiamo ora invece che si tratti della forma (2*) e si abbia per ipotesi

$$-\frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)\right\} = k\,;$$

la 1ª delle (B*) ci darà

$$\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\cdot\frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = k - K\,.$$

Distinguiamo anche qui due casi:

1° Sia $k - K$ positivo, poniamo

$$k - K = \frac{1}{R^2}\,;$$

troveremo per H_1, H_2, H_3 i valori

$$H_1 = \cosh\theta\,, \qquad H_2 = \operatorname{senh}\theta\,, \qquad H_3 = R\frac{\partial\theta}{\partial w}\,\cdot$$

Se facciamo al solito $k = \pm 1$ avremo per θ, nel caso di $k = +1$, le equazioni (2) n. 28 della presente Memoria e nel caso di $k = -1$ il sistema seguente:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) - \cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) + \operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0\\
&\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} - \operatorname{tgh}\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \coth\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0\,,
\end{aligned}\right.$$

al quale può anche sostituirsi il sistema equivalente [1]

$$(5^*)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh}\theta\cosh\theta\\
&-\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = F(w)\,.
\end{aligned}\right.$$

2° Sia $k - K = -\frac{1}{R^2}$; allora si potrà porre

$$H_1 = \cos\omega\,, \quad H_2 = \operatorname{sen}\omega\,, \quad H_3 = R\frac{\partial\omega}{\partial w}$$

e se $k = -1$ troveremo per ω le equazioni (B′) n. 18 M. L. Per vedere che anche il caso di $k = +1$ non porta a considerare nuovi sistemi di equazioni a derivate parziali, si scriva in questa ipotesi l'elemento lineare dello spazio sotto la forma

$$ds^2 = -\cos^2\omega\,du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\,dv^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

e si avranno per ω le stesse equazioni (B′) sopra citate.

[1] Cf. Nota n. 28.

37. Resta in fine che consideriamo il caso di $k = 0$, caso di cui è stata omessa la trattazione anche nella precedente Memoria (M. L). A seconda che si tratta della forma (2) o della (2*) e a seconda del segno di K troveremo i risultati seguenti:

1° La forma differenziale

$$(a) \qquad \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 - \mathrm{R}^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

sarà a curvatura costante $\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{R}^2}$, mentre la forma parziale $w = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ avrà a curvatura $k = 0$, se θ soddisfa le equazioni seguenti:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) + \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) + \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} - \operatorname{tgh}\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \coth\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

o il sistema eqnivalente

$$(\alpha^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 \\ \dfrac{1}{\cosh^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 = \mathrm{F}(w). \end{cases}$$

2° La forma differenziale

$$(b) \qquad \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 - \mathrm{R}^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

avrà la curvatura $\mathrm{K} = -\frac{1}{\mathrm{R}^2}$ e la forma parziale $w = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ la curvatura nulla se θ soddisfa le equazioni

$$(\beta) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) + \dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} + \operatorname{tg}\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \cot\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

o il sistema equivalente

$$(\beta^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 = \mathrm{F}(w) \end{cases}$$

3° La forma differenziale

$$(c) \qquad \cos^2\theta\, du^2 - \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \mathrm{R}^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

avrà le proprietà enunciate per la forma (a) se θ soddisfa le equazioni

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=0 \\ \dfrac{1}{\cos^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2=\mathrm{F}(w) \end{cases}$$

4° La forma differenziale

$$(d)\qquad \cosh^2\theta\,du^2-\operatorname{senh}^2\theta\,dv^2+\mathrm{R}^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 d\mathrm{D}^2$$

avrà le proprietà enunciate per la forma (c) se θ soddisfa le equazioni

$$(\delta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)-\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)-\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=0 \\ \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}-\operatorname{tgh}\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}-\coth\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=0 \end{cases}$$

o il sistema equivalente:

$$(\delta^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=0 \\ \dfrac{1}{\cosh^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2-\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2=\mathrm{F}(w). \end{cases}$$

38. Il problema che ci siamo proposti in questo paragrafo conduce, per $k \gtrless 0$, a sistemi di equazioni già precedentemente discussi, ove si eccettui il sistema (5). Anche al sistema (5) o (5*) sono applicabili i metodi stessi, che abbiamo sviluppato per gli altri sistemi. E infatti se si parte da una soluzione particolare nota θ del sistema (5) e si determina φ dal sistema illimitatamente integrabile:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}=\dfrac{\cosh\theta\operatorname{senh}\varphi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=-\dfrac{\operatorname{senh}\theta\cosh\varphi+\operatorname{sen}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}+\dfrac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left\{\cos\sigma\dfrac{\cosh\varphi}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\cos\sigma\dfrac{\operatorname{senh}\varphi}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}+\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\right\}=0, \end{cases}$$

dove σ indica una costante arbitraria, la funzione φ sarà nuovamente una soluzione del sistema (5), giacchè si trova:

$$-\frac{1}{\cosh^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=-\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2.$$

Nel caso poi di $k=0$ si hanno i nuovi sistemi (α), (β), (γ), (δ). Pel 2° ed il 4° di questi sistemi è facile verificare le proposizioni seguenti.

Se θ è una soluzione delle (β) si determini φ dal sistema illimitatamente integrabile:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v} &= -a\,\mathrm{sen}\,(\varphi+\theta)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\theta}{\partial u} &= \quad a\,\mathrm{sen}\,(\varphi+\theta)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} &= \frac{1}{a}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\frac{1}{a}\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{sen}\,\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\frac{\partial\theta}{\partial w}, \end{aligned}\right.$$

dove a indica una costante arbitraria e sarà φ una nuova soluzione delle (β).

Quando si conosca invece una soluzione θ delle (δ), basterà cangiare nelle (7) le funzioni circolari in iperboliche.

§ X.

Riepilogo dei sistemi di equazioni incontrati in questa Memoria e nelle due precedenti.

39. Non sarà inutile riassumere qui, alla conclusione di questi studî, quei diversi sistemi di equazioni a derivate parziali a cui il problema, enunciato nella prefazione, ci ha condotti, e pei quali abbiamo dimostrato l'esistenza d'infinite soluzioni con un metodo d'integrazione successiva, che dà effettivamente il modo di dedurre da una soluzione nota di uno di essi infinite nuove soluzioni.

Ecco il quadro dei sistemi in discorso [1]:

M. A. n. 4

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\\ &\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=F(w) \end{aligned}\right.$$

n. 36

$$(1^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta\\ &-\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\mathrm{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=F(w) \end{aligned}\right.$$

M. L. n. 15 (C)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta=0\\ &\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=F(w) \end{aligned}\right.$$

n. 28

$$(2^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta=0\\ &\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2-\frac{1}{\mathrm{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=F(w) \end{aligned}\right.$$

M. L. n. 18

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\\ &-\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=F(w) \end{aligned}\right.$$

[1] Le semplici citazioni di numero si riferiscono al presente lavoro.

M. L. n. 15 (B) (3*)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \\ \dfrac{1}{\cosh^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = \mathrm{F}(w) \end{cases}$$

n. 37 (β) (4)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 = \mathrm{F}(w) \end{cases}$$

n. 37 (δ) (4*)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 \\ \dfrac{1}{\cosh^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 - \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 = \mathrm{F}(w) \end{cases}$$

I sistemi scritti nel quadro superiore si succedono a coppie in guisa che ogni soluzione di uno di essi, divisa per $\sqrt{-1}$, dà una soluzione dell'altro.

40. Completiamo in fine questo quadro colle osservazioni seguenti. Tutti i sistemi sopra scritti nascono dalle 6 equazioni di Lamé per le forme differenziali definite o indefinite a curvatura costante
$$\mathrm{H}_1^2\, du^2 \pm \mathrm{H}_2^2\, dv^2 \pm \mathrm{H}_3^2\, dw^2\,,$$
facendovi
$$\mathrm{H}_1 = \varphi(\theta)\ ,\quad \mathrm{H}_2 = \psi(\theta)\ ,\quad \mathrm{H}_3 = \mathrm{R}\frac{\partial\theta}{\partial w}\,,$$
dove R è una costante e le funzioni φ, ψ della ausiliaria θ si determinano in guisa che le due prime delle equazioni (I) n. 37, le quali rimangono le stesse in tutti i diversi casi, risultino identicamente soddisfatte.

Ciò richiede che si abbia
$$\varphi'' = \frac{\psi'}{\psi}\varphi'\ ,\quad \psi'' = \frac{\varphi'}{\varphi}\psi'$$
e quindi, lasciando da parte il caso di φ o ψ costanti:
$$\varphi' = a\psi\,,\qquad \psi' = b\varphi\,,$$
dove a, b sono costanti. Se il prodotto ab è negativo si può fare, senza alterare la generalità

(α) $\qquad \varphi = \cos\theta \qquad \psi = \operatorname{sen}\theta$

e se ab è negativo si può porre una prima volta

(β) $\qquad \varphi = \cos \mathrm{h}\theta \qquad \psi = \operatorname{sen} \mathrm{h}\theta$

e una seconda volta

(γ) $\qquad \varphi = \psi = e^\theta\,.$

I casi (α) (β) danno luogo ai sistemi che abbiamo incontrato fin qui; il terzo (γ) ai nuovi sistemi di cui ora diremo brevemente.

Se facciamo
$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = e^\theta \qquad \mathrm{H}_3 = \frac{\partial\theta}{\partial w}$$
nelle equazioni di Lamé per l'elemento lineare dello spazio euclideo
$$ds^2 = \mathrm{H}_1^2\, du^2 + \mathrm{H}_2^2\, dv^2 + \mathrm{H}_3^2\, dw^2\,,$$

troviamo per la funzione incognita θ il seguente sistema di equazioni a derivate parziali:

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+e^{2\theta}=0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{-\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)+e^{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial w}+e^{-\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\,\frac{\partial\theta}{\partial v}=0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)+e^{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial w}+e^{-\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\,\frac{\partial\theta}{\partial u}=0\\
&\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}-\frac{\partial\theta}{\partial v}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}-\frac{\partial\theta}{\partial u}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}=0\,,
\end{aligned}\right.
$$

alle quali si può sostituire il sistema equivalente

$$
(5^*)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+e^{2\theta}=0\\
&e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=\mathrm{F}(w)\,.
\end{aligned}\right.
$$

La stessa sostituzione nelle formole di Lamé per le forme differenziali definite o indefinite a curvatura nulla o costante conduce agli altri due sistemi

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=e^{2\theta}\\
&e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=\mathrm{F}(w)
\end{aligned}\right.
$$

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=e^{2\theta}\\
&e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2-e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=\mathrm{F}(w)\,.
\end{aligned}\right.
$$

41. Possiamo ora facilmente vedere con considerazioni geometriche come si ottiene l'integrale generale dei sistemi (5), (6) o (7).

Prendiamo p. e. il sistema (5) o l'equivalente (5*). Se la funzione θ soddisfa a queste equazioni, l'elemento lineare

$$
(8)\qquad ds^2=e^{2\theta}(du^2+dv^2)+\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2
$$

appartiene allo spazio euclideo e le superficie $w=\mathrm{cost}^{te}$ del sistema triplo ortogonale sono sfere di raggio $=1$, poichè le formole (5) n. 2. M. A

$$
(9)\qquad \frac{1}{r_{31}}=\frac{1}{\mathrm{H}_1\,\mathrm{H}_3}\,\frac{\partial\mathrm{H}_1}{\partial w}\quad,\quad \frac{1}{r_{32}}=\frac{1}{\mathrm{H}_2\,\mathrm{H}_3}\,\frac{\partial\mathrm{H}_2}{\partial w}
$$

danno nel nostro caso

$$
\frac{1}{r_{31}}=\frac{1}{r_{32}}=1\,.
$$

Inversamente prendiamo ad arbitrio un sistema ∞^1 di sfere Σ col raggio $=1$ e sopra una sfera iniziale arbitraria Σ_0 del sistema tracciamo un doppio sistema di linee $\mathrm{L}_1\,\mathrm{L}_2$ *ortogonale ed isotermo*. Le sfere Σ insieme colle superficie Σ_1, Σ_2 ciascuna delle quali è il luogo di quelle curve traiettorie ortogonali delle sfere Σ, che escono dai punti di una linea L_1 o di una linea L_2, formano come è noto, un sistema triplo ortogonale.

Prendendo questo sistema a sistema coordinato l'elemento lineare dello spazio prenderà la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2\,,$$

dove supponiamo che le $w = \text{cost}^{\text{te}}$ siano le sfere Σ e precisamente la $w = 0$ la sfera Σ_0. Se indichiamo con $H_1^{(0)}, H_2^{(0)}$ i valori di H_1, H_2 per $w = 0$, potremo porre per ipotesi, cangiando convenientemente i parametri u, v,

$$H_1^{(0)} = H_2^{(0)}\,.$$

Ora, essendo

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{r_{32}} = 1\,,$$

le (9) danno

$$H_3 = \frac{\partial \log H_1}{\partial w} = \frac{\partial \log H_2}{\partial w} \tag{10}$$

e quindi

$$H_2 = H_1\, \psi(u, v)\,,$$

dove ψ è funzione di u, v soltanto. Ponendo in quest' ultima $w = 0$, risulta subito $\psi = 1$.

Possiamo dunque porre

$$H_1 = H_2 = e^{\theta}$$

e per la (10)

$$H_3 = \frac{\partial \theta}{\partial w}\,,$$

dopo di che l'elemento lineare prende la forma (8) e la funzione θ soddisfa necessariamente le (5), che rappresentano le equazioni di Lamé.

In modo perfettamente simile si effettua l' integrazione dei sistemi (6) o (7), assumendo nello spazio S (§ II) una serie ∞^1 arbitraria di sfere di 1ª o di 2ª specie di raggio $= 1$ e segnando sopra una sfera iniziale della serie un doppio sistema di linee ortogonale ed isotermo.

RELAZIONE

letta dal Socio G. Struever, relatore, a nome anche del Socio G. Spezia nella seduta del 2 decembre 1888 sulla Memoria del dott. Ettore Artini, intitolata: *Studio cristallografico della cerussite di Sardegna.*

« Il dott. Artini ha preso a studiare i cristalli di cerussite della Sardegna conservati nel Museo Mineralogico dell'Università di Bologna e messi a sua disposizione dal prof. Bombicci. L'autore vi ha trovato 29 forme semplici, fra le quali quattro sarebbero nuove per la cerussite in genere, e numerosi gemelli secondo le due leggi di geminazione già note sui cristalli di altri luoghi. Di un numero cospicuo di combinazioni semplici e di geminati semplici e polisintetici dà le descrizioni e le figure sopra tre tavole egregiamente eseguite. Di più, l'Artini descrive l'aspetto fisico delle singole forme e deduce dalle sue numerose misure le costanti cristallografiche per la cerussite della Sardegna.

« Il lavoro dell'Artini merita certamente, a giudizio della vostra Commissione, di essere inserito per intero negli Atti dell'Accademia; e il nostro compito sarebbe con ciò esaurito, se non credessimo di dover fare due osservazioni, una all'autore, l'altra ai cristallografi in genere. L'autore dice che la cerussite di Sardegna è incomparabilmente più rara della anglesite della stessa isola; noi crediamo di poter asserire che la prima vi è altrettanto frequente quanto la seconda, e che se nei musei visitati dall'autore può sembrare il contrario, ciò, a parer nostro, dipende semplicemente dal fatto che i collezionisti danno la preferenza all'anglesite che in pochissimi luoghi si trova in così splendidi cristalli come in Sardegna, mentre la cerussite è frequentissima in speciosi cristalli in un gran numero di giacimenti.

« Crediamo poscia di dover richiamare l'attenzione, massime dei giovani cristallografi, sulla utilità di studiare i minerali che descrivono, possibilmente anche sul posto, per evitare quella confusione e incertezza nella indicazione dei giacimenti di cui pur troppo molte pubblicazioni mineralogiche si risentono, a danno gravissimo degli studî di paragenesi, senza dubbio non meno importanti di quelli puramente cristallografici ».

Studio cristallografico della cerussite di Sardegna.

Memoria di ETTORE ARTINI.

(Con tre tavole).

Il materiale di rara bellezza, che mi servì per questo studio, appartiene alle splendide collezioni italiane del Museo mineralogico della R. Università di Bologna, e venne messo a mia disposizione dal prof. Luigi Bombicci, al quale è mio gratissimo dovere esprimere qui i sensi della mia viva riconoscenza per tanta bontà e gentilezza.

Assai rara nelle collezioni è la cerussite cristallizzata di questa località, e credo anzi che alcuni tra gli esemplari dei musei, invece che a cerussite, si debbano ascrivere a un minerale senza paragone più frequente in Sardegna, all'Anglesite. Vidi io stesso molti pezzi di quest'ultima, donati a qualche museo italiano, col nome di cerussite: e bisogna confessare che per esempio la combinazione dell'anglesite *m* }110{ *y* }112{ *l* }104{, descritta già da V. von Lang (1) e frequentissima, insieme con qualche altra forma meno costante, nella miniera di *Malacalzetta*, e in quasi tutte le altre, rassomiglia assai, con diversa orientazione, alla combinazione della cerussite }110{ }021{ }111{, la quale, coll'aggiunta pure di qualche altra forma meno sviluppata, fu osservata nella cerussite di qualche località (2).

Questa sua rarità spiega come sia stata finora tanto poco studiata. Il Kokscharow (3) misurò e descrisse un solo cristallo di *Monteponi*, della combinazione }001{ }110{ }102{ }011{ }023{ }012{ }111{ }121{ }112{ }211{.

Il Groth (4) descrisse alcuni cristallini provenienti da *Ingurtosa*, della combinazione }110{ }012{, geminati secondo }110{, sulla galena; e alcuni lunghi prismi fortemente striati, di Montevecchio.

A questo si riduce tutto quanto fu scritto su tale argomento, ed è a notarsi come lo Schrauf (5), che riporta sempre con ogni diligenza i risultati del Kokscharow, e ne aggiunge di originali, non abbia disegnato nemmeno un cristallo di cerussite di Sardegna, e non ne parli affatto.

Fra i cristalli, non mancano i semplici, ma la maggior parte mostrano svariate geminazioni, sulle quali mi fermerò poi in modo speciale.

(1) *Monograph. d. Bleivitr.* — Sitzb. Wien. Akad. XXXVI, 1859.

(2) *Pelsöcz-ardó ásványairól.* — per A. Schmidt. Edit. separ. e Természetr. Füz. VIII, 2°, 1884, a Musaeo Nat. Hung. Bud. vulg.

(3) Materialien zur Miner. Russl. VI, 122.

(4) *Die Mineraliensammlung.* etc. 1878, 137.

(5) *Atlas der Krystallf. d. Mineralreiches.* Fasc. V. 1878.

Le loro dimensioni sono molto variabili: ne esistono di estrema piccolezza, tali da essere appena visibili ad occhio nudo, e per gradazione non interrotta si arriva a cristalli di uno o due centimetri in tutte le dimensioni; questi sono tutt'altro che rari, ed anzi ebbi a studiare un geminato polisintetico, di cui sarà fatta in seguito particolare menzione, il quale arriva alla lunghezza di 3 cm. per $1\frac{1}{2}$ di larghezza e altrettanto di grossezza.

Non solo per le dimensioni ma anche più per lo splendore delle facce, e per il numero delle forme semplici che essi presentano, questi cristalli sono di grande interesse, e degni veramente di ammirazione.

Forme osservate, e apparenza delle facce.

Le forme semplici che osservai sono indicate nel seguente quadro:

Numero progressivo	Lettere Iª osserv.	Simboli (1) di Miller	Simboli di Naumann	Simboli di Weiss	Simboli di Lévy	Primo osservatore
1	a	100* (2)	$\infty \bar{P} \infty$	a:∞b:∞c	h'	—
2	b	010*	$\infty \breve{P} \infty$	∞a:b:∞c	g'	—
3	c	001	oP	∞a:∞b:c	p	—
4	m	110	∞P	a:b:∞c	m	—
5	v	350*	$\infty \breve{P} \frac{5}{3}$	5a:3b:∞c	g^4	Des Cloizeaux
6	χ	120*	$\infty \breve{P} 2$	2a:b:∞c	g^3	Schmidt
7	r	130*	$\infty \breve{P} 3$	3a:b:∞c	g^2	—
8	e	101*	$\bar{P} \infty$	a:∞b:c	a^1	Dana
9	y	102	$\frac{1}{2} \bar{P} \infty$	2a:∞b:c	a^2	—
10	E	104**	$\frac{1}{4} \bar{P} \infty$	4a:∞b:c	a^4	Autore
11	x	012	$\frac{1}{2} \breve{P} \infty$	∞a:2b:c	e^2	—
12	q	023	$\frac{2}{3} \breve{P} \infty$	∞a:3b:2c	$e^{\frac{3}{2}}$	Kokscharow
13	k	011	$\breve{P} \infty$	∞a:b:c	e^1	—
14	S	032**	$\frac{3}{2} \breve{P} \infty$	∞a:2b:3c	$e^{\frac{2}{3}}$	Autore
15	i	021*	$2 \breve{P} \infty$	∞a:b:2c	$e^{\frac{1}{2}}$	—
16	R	052**	$\frac{5}{2} \breve{P} \infty$	∞a:2b:5c	$e^{\frac{2}{5}}$	Autore
17	v	031*	$3 \breve{P} \infty$	∞a:b:3c	$e^{\frac{1}{3}}$	—
18	z	041*	$4 \breve{P} \infty$	∞a:b:4c	$e^{\frac{1}{4}}$	—
19	n	051*	$5 \breve{P} \infty$	∞a:b:5c	$e^{\frac{1}{5}}$	Kokscharow

(1) Sono invertiti i due primi assi.

(2) Le forme distinte con un asterisco sono nuove per la località; quelle contrassegnate con due asterischi sono nuove per la cerussite in genere.

Numero progressivo	Lettere Iª Osserv.	Simboli di Miller	Simboli di Naumann	Simboli di Weiss	Simboli di Lévy	Primo osservatore
20	t	061*	$6\breve{P}\infty$	$\infty a:b:6c$	$e^{\frac{1}{6}}$	Kokscharow
21	τ	221*	2 P	a:b:2c	$b^{\frac{1}{4}}$	Schrauf
22	p	111	P	a:b:c	$b^{\frac{1}{2}}$	—
23	o	112	$\frac{1}{2}P$	2a:2b:c	b^1	—
24	g	113*	$\frac{1}{3}P$	3a:3b:c	$b^{\frac{3}{2}}$	—
25	h	114*	$\frac{1}{4}P$	4a:4b:c	b^2	Kokscharow
26	s	121	$2\breve{P}2$	2a:b:2c	$b^1 b^{\frac{1}{3}} g^1 (e_3)$	—
27	φ	131*	$3\breve{P}3$	3a:b:3c	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} g^1$	Schrauf
28	H	161**	$6\breve{P}6$	6a:b:6c	$b^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{7}} g^1$	Autore
29	w	211	$2\bar{P}2$	a:2b:2c	$b^1 b^{\frac{1}{3}} h^1 (a_3)$	—

Come si vede da questo quadro, la cerussite di *Sardegna* presenta in tutto 29 forme semplici, di cui quattro nuove per il minerale in genere e ben altre 15 nuove per la località; è adunque una delle due cerussiti più ricche di forme che siano conosciute finora. Infatti i cristalli di *Russia*, e specialmente di *Siberia* studiati dal Kokscharow (1) ne presentano 20; 21 quelli di *Telekes* in *Ungheria*, secondo Schmidt (2); 23 quelli di *Friedrichssegen* presso *Braubach*, nel *Nassau*, secondo Seligmann (3); 29 quelli di *S. Eufemia*, provincia di *Cordova*, in *Spagna*, secondo Mügge (4); 28, osservate da vari autori, quelli della miniera *Hausbaden*, presso *Badenweiler*, in *Baden*, secondo Liweh (5).

Nè può sfuggire all'osservazione la semplicità dei simboli di tutte le forme semplici elencate più sopra, e aggiungerò che in questo bel minerale mancano affatto le *facce vicinali*.

Per ciò che riguarda le zone, facendo astrazione dai pinakoidi e dalle forme prismatiche, si vede come ciascuna delle 9 piramidi osservate, sia compresa in una almeno delle tre zone principali: [110 . 001], [101 . 010], [011 . 100].

(1) *Monograph. des russischen Weissbleierzes.* Mater. z. Min. Russl. VI.

(2) *Baryt és Cerussit Telekesröl.* Értekez. a term. tud. köréböl. Kiad. a. Mag. tud. Ak. XII, 1. 1882.

(3) Neues Jahrb. für Min. etc. 1880, I, 139.

(4) Ibid. 1882. II, 40.

(5) *Anglesit, Cerussit, und Linarit v. d. Gr. « Hausbaden » b. Badenweiler.* Zeit. für Kryst. IX, 521.

Pinakoidi.

}100{ È frequente, ma non costante; le sue facce, di rado molto ampie, sono piane, brillanti, esenti da striature.

}010{ Le facce di questa forma, che manca solo in casi assai rari, presentano sviluppo variabilissimo: sono piane, ma in generale striate più o meno profondamente secondo la direzione dello spigolo [010 . 001]. Tuttavia, nella maggior parte dei casi, questa striatura non ne toglie lo splendore, e al goniometro non altera che poco o punto la nettezza delle immagini. A volte (fig. 10, tav. II) sono come un po' ondulate, in modo irregolare, e splendono meno bene; in altri casi, parimente rari, esiste una delicata striatura parallela allo spigolo [010 . 100].

}001{ È una forma frequentissima, ma che ha raramente un grande sviluppo; le sue facce, come quelle di }100{, qualunque ne sia la grandezza, sono sempre piane, brillantissime, e non sono mai striate.

Zona [100 . 010]. — *Prismi verticali.*

}110{ Questa forma, che si può dire costante, essendo affatto eccezionali i casi in cui manca (fig. 1, tav. III), ha le sue facce, per solito di notevole sviluppo, generalmente pianissime, e di grande splendore, anche in quei pochi cristalli nei quali le facce medesime sono lievemente striate secondo la direzione dell'asse della zona.

}350{ È una forma rarissima, che fu ossarvata solamente da Des Cloizeaux in un cristallo di *Leadhills* (1); io ne trovai pure una sola faccia, piuttosto piccola e brillantissima, nel cristallo rappresentato dalla fig. 10, tav. II.

}120{ Questa forma, osservata per la prima volta da Schmidt (2) in un cristallo semplice di *Telekes*, come un'esigua smussatura dello spigolo [110 . 130], e da lui determinata solo mercè le zone [100 . 010] e [111 . 102], non fu trovata mai in altre località. Io ne potei osservare facce ampie e di grande splendore in tre bei cristalli, fra semplici e geminati; qua e là ne comparvero tracce anche in altri cristalli. Oltre alle due notate più sopra, verificai al goniometro le zone [121 . 001], e [211 . $1\bar{1}1$].

}130{ Dalle mie osservazioni mi sembra risulti che questo prisma abbia forse nella cerussite sarda, una importanza alquanto maggiore che nelle altre note finora. Lasciando da parte la questione delle geminazioni, che sarà trattata più oltre, è raro il cristallo semplice in cui non se ne trovino facce, e assai spesso di sviluppo notevole.

Pure queste sono brillanti e piane, ma presentano talora due striature: la prima, meno notevole, assai fine, secondo la direzione dell'asse della zona [100 . 010]; la seconda, parallela allo spigolo [130 . 031], e in tal caso, più che strie, sono veri gradini, triangolari, regolarissimi, formati per l'alternarsi di strettissime facce dell'una e dell'altra forma.

(1) *Manuel.* II.° V., I fasc. 1874, p. 155.

(2) *Baryt és Cerussit Telekesröl,* v. sopra.

Zona [100 . 001]. — *Prismi della forma* }h o l{.

Come al solito nella cerussite, questa zona comprende poche forme, e una sola di qualche interesse; però tutti e tre i prismi osservati hanno facce pianissime, ed esenti da ogni particolarità di superfice.

}101{ Fu osservata in qualche raro cristallo semplice, come una faccettina stretta e brillante, che per la eccessiva piccolezza non dava immagini ben riconoscibili. Il simbolo fu determinato dalle due zone [100 . 001], e [010 . 111].

}102{ Frequentissime sono le facce di questa forma, le quali talora hanno una notevole estensione.

}104{ Di questo nuovo prisma potei osservare una sola faccia, nettissima e abbastanza estesa, in un bel geminato. Verificai che stava perfettamente nella zona, e calcolai il simbolo dall'angolo misurato su }100{. Come controllo, misurai gli angoli che faceva con }102{, }112{, e con due facce di }113{, in modo da togliere ogni dubbio possibile.

(104).(100) =	mis. 73°.19′;	calc. 73°.29′.59″;	differenza	0°.10′.59″;
(104).(102) =	" 14. 8 ;	" 14. 8. 38 ;	"	0. 0. 38 ;
(104).(112) =	" 22. 1 ;	" 22. 11. 20 ;	"	0. 10. 20 ;
(104).(113) =	" 13. 26 ;	" 13. 35. 25 ;	"	0. 9. 25 ;
" " =	" 13. 32 ;	" " ;	"	0. 3. 25 .

Zona [010 . 001]. — *Prismi della forma* }o k l{.

Questa zona è di somma importanza, e ne sono una prova le dieci forme osservate in essa, pur fatta astrazione dai due pinakoidi. Una gran parte di queste hanno le loro facce striate parallelamente all'asse della zona, anche qui in generale senza che questo offuschi il loro splendore e la nettezza delle immagini che riflettono al goniometro.

Sembra che partendo dal pinakoide striato }010{ e andando verso la }001{ che è sempre affatto liscia, decresca tale carattere anche nelle forme prismatiche, eccezione fatta per alcuni cristallini in cui tutte le facce sono pianissime, e si possono studiare assai bene anche i prismi più acuti }041{, }051{, }061{, che del resto sono assai poco frequenti; ma in questi casi manca della striatura anche la }010{ o mostra quella parallela allo spigolo [010 . 100].

Così, partendo dalle }031{, }052{, }021{ che mancano solo eccezionalmente di tali strie più o meno profonde, si arriva, passando per la }011{ in cui la striatura è poco profonda e per lo più appena visibile, alle }023{, }012{, che ne sono prive, e si mostrano perfettamente lisce come la }001{. Perfino nella stessa faccia di }011{, quando sia abbastanza estesa, si vede la striatura, mancante presso allo spigolo formato con }012{ o }001{, andare aumentando in basso, e divenine massima presso allo spigolo formato con }021{, }031{ ecc.

Riguardo alla frequenza relativa, le }021{, }011{, }012{ sono tutte assai comuni,

avendo ora l'una ora l'altra di esse il predominio sulle rimanenti, frequentissima pure è la }031{, alquanto meno la }023{, ancora meno la }041{, }051{, }061{; finalmente osservai due volte la }032{ e una volta sola la }052{.

}023{ Questa forma, osservata da Kokscharow per il primo, sul cristallo di Monteponi del quale fu parola in principio, e poi ritrovata solamente nella cerussite di Badenweiler (1), è qui abbastanza comune.

}032{ Osservai in due cristalli facce di questo prisma nuovo, piane, splendenti, e quasi del tutto esenti da striature. Nel primo misurai l'angolo formato con }010{, nel secondo quelli formati con }011{ e }111{; le misure, esattissime, corrispondono assai bene ai valori calcolati:

(032) . (010) =	mis.	42°.39′;	calc.	42°.40′.53″;	diff.	0°.1′.53″;
(032) . (011) =	»	11. 29 ;	»	11. 27. 16 ;	»	0. 1. 44 ;
(032) . (111) =	»	44. 51 ;	»	45. 0. 50 ;	»	0. 9. 50 ;

}052{ In un geminato assai brillante trovai una faccia di questa nuova forma, un po' striata, ma netta e splendente, ben visibile fra }031{ e }021{; un'altra faccia della stessa forma potei osservare nello stesso cristallo, ma la sua eccessiva striatura non mi permise che una misura approssimativa; invece eseguii una misura di controllo della prima faccia con }110{; la corrispondenza sufficientissima tra la misura e il calcolo, toglie ogni dubbio:

(052) . (010) =	mis.	29°.20′;	calc.	28°.57′.21″;	diff.	0°.22′.39″;
(052) . (110) =	»	63. 1 ;	»	62. 53. 17 ;	»	0. 7. 43 ;
(052) . (010) =	mis. appross.	30°.7′.				

Zona [110 . 001]. — *Piramidi della forma*]h h l[.

Le facce delle piramidi di questa zona, come del resto di tutte le piramidi da me osservate, meno qualche caso in cui il cristallo possa essere stato disturbato nell'atto dell'accrescimento, sono sempre piane, lisce, brillanti in maniera assai notevole, e mancano di ogni striatura.

}221{ In un cristallo grande e ricco di forme trovai due strette facce di questa piramide: per la loro piccolezza dovei stabilirne il simbolo mediante le zone [110 . 001], e [211 . 010] verificate al goniometro.

Le facce di }111{, che mancano solo in casi del tutto eccezionali, si distinguono generalmente per ampiezza o splendore; quello di }112{, pure assai brillanti, sono frequentissime; molto meno frequenti quelle di }113{, finalmente la }114{ è rara, ma fu riconosciuta con sicurezza da alcune misure e dalle zone [1$\bar{1}$0 . 102], [110 . 001].

Zona [010 . 101]. — *Piramidi della forma* }h k h{.

Lasciando la }111{ di cui fu già parlato, senza paragone la più importante per frequenza e sviluppo delle facce è la }121{.

(1) V. Lang., *Verhandl. Mineral. Gesellschaft v. Petersburg.* 1874, IX.

La }131{ fu trovata in un cristallo semplice, con facce brillanti e strette, il cui simbolo venne calcolato dalle zone [110 . 021], [010 . 111], [100 . 031], verificate al goniometro.

}161{. In due bellissimi cristalli semplici trovai facce assai nette e distinte di questa nuova forma. Il simbolo, oltre che mediante le zone [130 . 031] e [010 . 111], fu calcolato e controllato mediante la misura degli angoli formati colle facce adiacenti:

(161) . (130) = mis. 18°.20′; calc. 18°.15′. 5″; diff. 0°.4′.35″;
(161) . (031) = " 18. 50 ; " 18. 54. 37 ; " 0. 4. 37 ;
(161) . (010) = " 19. 47 ; " 19. 40. 10 ; " 0. 6. 50 ;
(" " = mis. appross. 20°.15′);
(" " = " " 20. 34).

Zona [100 . 011]. — *Piramidi della forma* }h11{.

}211{. Si osservano abbastanza frequentemente facce di questa forma, ma in generale piuttosto piccole.

Calcolo delle costanti.

Avendo potuto misurare un grande numero di angoli con rara esattezza, stimai cosa utile calcolare le costanti di questa cerussite, servendomi del metodo dei minimi quadrati.

Scelsi a tale scopo 15 angoli tra quelli misurati un maggior numero di volte, aventi peso maggiore, e limiti più ritretti; e le costanti ottenute, assai vicine a quelle date dal Kokscharow per la cerussite in genere, presentano un alto grado di probabilità, avendosi un errore medio di 0′.39″.

Ottenni per le costanti di Kokscharow:

$$(a:b:c = 0.609969:1:0.722998)\ (^1);\quad \Sigma d^2 = 37857;\quad \mu = 0'.46'';$$

e per le costanti risultanti dai miei calcoli:

$$(a:b:c = 0.610128:1:0.722929);\quad \Sigma d^2 = 27967;\quad \mu = 0'.39''.$$

(1) Queste sono le costanti che si calcolano dagli angoli di Kokscharow:

(010) . (111) = 65°.00′.16″ e (111) . (001) = 54°.14′.12″.

Dalle costanti a cinque decimali calcolate da questo autore a : b : c = 1.18531 : 1.63943 : 1 si ricavano le altre a : b : c = 0.609968 : 1 : 0.723001, che naturalmente differiscono di qualche unità nella sesta decimale da quelle calcolate direttamente.

Invece il Groth, nelle due edizioni del *Tabellarische Uebersicht* etc., dà per la Cerussite a : b : c = 0.6102 : 1 : 0.7232, e nella *Physikalische Krystallographie* (ediz. 1885, p. 457) dice espressamente che queste costanti sono di Kokscharow. Si tratta evidentemente di un equivoco, e tali costanti sono forse quelle del Miller: infatti dagli angoli del Miller:
(101) . (100) = 40° . 9 ½′ e (110) . (010) = 58° . 36 ½′, si calcola a : b : c = 0.61023 : 1 : 0.72315.

Nè si accorse dell'errore il Liweh, che nel suo studio sulla Cerussite di Badenweiler (loc. cit. p. 513) attribuisce ancora a Kokscharow le costanti date dal Groth.

Nel trattato del Naumann, rifatto da Zirkel (XII ediz. 1885, p. 464) sono dati gli angoli fon-

Le differenze tra i valori misurati e i calcolati, appariscono estesamente nel sequente quadro riassuntivo.

Numero progressivo	Spigoli (1) misurati	Angoli trovati. Medie	Limiti	Numero degli spigoli misurati	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcolati dalle costanti di Kokscharow	Angoli calcolati dalle costanti a : b : c = =0.610128:1:0.722929	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato della differenza
		° ′ ″	° ′ ° ′			° ′ ″	° ′ ″			
1	110.010*	58.36.10	58.34—58.39	13	23	58.37.5	58.36.41	—	31	961
2	110.100*	31.22.36	31.21—31.24	9	20	31.22.55	31.23.19	—	43	1849
3	110.1$\bar{1}$0	62.46.15	62.46—62.47	4	12	—	62.46.38	—	—	—
4	350.010	44.29	—	1	2	—	44.31.14	—	—	—
5	120.010	39.46	—	1	appr.	—	39.20.5	—	—	—
6	120.110	19.17	—	1	3	—	19.16.36	—	—	—
7	120.130	10.43	10.42—10.45	2	3	—	10.41.8	—	—	—
8	130.010*	28.39.12	28.36—28.47	12	20	28.39.20	28.38.57	15	—	225
9	130.100	61.20.40	61.19—61.22	3	6	—	61.21.3	—	—	—
10	130.110*	29.57.25	29.56—29.59	13	31	29.57.45	29.57.44	—	19	361
11	102.100*	59.20.34	59.19—59.22	6	14	59.20.48	59.21.21	—	47	2209
12	102.011	45.48.43	45.47—45.50	4	7	—	45.47.40	—	—	—
13	102.111	31.8	31.7—31.9	2	2	—	31.8.7	—	—	—
14	102.130	75.51	—	1	2	—	75.51.18	—	—	—
15	102.121	46.18	—	1	1	—	46.18·52	—	—	—
16	102.211	39.17	—	1	2	—	39.16.35	—	—	—

---

damentali *nach den fast ganz übereinstimmenden Messungen von v. Kokschгrow und v. Zepharovich* (benchè con qualche errore, perchè vi si trova p. es. l'angolo vero tra (111) e (1$\bar{1}$1) che è $= 130°.0'.32''$ secondo Kokscharow, e $= 130°.00'.42''$ secondo v. Zepharovich, approssimato a 130°.00′), e poi le costanti stesse che dà il Groth, senza alcuna avvertenza, di modo che si potrebbe esser tratti alla erronea credenza che si ricavassero dagli angoli dati prima.

Schrauf poi (*Ueber Weissbleierz*) trasforma le costanti di Kokscharow in

$$a : b : c = 1.63913 : 1 : 0.59265, \text{ invece che in } a : b : c = 1.63943 : 1 : 0.59265,$$

e parrebbe per svista sua, non per errore di stampa, che nell'*Atlas* etc. (V fasc.), è ripetuto l'identico errore.

Il Goldschmidt finalmente, nell'*Index d. Krystallf. d. Miner.* aumenta in modo strano la confusione; infatti riporta egli pure le costanti $a : b : c = 0.6102 : 1 : 0.7232$, e poi tra parentesi mette tutti insieme, ordinati non saprei come, i nomi di Hausmann, Kokscharow, Miller, Dana, Des Cloizeaux, Groth, Liweh, quasi che quelle fossero proprio le costanti di Kokscharow, e questi avesse accettate quelle di Hausmann e Miller. Inoltre dallo specchietto dell'*Index* non appariscono le costanti date da Schrauf nel 1860 (*Revision d. vorh. Beob an Kryst. Körper.* Sitzb. d. Wien. Akad. XXXIX, 912), nè quelle esattissime calcolate da v. Zepharovich nel lavoro sui cristalli di Kirlibaba (Sitzb. d. Wien. Akad. LXII, 1870, p. 439) che il Goldschmidt pare abbia dimenticato nel suo elenco bibliografico.

(1) Gli angoli segnati con l'asterisco sono quelli che servirono al calcolo delle costanti.

Numero progressivo	Spigoli misurati	Angoli trovati. Medie	Limiti	Numero degli spigoli misurati	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcolati dalle costanti di Kokscharow	Angoli calcolati dalle costanti a : b : c = =0.610128:1:0.722929	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato della differenza
17	104.100	73°19′	—	1	2	—	73°29′59″	—	—	—
18	104.102	14.8	—	1	1	—	14.8.38	—	—	—
19	104.113	13.29	13°26′—13°32′	2	2	—	13.35.25	—	—	—
20	104.112	22.1	—	1	1	—	22.11.20	—	—	—
21	012.001	19.52.6	19.51—19.53	6	10	—	19.52.23	—	—	—
22	012.011	16.2	—	1	1	—	15.59.28	—	—	—
23	012.010	70.8.26	70.7—70.10	5	7	—	70.7.37	—	—	—
24	012.0$\bar{1}$2	39.43	39.41—39.45	2	4	—	39.44.46	—	—	—
25	012.0$\bar{1}$0	109.52	109.49—109.55	2	2	—	109.52.23	—	—	—
26	012.0$\bar{1}$1	55.43.30	55.41—55.46	2	3	—	55.44.14	—	—	—
27	023.001	25.42.20	25.41—25.43	4	6	—	25.43.54	—	—	—
28	023.031	39.32	—	1	1	—	39.30.52	—	—	—
29	011.001*	35.53.23	35.51—35.55	7	13	35°52′1″	35.51.51	92	—	8464
30	011.0$\bar{1}$1	71.38.30	71.31—71.46	2	3	—	71.43.42	—	—	—
31	011.01$\bar{1}$	108.17	—	2	4	—	108.16.18	—	—	—
32	011.010	54.5	53.55—54.13	7	8	—	54.8.9	—	—	—
33	011.110	72.15	—	2	6	—	72.14.00	—	—	—
34	011.130	59.4	59.2—59.6	2	6	—	59.3.36	—	—	—
35	011.1$\bar{1}$0*	107.46.39	107.46—107.49	5	14	107.45.6	107.46.00	39	—	1521
36	011.1$\bar{3}$0	120.56.17	120.55—120.58	3	7	—	120 56.24	—	—	—
37	032.010	42.39	—	1	2	—	42.40.53	—	—	—
38	032.011	11.29	—	1	2	—	11.27.16	—	—	—
39	032.111	44.51	—	1	2	—	45.0.50	—	—	—
40	021.001	55.20	—	1	3	—	55.19.52	—	—	—
41	021.010	34.40.40	34.27—34.51	9	9	—	34.40.8	—	—	—
42	021.0$\bar{2}$1	110.38.30	110.37—110.40	2	2	—	110.39.44	—	—	—
43	021.011	19.25	—	1	1	—	19.28.1	—	—	—
44	021.111	46.43	—	1	appr.	—	47.9.4	—	—	—
45	052.010	29.20	—	1	1	—	28.57.21	—	—	—
46	052.110	63.1	—	1	2	—	62.53.17	—	—	—
47	031.001	65.16.17	65.15—65.17	4	7	—	65.14.46	—	—	—
48	031.010	24.46	24.42—24.53	8	9	—	24.45.14	—	—	—
49	031.011	29.23	29.21—29.24	4	8	—	29.22.55	—	—	—
50	031.03$\bar{1}$	49.30	—	1	2	—	49.30.28	—	—	—
51	031.012	45.23.30	45.23—45.24	2	4	—	45.22.23	—	—	—
52	031.130	37.10	—	1	2	—	37.9.42	—	—	—
53	031.110	61.49	—	1	2	—	61.46.19	—	—	—
54	041.010	19.6	19.3—19.9	2	2	—	19.4.34	—	—	—
55	051.010	15.31.20	15.23—15.36	3	3	—	15.27.51	—	—	—
56	061.010	13.5	13.00—13.10	2	2	—	12.58.56	—	—	—
57	111.001	54.13.13	54.12—54.16	5	14	—	54.13.44	—	—	—

Numero progressivo	Spigoli misurati	Angoli trovati. Medie	Limiti	Numero degli spigoli misurati	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcolati dalle costanti di Kokscharow	Angoli calcolati dalle costanti a : b : c = =0.610128:1:0.722929	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato della differenza
58	111.100	46°.10′	—	2	5	—	46°.9′.44″	—	—	—
59	111.010	65.1.42	64°.56′—65°.7	8	13	—	65.00.7	—	—	—
60	111.110*	35.46.36	35.44—35.49	31	77	35°.45′.48″	35.46.16	20	—	400
61	111.1$\bar{1}$1*	49.59.6	49.58—50.1	17	43	49.59.28	49.59.46	—	40	1600
62	111.11$\bar{1}$*	71.33.26	71.31—71.36	7	21	71.31.36	71.32.32	54	—	2916
63	111.011*	43.50.22	43.48—43.51	7	19	43.50.50	43.50.16	6	—	36
64	111.0$\bar{1}$1	76.55.54	76.55—76.58	4	10	—	76.55.48	—	—	—
65	111.012	46.7	46.6—46.8	2	4	—	46.6.3	—	—	—
66	112.110*	55.13.25	55.11—55.15	7	12	55.13.53	55.14.21	—	56	3136
67	112.102*	17.16.23	17.15—17.19	8	13	17.16.30	17.16.30	—	7	49
68	112.1$\bar{1}$2	34.34	—	2	4	—	34.33.00	—	—	—
69	112.010	72.36	—	1	1	—	72.43.30	—	—	—
70	112.1$\bar{1}$0	74.52.20	74.51—74.55	2	3	—	74.52.53	—	—	—
71	112.011	32.55	32.53—32.59	2	3	—	32.53.7	—	—	—
72	112.001	34.46	34.45—34.47	2	4	—	34.45.39	—	—	—
73	112.0$\bar{1}$1	60.31	—	1	1	—	60.32.27	—	—	—
74	113.011	30.35	—	1	1	—	30.16.24	—	—	—
75	113.110	65.10.30	65.4—65.17	2	2	—	65.10.17	—	—	—
76	113.1$\bar{1}$3	25.00	—	1	1	—	25.15.57	—	—	—
77	114.001	19.34	—	1	1	—	19.8.12	—	—	—
78	114.110	70.27	—	1	1	—	70.51.47	—	—	—
79	121.010	47.00.47	46.56—47.5	8	9	—	46.59.58	—	—	—
80	121.12$\bar{1}$	56.18	56.17—56.19	2	2	—	56.17.20	—	—	—
81	121.120	28.8	—	1	1	—	28.8.40	—	—	—
82	121.110	33.39	33.38—33.40	3	9	—	33.39.42	—	—	—
83	121.011	38.34.30	38.34—38.35	2	6	—	38.34.18	—	—	—
84	121.111*	18.00.20	18.00—18.3	9	18	18.00.7	18.00.8	12	—	144
85	121.1$\bar{1}$0	82.59	82.58—83.00	2	6	—	82.59.55	—	—	—
86	121.0$\bar{1}$1	91.00	90.58—91.1	2	3	—	90.59.28	—	—	—
87	161.010	19.47	—	1	2	—	19.40.10	—	—	—
88	161.130	18.20	—	1	2	—	18.15.5	—	—	—
89	161.031	18.50	—	1	2	—	18.54.37	—	—	—
90	211.110*	26.4.28	26.00—26.6	8	19	26.5.10	26.5.32	—	64	4096
91	211.100	27.29.50	27.28—27.31	4	6	—	27.30.22	—	—	—
92	211.011	62.30.24	62.26—62.37	5	10	—	62.29.38	—	—	—
93	211.2$\bar{1}$1	31.23.45	31.23—31.25	3	4	—	31.23.51	—	—	—
94	211.111	18.39	—	1	2	—	18.39.22	—	—	—
95	211.0$\bar{1}$1	81.40.30	81.40—81.41	2	2	—	81.40.28	—	—	—
96	211.1$\bar{1}$0	51.56.30	51.56—51.57	2	6	—	51.57.31	—	—	—
97	211.010	74.17.30	74.16—74.19	2	2	—	74.18.4	—	—	—
98	211.1$\bar{1}$1	44.1	—	1	2	—	44.2.49	—	—	—

Aspetto generale dei cristalli e geminazioni.

I cristalli semplici sono assai meno frequenti dei geminati; tra questi si distinguono quelli in cui il piano di geminazione è una faccia di }110{, e quelli nei quali è una faccia di }130{. Contrariamente a quanto si nota nelle altre cerussiti, la seconda legge non sembra essere, nel minerale sardo, più rara della prima.

Cristalli semplici.

Sono, come dissi, piuttosto rari, e si noti anche come talora sia facile prendere per un cristallo semplice quello che non è se non uno degli individui di un geminato, staccatosi casualmente; però ad evitare un simile errore, staccai io stesso dalla roccia quasi tutti i cristallini semplici misurati, dopo osservazione colla lente di ingrandimento. Sono più piccoli che i geminati, allungati generalmente secondo [x], talora schiacciati, e tabulari secondo }010{. Tra i prismi della forma }okl{ predomina spesso }021{, meno di frequente }011{; tra le piramidi, }111{, }121{, }112{. Le combinazioni sono varie, talora assai ricche di facce; ne danno alcuni esempi interessanti le fig. 1-7 della tav. I.

Cristalli geminati secondo }110{.

Se ne osservano assai di frequente, e mostrano una quasi infinita varietà di aspetti. Per lo più sono geminati per giustaposizione, formati da due individui con piano di geminazione }110{, il quale è anche faccia di contatto (fig. 9, 10, 11, tav. I). L'angolo rientrante ottuso compreso tra (010) e $\underline{(0\bar{1}0)}$ è allora di 62°.46'.38" (secondo Kokscharow 62.45.50).

Talora uno dei due individui è completo alle due estremità dell'asse [x], (fig. 7, tav. II) e allora da una parte si ha l'angolo rientrante ottuso come nei precedenti, e dall'altra, tra $(0\bar{1}0)$ e $\underline{(010)}$, l'angolo rientrante acuto supplementare, 117°.13'.22". Qui le facce $(1\bar{1}0)$ e $\underline{(1\bar{1}0)}$, come pure le $(1\bar{1}1)$ e $\underline{(1\bar{1}\bar{1})}$, coincidono rispettivamente tra loro.

Qualche volta si hanno solo le parti dei due individui che comprendono l'angolo di 117.13.22, e parrebbe, all'esame superficiale, che il contatto avesse luogo secondo un piano poco diverso da una faccia di }130{. Le cose in quest'ultimo caso però non vanno precisamente come fanno vedere le figure teoriche 5, 6 della tav. II; ma uno dei due individui è più sviluppato dell'altro, e il contatto avviene sempre secondo la faccia di geminazione.

Finalmente, più di rado, tutti e due gli individui sono completi ad entrambe le estremità dell'asse [x], e sembrano incrociarsi totalmente, formando un vero geminato compenetrato (fig. 8, tav. I; fig. 12, tav. II); ma anche in questo caso le figure teoriche non sembrano corrispondere perfettamente alla realtà, e pare in generale che uno dei due individui attraversi completamente l'altro, le cui due metà sarebbero legate fra loro dalla sola identità di orientazione, e sempre disposte in modo che il contatto avvenga secondo una faccia di }110{. Questo appare dalla figura 10

della tav. II, in cui procurai di ritrarre fedelmente un bel geminato, senza ridurlo a modello teorico. Il primo individuo forma la massima parte del cristallo; sul davanti appariscono le facce $(\underline{010})$, $(\underline{\bar{1}10})$, $(\underline{\bar{1}\bar{1}0})$, $(\underline{\bar{1}11})$; $(\underline{\bar{1}\bar{1}1})$ del secondo che ricompare poi dall'altra parte del primo, colle facce $(\underline{0\bar{1}0})$, $(\underline{0\bar{2}1})$, $(\underline{1\bar{1}1})$, $(\underline{1\bar{1}0})$, $(\underline{1\bar{1}\bar{1}})$, $(\underline{110})$, $(\underline{111})$, $(\underline{11\bar{1}})$, senza che tra queste sue due parti esista somiglianza, contatto o legame alcuno: sono veramente due piccoli cristallini staccati e indipendenti, ma perfettamente isorientati. Le proprietà ottiche, qualora siano studiate sopra una lamina parallela alla }001{, possono dimostrare ancora più chiaramente la cosa.

Tra questi geminati di due individui secondo una faccia di }110{, sono da notarsi in maniera speciale quelli detti *quarziformi*, che si presentano qui nel modo più spiccato e brillante (fig. 2, tav. II). I due individui sono ancora riuniti secondo una faccia di }110{ che è faccia di contatto; essi sono allungati spesso assai sensibilmente secondo la direzione dell'asse [z], e tanto addossati l'uno all'altro da far sembrare tutto il geminato, un cristallo semplice del sistema esagonale, per la scomparsa delle due facce (010) e $(\underline{0\bar{1}0})$ e per avere così tutti gli angoli della zona verticale tanto simili tra loro, da poterli far ritenere tutti eguali, ad una osservazione superficiale, e formanti un prisma esagono regolare.

Infatti l'angolo $(0\bar{1}0).(\underline{010}) = 62.46.38$; $(110).(010) = 58.36.41$; $(110).(\underline{\bar{1}10}) = 54.26.44$; $(110).(1\bar{1}0) = 62.46.38$. Di più, tra i prismi della forma }okl{, non compare ordinariamente che }021{, con facce sviluppate quanto quelle di }111{, e l'angolo $(021).(010) = 34.40.8$, non appare all'occhio molto diverso dall'angolo $(110).(111) = 35.46.16$. La grossolana rassomiglianza col quarzo aumenta, se si riflette essere in quest'ultimo minerale l'angolo $(2\bar{1}\bar{1}).(100) = 38.13$. Quello che permette di riconoscere con sicurezza questi geminati, anche senza ricorrere al goniometro, si è la fine e densa striatura che presentano costantemente le facce di }021{: scorgonsi infatti striate due delle facce contigue della apparente piramide esagonale, mentre le altre quattro sono perfettamente lisce e brillanti.

Spesso uno dei due individui è un po' più sviluppato dell'altro, e presenta le facce di }010{ e }021{ da ambe le parti di [y] (fig. 3, tav. II); allora è caratteristico il piccolissimo angolo $(3^{\circ}.34'.37'')$ che fa la faccia (021) più o meno stretta, per lo più lineare, sempre striata, con la $(\underline{\bar{1}\bar{1}1})$ ampia e brillante; dall'altra parte del cristallo si ha una simile apparenza, salvo che mentre l'angolo di $3^{\circ}.34'.37''$ fra $(021).(\underline{\bar{1}\bar{1}1})$ è rientrante, quello di eguale valore fra $(\bar{1}\bar{1}1)$ e $(\underline{02\bar{1}})$, è sporgente, e in quest'ultimo caso la faccia lineare è brillante, e la triangolare è striata.

Frequentemente poi tra i due individui sono interposte lamelle di geminazione in numero variabilissimo, aventi alternativamente l'orientazione del primo e del secondo. La fig. 4, tav. II, fa vedere uno di tali geminati, con due lamelle di geminazione. Questi geminati quarziformi presentano qualche rassomiglianza con quelli di Kirlibaba descritti dallo Zepharovich (1).

Talora questi geminati non sono allungati secondo l'asse [z], e allora presentano

(1) *Die Cerussit-Krystalle von Kirlibaba in der Bukowina.* Sitzb. d. Wien. Akad. LXII, 1874, p. 144.

l'aspetto della fig. 1, tav. II che fu disegnata per maggiore chiarezza con un'altra proiezione delle croci assiali, per modo da far vedere sul davanti tutte le facce di un solo individuo; in questa figura, il piano di geminazione e di contatto è il piano degli spigoli che formano il contorno della figura.

Oltre ai geminati di due individui osservai qualche trigemino, secondo la stessa legge. Di questi cristalli, che sono però piuttosto rari, dà un esempio la fig. 9, tav. II. Sono sempre geminati a penetrazione, ma anche qui pare che uno dei tre, il II centrale, attraversi completamente gli altri due, avendosi il contatto sempre secondo le due facce di }110{.

In tali geminati coincidono: la faccia $(\bar{1}10)$ con $(\underline{\bar{1}10})$, $(\bar{1}1\bar{1})$ con $(\underline{\bar{1}11})$, $(\underline{\bar{1}\bar{1}0})$ con $(\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}0}})$, $(\underline{\bar{1}\bar{1}1})$ con $(\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}})$, mentre fra $(\underline{\underline{\bar{1}10}})$ e (110) esiste un angolo rientrante di 8°.19'.54".

Ma il caso più interessante di geminazione polisintetica è offerta dal cristallo disegnato in proiezione parallela nella fig. 8 tav. II, e in proiezione stereografica nella fig. 7, tav. III. Esso è formato da 5 individui, tutti riuniti secondo la stessa legge, come appare dalla proiezione. Tre di questi, I, II, III, formano un complesso analogo al trigemino già descritto (ma rappresentato con altra proiezione delle croci assiali, per cogliere il punto di vista più opportuno) però assai più compenetrato, tanto da simulare quasi un cristallo semplice, e assai analogo a quello di *Nertschinsk* descritto da Kokscharow nella fig. 29, tav. 82 dei *Materialien* ecc., e osservato poi anche da Schrauf nella Cerussite di *Bleiberg* in *Carinzia* (¹). Il I e II non arrivano ad attraversare il III, il quale si prolunga posteriormente (²) con un'ampia faccia striata di }021{.

Il IV si unisce al III pure secondo una faccia di }110{, e compare sul davanti come il II, in modo che II, III, IV senz'altri, formerebbero un trigemino per giustaposizione, come se ne vedono spesso disegnati per l'aragonite. Ma al IV si unisce ancora un V individuo, sempre secondo la stessa legge, e questo non compare anteriormente, ma posteriormente, formando la sua faccia $(\underline{\underline{\underline{\underline{\bar{1}1\bar{1}}}}})$ colla $(\underline{\underline{\underline{0\bar{2}1}}})$ del IV, il solito caratteristico angolo rientrante di 3.34.37, mentre coincidono perfettamente e si fondono in una le loro due facce $(\underline{\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}1}}})$ e $(\underline{\underline{\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}}}})$, che formano con $(\underline{\underline{02\bar{1}}})$ del III un angolo di eguale valore, ma sporgente.

Questo il nucleo centrale, abbastanza facile a decifrare, per mezzo dell'apparenza delle facce e dei piccoli angoli caratteristici tra le facce dei varî individui; tale più grossa parte del cristallo, l'unica che venne rappresentata nel disegno, per non produrre una eccessiva confusione, è unita ad una delle estremità con uno di quei geminati quarziformi prima descritti, e precisamente in modo, che uno dei due individui di questo coincide nella orientazione col II, e l'altro col III del polisintetico. Questo geminato quarziforme, appartiene evidentemente ad una generazione anteriore, ha le facce coperte da un grosso velo di limonite, e su di esso venne a formarsi il grosso cristallo sopra descritto, le cui facce sono tutte brillanti quantunque non sieno tutte affatto piane, e tali da permettere misure di grandissima precisione.

(¹) *Atlas.* ecc., tav. XLII, fig. 26.

(²) Per comodità di linguaggio mi si permetta di usar qui, parlando di cristalli, le espressioni *anteriore* e *posteriore*, riferite alle relative figure delle tavole.

All'intorno poi si formarono dei più piccoli individui, isorientati con l'uno o con l'altro dei 5 grossi formanti il nucleo; questi piccoli individui, spesso ben distinti uno dall'altro, mi aiutarono pure per parte loro a verificare i risultati più sopra esposti.

Un simile quinquegeminato parmi tanto più interessante in quanto che è nuovo per la Cerussite, non essendo noti finora in questo minerale che i soliti trigeminati, e avendosi un solo caso, piuttosto dubbio, di tetrageminato, descritto da Schmidt nella Cerussite di Telekes ([1]).

Nella proiezione stereografica, per facilitare l'intelligenza del disegno della fig. 8, tav. II, descrissi un circoletto intorno ai punti rappresentanti le facce realmente esistenti e visibili nella figura stessa.

I geminati secondo }110{ sono in generale poveri di forme, specialmente poi di piramidi; oltre la }111{, la }121{ è abbastanza comune, rarissime le altre, e si può chiamare una vera eccezione per la sua ricchezza, il grosso e bel geminato rappresentato dalla fig. 7, tav. II.

Lo sviluppo nelle diverse direzioni è variabilissimo: gli individui possono essere allungati secondo [x], secondo [z], tabulari secondo }010{; talora sono tozzi, senza una direzione di prevalente sviluppo.

Non di rado (fig. 11, tav. I; fig. 5, 6, tav. II) ognuno dei due individui è conformato alquanto diversamente da una parte e dall'altra del proprio piano di simmetria }010{; però sempre in modo che il complesso sia simmetrico rispetto al piano di contatto. Questa diversità di conformazione, naturalmente, si riferisce esclusivamente al diverso sviluppo delle facce di una stessa forma, cioè ad una specie di simmetria *apparente*.

Eseguii moltissime misure angolari, di valore approssimativo, allo scopo di stabilire il modo di geminazione, ecc.; tuttavia sembrandomi affatto ozioso ingombrare il lavoro con lunghe serie di risultati numerici inutili, voglio solamente riportare qui le misure eseguite con precisione, su facce piane e splendenti, confrontandone i valori coi calcolati, per far vedere con quale rigorosa esattezza sieno capaci di verificarsi le leggi cristallografiche, ogni volta che la bellezza delle facce sia tale da permetterlo.

Spigoli misurati	Angoli trovati. Medie	Limiti	Numero degli spigoli misurati	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcolati dalle costanti a:b:c = =0.610128:1:0.722929	Differenza positiva	Differenza negativa
$010.\underline{0\bar{1}0}$	62.45	—	1	3	62.46.38	—	1'.38"
$010.\underline{\bar{1}30}$	34.5	—	1	3	34.7.41	—	2'.41"
$010.\underline{\bar{1}\bar{1}0}$	4.9.7	4.8—4.11	4	9	4.9.57	—	0'.50"
$130.\underline{\bar{1}\bar{3}0}$	5.26	—	1	2	5.28.44	—	2'.44"
$012.\underline{0\bar{1}\bar{2}}$	20.23	—	1	3	20.23.47	—	0'.47"
$021.\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}$	3.32.36	3.32—3.33	2	5	3.34.37	—	2'.1"
$111.\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}$	43.35	43.34—43.36	2	6	43.34.27	0'.33"	—
$1\bar{1}0.\underline{0\bar{1}\bar{2}}$	79.49	—	1	2	79.48.7	0'.57"	—

([1]) Loco cit.

Cristalli geminati secondo }130{.

È affatto caratteristica per la cerussite di Sardegna la frequenza dei bellissimi cristalli geminati secondo questa legge; ne vidi parecchi della lunghezza di un centimetro o due.

Primo a riscontrare di tali geminati fu Kokscharow (1) nella località di *Solutoschinsk* in *Siberia*; poi ne furono osservati due da Schrauf, uno di *Rézbánya*, e l'altro di *Leadhills* (2); ma tutti assai poveri di forme. I veri geminati a foggia di cuore furono osservati e descritti nella località di *Diepenlienchen* presso *Aachen*, da Sadebeck (3), ma anche questi di un'estrema povertà di forme. Ne descrissero poi alcuni simili Seligmann per la località di *Friedrichssegen* nel *Nassau* (4), Zettler e Liweh (5) di *Badenweiler* nel *Baden*, e finalmente Schmidt, di Telekes in Ungheria (6), ma sempre rari, e piuttosto poveri.

In quelli di Sardegna, frequentissimi e splendidi, osservai le forme }100{, }010{, }001{, }031{, }052{, }021{, }032{, }011{, }023{, }012{, }102{, }104{, }110{, }120{, }130{, }111{, }121{, }112{, }113{, }114{, }211{, cioè in tutto 21 delle 29 forme osservate nel minerale. Queste sono riunite in combinazioni svariate, nelle quali si nota subito la frequenza della }031{, che manca di rado, e il grande sviluppo delle facce di }130{, le quali non mancano mai, e sono in questi cristalli spesso più ampie di quelle del prisma }110{. Il prisma }011{ è pure costantemente presente, e le sue facce si fanno notare per la loro ampiezza e il loro splendore. Tra le piramidi, merita speciale menzione la }211{, tanto rara negli altri geminati e nei cristalli semplici. La }010{ è raramente più che una faccetta lineare sullo spigolo [031 . $0\bar{3}\bar{1}$].

I cristalli sono sempre geminati per giustaposizione, e la faccia di geminazione è anche piano di contatto; entrambi gli individui sono completi ad una sola estremità dell'asse [x]. Solo in uno o due casi osservai uno degli individui assai sviluppato, terminato alle due estremità, lateralmente al quale sporgevano alcune facce dell'altro individuo, assai piccolo, e profondamente incassato nel primo; ma una minuta osservazione mi permise di riconoscere con sicurezza che anche qui il contatto si faceva internamente secondo una faccia di }130{. Gli individui sono più o meno distintamente sviluppati, ma generalmente sono addossati piuttosto strettamente l'uno all'altro, e la distinzione è segnata da una doccia, qualche volta appena visibile, qualche altra amplissima, formata dalle due facce (130) e $(\underline{\bar{1}\bar{3}0})$. Caratteristico poi è il piccolo angolo rientrante di 5°.28'.44" formato dalle due facce (110) . $(\underline{\bar{1}\bar{1}0})$, per lo più ampiamente sviluppate, come pure quelle di 4°.26'.40", tra (111) e $(\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}})$.

In questi geminati si verifica costantemente quella apparente dissimetria di ognuno degli individui rispetto al proprio piano di simmetria }010{; come si può vedere

(1) *Materialien* ecc., tav. 80, fig. 20, vol. VI, p. 183.
(2) *Ueber Weissbleierz*, Tschermak's Min. Mitth. 1873, p. 203, tav. II, fig. 3, 4.
(3) *Studien aus dem Mineralog. Mus. d. Univ. Kiel.* 3 Pogg. 1875, CLVI, p. 558.
(4) Verh. d. nat-hist. Ver, d. preuss. Rheinl. XXXIII, 31.
(5) *Anglesit.* ecc. loco cit.
(6) *Baryt* ecc. loco cit., tav. III, fig. 3 *a*, 3 *b*.

dalle figure. L'aspetto generale è variabile, ma assai meno che nei geminati secondo }110{; un solo cristallo potei osservare tabulare secondo }001{, quello rappresentato dalla fig. 11, tav. II, nel quale non è tanto evidente il carattere della geminazione, facendo difetto gli angoli rientranti. Tutti gli altri osservati hanno la }001{ poco sviluppata, così da avere dimensioni poco diverse secondo la direzione dell'asse [z], e secondo la direzione di una retta orizzontale normale al piano di geminazione.

Per tal modo vengono ad assumere grossolanamente l'aspetto di un cono a base circolare o alcun poco ellittica, e piuttosto acuto, poichè l'angolo (0$\bar{1}$0).($\underline{010}$) = 122°.42'.6". Con maggiore verità, sia per la doccia (130).($\bar{1}\bar{3}$0) sopra nominata, sia perchè uno dei due individui è in generale sempre un poco più sviluppato dell'altro, la loro forma si potrebbe paragonare alla figura schematica di un cuore, onde il nome di *herzförmige Zwillinge*, già applicato da Sadebeck a quelli di *Diepenlienchen*. Singolare poi è l'aspetto dello splendido cristallino rappresentato dalla fig. 6, tav. III: la doccia anteriore è segnata lateralmente da un rialzo formato a questo modo: la faccia (130) è doppia, e le due metà sono separate da una ripetizione della faccia laterale (1$\bar{3}$0); nella parte posteriore, si nota la straordinaria ampiezza delle facce di }031{; ma queste sono ad un tratto tagliate da una specie di lamina o cresta, appartenente ad entrambi gli individui, la quale si protende all'indietro; le sue facce laterali sono ancora le ripetizioni delle due facce (1$\bar{3}$0) e ($\underline{\bar{1}30}$), parallele tra loro e al piano di geminazione, e il margine superiore e posteriore è tagliato da faccette brillantissime di }011{ e }012{.

Quanto allo sviluppo relativo delle forme prismatiche e piramidali, noteremo che qualche volta le prime hanno tale ampiezza, che mancano le seconde (fig. 1, tav. III); talora invece le une e le altre sono equamente sviluppate (fig. 2, tav. III); più di rado le forme piramidali sono prevalenti (fig. 5, 6, tav. III); abbastanza spesso invece le prismatiche, pure esistendo le altre, hanno facce talmente ampie, che le piramidi si riducono a strette e brillantissime faccettine, cui talora riesce non del tutto facile decifrare (fig. 3, 4, tav. III).

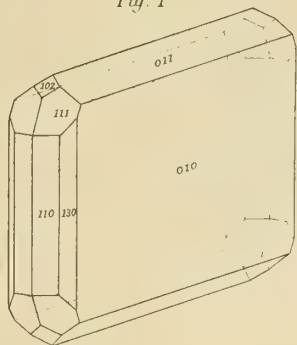
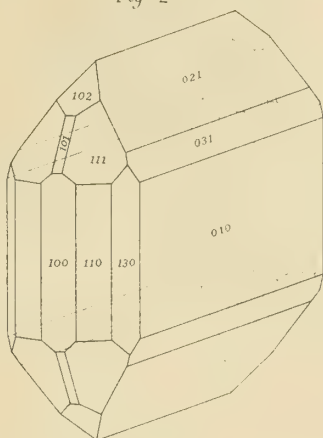
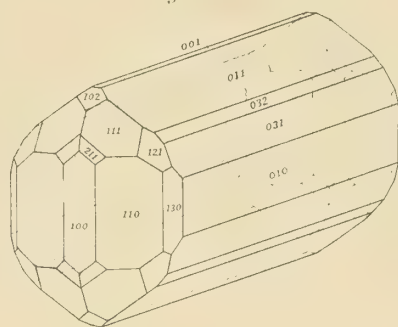
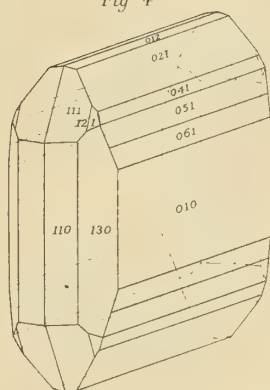
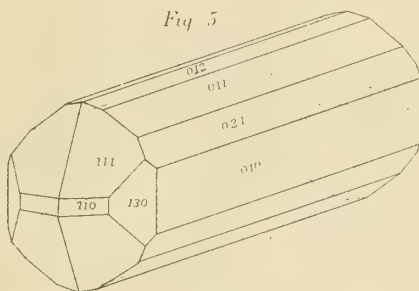
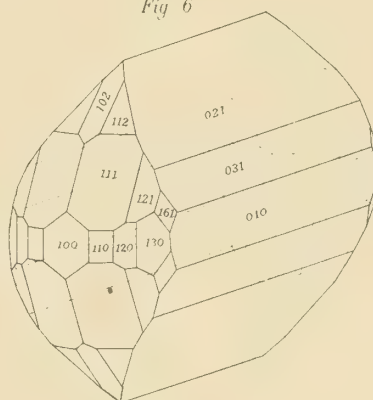
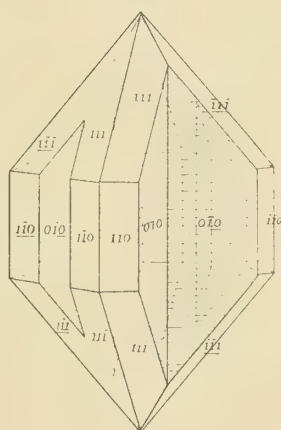
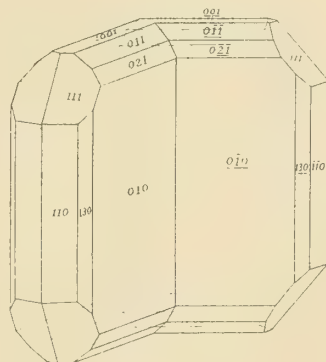
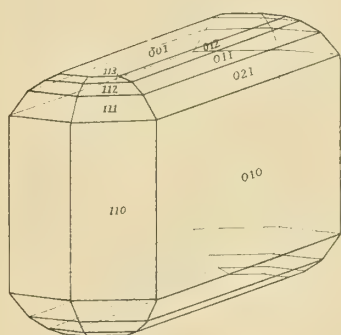
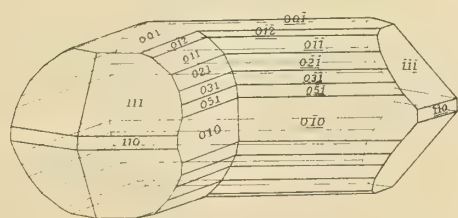
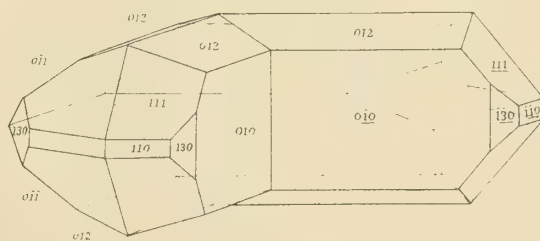
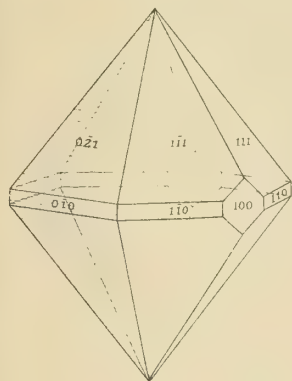
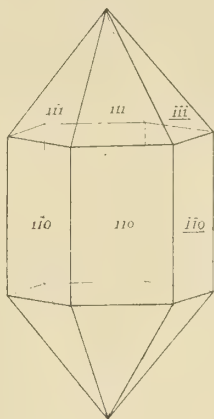
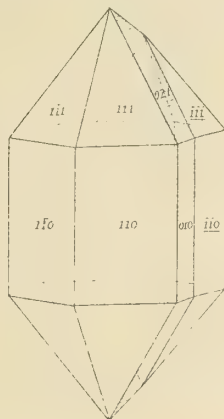
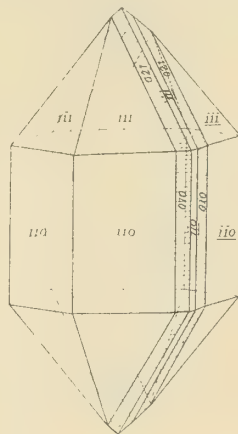
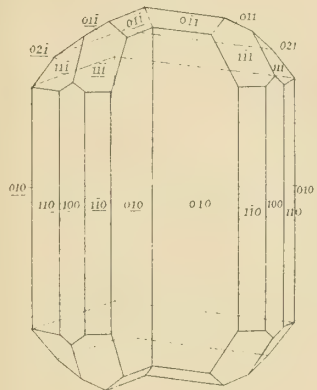
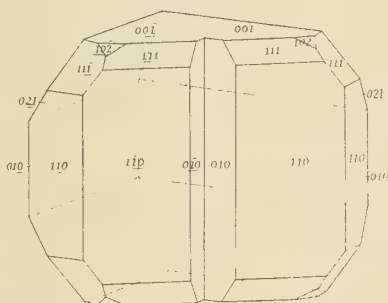
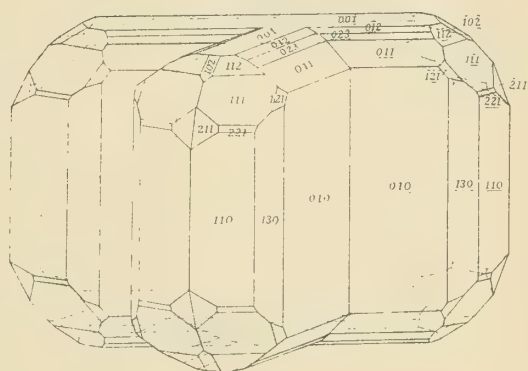
Anche per questi geminati riporterò qui i valori degli angoli misurati tra i due individui, osservando come, non meno che negli altri, la concordanza tra misura e calcolo è assoluta, per quanto si possa desiderare praticamente pure dal cristallografo più scrupoloso.

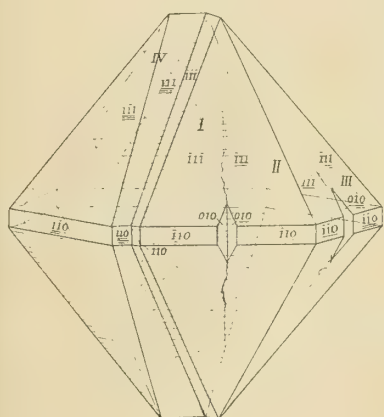
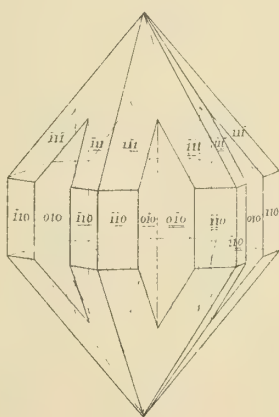
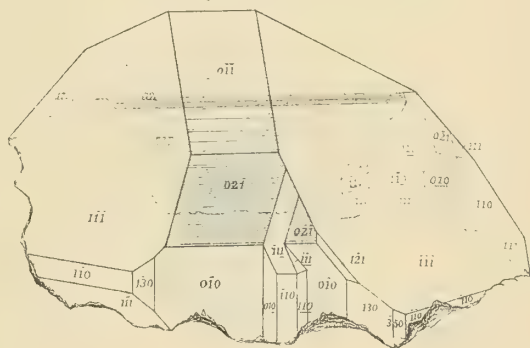
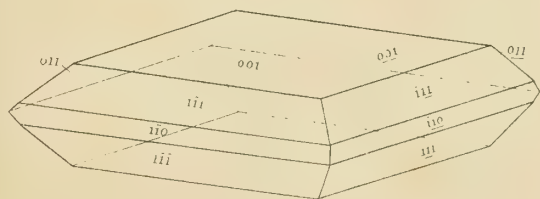
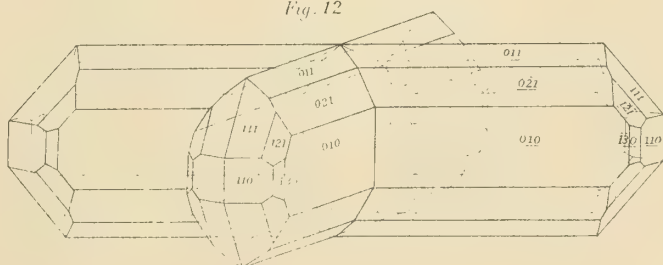
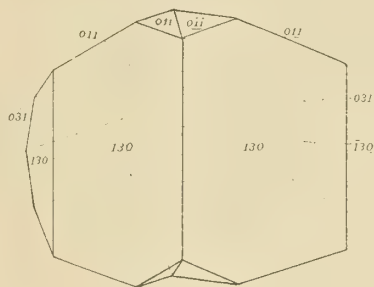
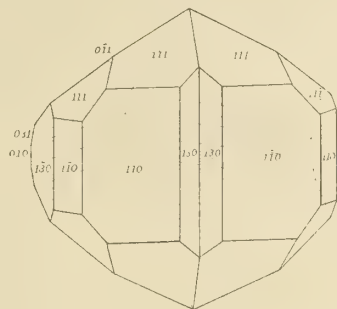
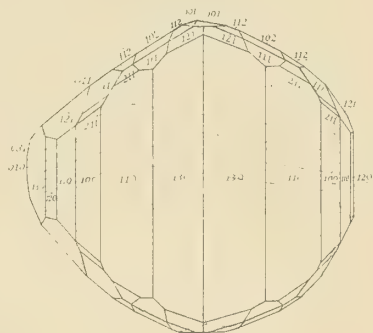
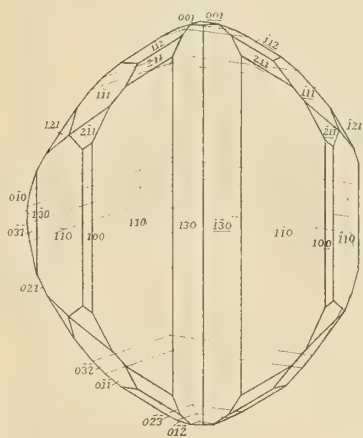
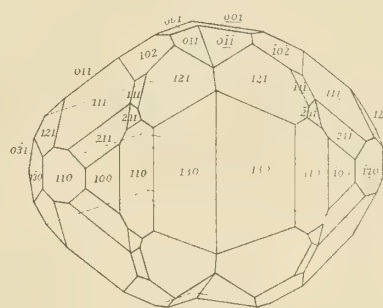
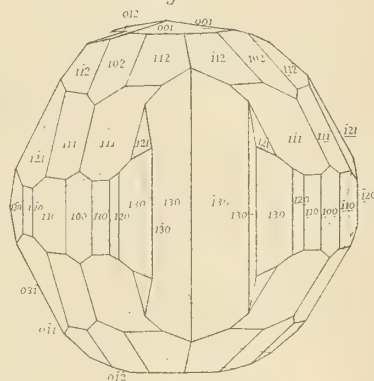
Spigoli misurati	Angoli trovati. Medie	Limiti	Numero degli spigoli misurati	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcolati delle costanti a : b : c = =0.610128:1:0,722929	Differenza positiva	Differenza negativa
110.$\underline{\bar{1}\bar{1}0}$	5°.26'.45"	5°.25'—5°.28'	4	12	5°.28'.44"	—	1'.59"
1$\bar{1}$0.$\underline{0\bar{1}0}$	1.17	—	1	3	1.18.47	—	1'.47"
100.$\underline{\bar{1}\bar{3}0}$	4.00	—	1	2	4.3.9	—	3'.9"
111.$\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}$	4.25	4.23—4.26	4	11	4.26.40	—	1'.40"
112.$\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{2}}$	3.6	—	1	2	3.7.22	—	1'.22"
0$\bar{1}$1.$\underline{01\bar{1}}$	61.53	—	2	5	61.52.48	0'.12"	—

I bei cristalli di svariatissimo aspetto che presenta la cerussite finora descritta provengono dalle geodi della Galena di *Monteponi* e di *Montevecchio* nel territorio d'*Iglesias*. Se i cristalli sono piuttosto rari, frequenti invece sono i soliti aggregati aciculari, fibrosi, fibroso raggiati, o compatti; vidi in un esemplare di *Marganai* numerosi prismetti, piuttosto piccoli, quasi isolati, fortissimamente striati, con facce irriconoscibili e frammisti ad analoghi aciculi di malachite.

Il colore dei cristalli è bianco, talora lievemente roseo; qualche volta essi sono coperti da un velo di limonite che li fa apparire giallicci o iridescenti, e questo avviene in modo speciale per i geminati quarziformi. Essi sono trasparenti, fino a translucidi; un solo esemplare osservai con piccoli trigeminati quasi affatto neri, opachi, con vivo splendore metallico: fatto del resto non nuovo per questo minerale.

Oltre la *galena* e la *malachite*, i minerali che trovai accompagnare questa cerussite sono: *anglesite*, *limonite*, *smithsonite*, *fosgenite*, *leadhillite*; i tre primi sono i più frequenti, ma mentre assai raramente si trovano proprio nella stessa geode colla cerussite l'anglesite, la fosgenite e la leadhillite, vi si nota spesso la limonite, e non è raro vedere numerosi e piccoli cristallini di cerussite piantati direttamente sulla smithsonite.

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11

E. Artini dis. Stab. lit. Bruno e Salomone, Roma

E. Artini dis   Stab. lit. Bruno e Salomone, Roma

RELAZIONE

letta dal Socio G. Strüver, relatore, a nome anche del Socio S. Cannizzaro nella seduta del 3 marzo 1889 sopra la Memoria del dott. Luigi Brugnatelli intitolata: *Studio cristallografico di alcune sostanze organiche.*

« Il dott. Brugnatelli comunica i risultati dei suoi studî cristallografici sopra i seguenti sette composti organici:

1. Ortonitrocinamato etilico.
2. Meta » »
3. Para » »
4. Bibromonitroacetonitrile o acido bibromofulminico.
5. Bijodonitroacetonitrile o acido bijodofulminico.
6. α Aspartato monoetilico.
7. α Asparagina.

« È notevole che i tre primi composti che si distinguono l'uno dall'altro per il posto che vi occupa il gruppo NO_2, appartengono a tre sistemi cristallini diversi, al trimetrico il primo, al monoclino il secondo, al triclino il terzo, a conferma della loro differenza chimica.

« Il quarto e il quinto composto, che differiscono soltanto per la sostituzione del bromo al jodio o *viceversa*, sono ambedue trimetrici e isomorfi fra loro.

« Sui due ultimi corpi l'autore aveva già dato qualche notizia preliminare inserita in un lavoro del Piutti, ma ora ne dà uno studio più completo.

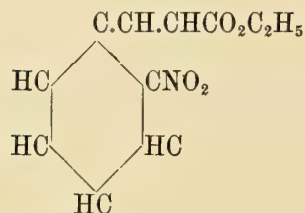
« La Memoria va accompagnata da otto disegni.

« La vostra Commissione propone l'inserzione del lavoro, contenente nuovi e notevoli risultati, nei volumi dell'Accademia ».

Studio cristallografico di alcune sostanze organiche.

Memoria del dott. LUIGI BRUGNATELLI (1).

1. o. *Nitrocinnamato etilico*

```
          C.CH.CHCO₂C₂H₅
         /  \
      HC/    \CNO₂
       |      |
      HC\    /HC
         \  /
          HC
```

Il punto di fusione di questa sostanza, secondo Beilstein e Kuhlberg è a 42° mentre secondo Bayer è a 44°; secondo le mie osservazioni sarebbe a 43°-44°. I cristalli studiati furono ottenuti dall'alcool.

Sistema cristallino: Rombico

a:b:c = 1.0346:1:0.5468

Forme osservate {100}.{001}.{110}.{101}.{111}

Combinazioni {100}.{110}.{111}.{101}.{001} fig. 1ª

{110}.{001}.{111}.{101}

{110}.{001}.{111} fig. 2ª

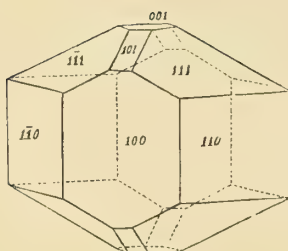



fig. 1ª

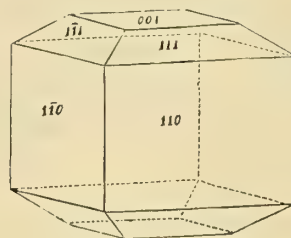



fig. 2ª

La combinazione prima fig. 1ª è la più frequente. È degno di nota che le facce del macropinacoide sono o molto sviluppate o mancano affatto dando così ai cristalli i due aspetti ben distinti presentati dalle figure 1ª e 2ª.

(1) Dal laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pavia.

	Valori osservati	limiti	n	valori calcolati
(001):(111)	37.°15′	37.°8′ — 37.°20′	10	*
(101):(111)	25. 48	25. 33 — 25. 55	10	*
(100):(110)	45. 59	45. 52 — 46. 9	8	45. 58
(001):(101)	61. 54	61. 45 — 62. 10	4	62. 8½
(110):(111)	52. 37	52. 17 — 53.	6	52. 45
(111):($\bar{1}$11)	49. 44	49. 28 — 49. 58	6	49. 45½

I cristalli sono di colore giallo chiaro e trasparenti.

La sfaldatura è perfetta parallelamente a }001{.

Il piano degli assi ottici è parallelo a }100{ e la prima bisettrice è parallela all'asse cristallografico C.

Doppia rifrazione molto energica e negativa, quindi formola ottica $\mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \underline{\mathfrak{a}}$

$$2\,E_a = 57.°55'\ (Li)$$
$$= 57.°40'\ (Na)$$

Questa sostanza fu già determinata cristallograficamente da Haushofer (*Zeitschrift für Min. und Kryst. vol. 3. p. 74*). Questi orientò i cristalli in modo che i suoi assi *a* e *c* corrispondono rispettivamente ai miei *c* ed *a*. Inoltre credo opportuno notare che il rapporto parametrale dato da Haushofer:

$$a:b:c = 0.5245:1:0.8651$$

è inesatto. Infatti dai suoi angoli fondamentali

$$(111):(11\bar{1}) = 49.°39' \qquad (111):(\bar{1}11) = 106.°58' \text{ si calcola}$$

$$a:b:c = 0.5247:1:1.0043$$

2. m. *Nitrocinnamato etilico*

$$\text{C.CH.CHCO}_2\text{C}_2\text{H}_5$$

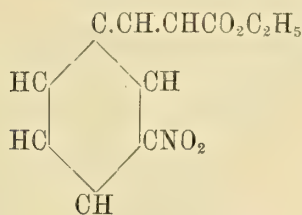
```
        C.CH.CHCO2C2H5
         /\
   HC/      \CH
     |       |
   HC|       |CNO2
      \     /
       \  /
        CH
```

Punto di fusione 78°-79° (Schiff.). Cristalli dall'Acido acetico.

fig. 3ª

Sistema cristallino: Monoclino
a:b:c = 1.0496:1:0.3309
$\beta = 76.°13'$
Forme observate: }110{.}011{.}111{ e raramente }100{

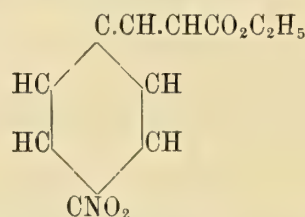
	Valori osservati	limiti	n	valori calcolati
(110):(Ī10)	88.°54′	88.°42 — 88.°58′	7	*
(110):(011)	67. 50	67. 45 — 67. 58	8	*
(011):(0Ī1)	35. 38	35. 27 — 35. 52	6	*
(100):(011)	76. 54	76. 47 — 77. 1	2	76.°53½′
(110):(1Ī0)	91. 5	90. 50 — 91. 12	6	91. 6
(110):(111)	57. 45	57. 34 — 58. 4	4	57. 56½
(100):(111)	61. 37	61. 23 — 61. 46	3	61. 35
(011):(111)	15. 3	14. 48 — 15. 20	4	15. 20
(111):(1Ī1)	31. 53	31. 45 — 32. 18	6	32. 6½

Cristalli lunghi e sottili, incolori, trasparenti.

Sfaldatura: La sottigliezza dei cristalli rese impossibile lo stabilire con sicurezza le direzioni di sfaldatura, pare però che ne esista una parallela a }100{.

Il piano degli assi ottici è normale al piano di simmetria.

La prima bisettrice è nell'angolo acuto β degli assi e notevolmente inclinata sull'asse *c*.

3. p. *Nitrocinnamato etilico*

Punto di fusione 138.°5 (Beilstein e Kuhlberg). Cristalli dall'etere acetico.

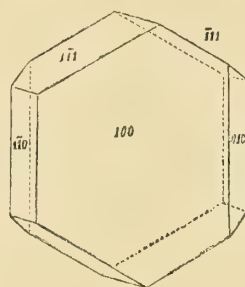



fig. 4ª

Sistema cristallino: Triclino
a:b:c = 1.3925:1:0.4795
$\alpha = 85.°59'$ $\beta = 90.°22'$ $\gamma = 75.°20'$
Forme osservate: }100{.}010{.}1Ī0{.}1Ī1{.}Ī11{

Tutti i cristalli presentano la combinazione di queste forme.

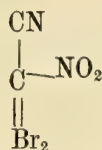
	Valori osservati	limiti	n	valori calcolati
(100):(0$\bar{1}$0)	75.°16′	74.°59 — 75.°25′	9	*
(100):($\bar{1}$11)	112. 56	112. 43 — 113. 8	8	*
(100):(1$\bar{1}$1)	66. 2	65. 43 — 66. 15	6	*
(0$\bar{1}$0):($\bar{1}$11)	115. 56	115. 54 — 115. 58	4	*
(0$\bar{1}$0):(1$\bar{1}$1)	58. 1	57. 48 — 58. 14	6	*
(100):(1$\bar{1}$0)	45. 11	45. 7 — 45. 18	7	45.°7′
(1$\bar{1}$0):(0$\bar{1}$0)	30. 5	29. 52 — 30. 19	6	30. 9
(1$\bar{1}$1):($\bar{1}$11)	68. 28	68. 19 — 68. 40	3	68. 20
($\bar{1}$11):($\bar{1}$10)	58. 38	58. 37 — 58. 39	3	58. 19
($\bar{1}$11):(010)	64. 2	64. 0 — 64. 4	2	64. 4
(1$\bar{1}$1):(010)	121. 58	121. 55 — 122. 3	2	121. 59
(1$\bar{1}$0):(1$\bar{1}$1)	52. 59	52. 50 — 53. 3	3	53. 21

Cristalli di color giallo paglierino chiaro, tabulari secondo }100{.

Parallelamente a questa faccia esiste una sfaldatura incompleta.

Una direzione di estinzione fa della faccia (100) e collo spigolo [100:010] * un angolo di circa 14°. Sopra di essa si scorge l'imagine di un'asse ottico ed un marcato pleocroismo dall'incolore al giallo paglierino.

4. *Bibromonitro acetonitrile* o *Acido bibromofulminico*

$$\begin{array}{l} CN \\ | \\ C-NO_2 \\ \| \\ Br_2 \end{array}$$

Punto di fusione 50°. I cristalli furono preparati dal dottore G. Bertoni che li ottenne dall'alcool. Essi emettono dei vapori irritantissimi talchè il loro studio è reso assai difficile.

Sistema cristallino: Rombico

a:b:c = 0.6188:1:0.4781

In tutti i cristalli si osservano le seguenti forme:

}010{.}110{.}011{.}021{

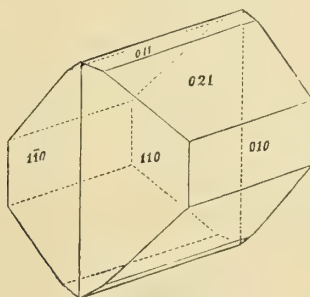



fig. 5ª

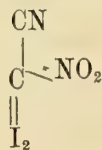
	Valori osservati	limiti	n	valori calcolati
(010):(110)	58.°15′	58.°3′ — 58.°36′	9	*
(010):(021)	46. 17	46. 3 — 46. 37	10	*
(011):(0$\bar{1}$1)	50. 39	50. 17 — 51. 10	6	51.°6′
(011):(021)	18. 30	18. 16 — 18. 50	6	18. 39
(110):(021)	68. 37	68. 10 — 68. 52	9	68. 40½
(110):(1$\bar{1}$0)	63. 36	63. 13 — 63. 50	6	63. 30
(110):(011)				77. 7

I cristalli hanno un colore verde palidissimo e sono trasparenti se preparati di recente.

Non havvi alcuna sfaldatura perfetta; ne esiste però una incompleta secondo }010{ ed una secondo }011{.

Il piano degli assi ottici è parallelo a }001{. La prima bisettrice coincide coll'asse cristallografico *a* ed è positiva, quindi si ha la formola ottica: $\underset{+}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. Sulle faccie dei prismi si osserva l'imagine di un asse ottico, poco discosta dal centro del campo visivo.

5. *Bijodonitro acetonitrile* o *Acido bijodofulminico*

$$\begin{array}{l} CN \\ | \\ C{<}NO_2 \\ \| \\ I_2 \end{array}$$

I cristalli furono ottenuti dal dott. G. Bertoni dal cloroformio.

A 70 gradi diventano gialli a 86° rosso-bruni ed a 170° scomponesi la sostanza completamente con sviluppo di Iodio. I cristalli si alterano molto facilmente anche alla temperatura ordinaria, perdendo la trasparenza e diventando bruni.

Sistema cristallino: Rombico: isomorfo col precedente.

a:b:c = 0.6204:1:0.4857

Forme osservate: }110{.}010{.}011{.}021{.

Tutti i cristalli presentano la combinazione di queste forme (fig. 6).

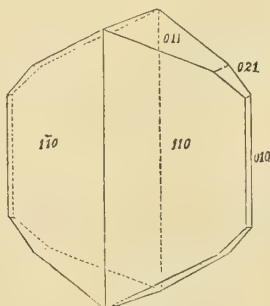



fig. 6ª

	Valori osservati	limiti	n	valori calcolati
(110):(1$\bar{1}$0)	63.°38′	63.°20′ — 63.°46′	8	*
(110):(011)	76. 41	76. 32 — 76. 48	8	*
(110):(021)	68. 31	68. 15 — 68. 37	8	68.°27′
(010):(021)	45. 44	45. 26 — 45. 58	3	45. 50
(011):(021)	18. 13	18. 1 — 18. 24	7	18. 16

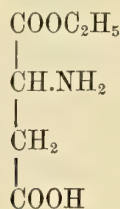
Cristalli di color giallo chiaro, trasparenti se preparati recentemente.

Sfaldatura facile secondo {010}; imperfetta secondo {011}.

Il piano degli assi ottici è parallelo a {001} e la bisettrice acuta coincide coll'asse cristallografico *a*.

Da ciascuna delle faccie del prisma emerge normalmente un asse ottico (luce ordinaria). L'angolo degli assi ottici è quindi uguale all'angolo del prisma e cioè:

$$2\,Va = 63.°38'$$

6. *α-Aspartato monoetilico*

A 165° la sostanza si fonde con decomposizione. I cristalli furono ottenuti dall'acqua dal prof. Piutti (Vedi *Ricerche fatte nel laboratorio di Chimica Farmaceutica della R. Università di Sassari* p. 9 *Sassari 1888*).

Sistema cristallino: Monoclino

a:b:c = 1.8822:1:1.1783

β = 82.°15

Forme osservate: {100}.{001}.{110}.{$\bar{1}$01}

Combinazioni: {100}.{001}.{110}

{100}.{001}.{110}.{$\bar{1}$01} fig. 7

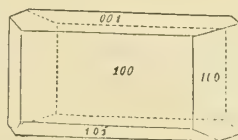



fig. 7ª

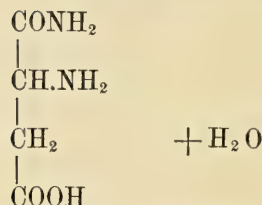
	Valori osservati	limiti	n	valori calcolati
(100):(001)	82.°15′	82.°6′ — 82.°25′	9	*
(100):(110)	61. 48	61. 22 — 61. 58	18	*
($\bar{1}$00):($\bar{1}$01)	63. 38	63. 12 — 63. 44	8	*
(110):(001)	86. 18½	85. 58 — 86. 36	8	86.°21′
($\bar{1}$10):($\bar{1}$01)	77. 53	77. 40 — 78. 2	6	77. 53
(001):($\bar{1}$01)	34. 5	33. 50 — 34. 20	6	34. 7

Cristalli incolori, trasparenti, tabulari secondo {100}.

Sfaldatura perfetta secondo {100}.

Il piano degli assi ottici è normale a {010}. La bisettrice acuta è nell'angolo ottuso β degli assi cristallografici. Doppia rifrazione energica e positiva.

7. *α-Asparagina*

$$\begin{array}{l} CONH_2 \\ | \\ CH.NH_2 \\ | \\ CH_2 \qquad + H_2O \\ | \\ COOH \end{array}$$

Questa sostanza, come la precedente, fu preparata dal prof. Piutti, che gentilmente me la concesse per lo studio cristallografico.

« I cristalli furono ottenuti pel raffreddamento della soluzione acquosa: essi non presentano un punto di fusione, ma si fanno opachi dai 118° ai 120°, cominciano ad ingiallire sopra 200° e mostrano un massimo di scomposizione dai 213° ai 215°. Il residuo annerisce, ma non fonde neppure scaldato ai 300° » (Piutti, loc. cit. p. 11).

Sistema cristallino: Triclino

$a:b:c = 1.3039:1:0.6062$

$\alpha = 93.°38'$ $\beta = 115.°24$ $\gamma = 83.°40'$

Forme osservate: }100{.}001{.}010{.}110{.}$\bar{1}\bar{1}$1{.

Quasi tutti i cristalli presentano la combinazione di queste cinque forme (fig. 8). Rare volte manca }$\bar{1}\bar{1}$1{.

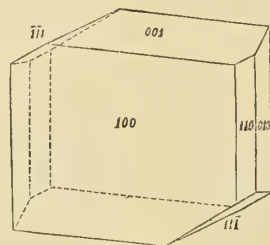



fig. 8ª

	Valori osservati	limiti	n	valori calcolati
(100):(010)	95.°18′	94.°59 — 95.°36′	12	*
(100):(001)	64. 49	64. 46 — 64. 51	6	*
(010):(001)	88. 59	88. 58 — 89	4	*
($\bar{1}$00):($\bar{1}\bar{1}$1)	90. 32	90. 22 — 90. 36	6	*
(0$\bar{1}$0):($\bar{1}\bar{1}$1)	61. 32	61. 20 — 61. 48	6	*
(100):(110)	52. 45	52. 29 — 53. 1	10	52.°50′
(010):(110)	42. 27	42. 10 — 42. 38	9	42. 28
(001):(110)	72. 30	72. 22 — 72. 40	5	72. 23
(001):($\bar{1}\bar{1}$1)	39. 37	39. 30 — 39. 40	4	39. 39
($\bar{1}\bar{1}$0):($\bar{1}\bar{1}$1)	67. 51	67. 46 — 67. 54	4	67. 58
(100):($\bar{1}\bar{1}$1)	89. 28	89. 26 — 89. 32	4	89. 28

Cristalli incolori, trasparenti, generalmente di abito tubulare secondo }100{.

Una direzione di estinzione fa sopra (100) e verso sinistra, collo spigolo (100):(110) un angolo di circa 17° (Na). Coll'apparecchio di polarizzazione, a luce convergente, si scorge sulla stessa faccia l'imagine assiale ottica all'estremità del campo visivo. Doppia rifrazione non molto energica.

RELAZIONE

letta dal Socio P. Blaserna, relatore, a nome anche del Socio G. Govi, nella seduta del 6 gennaio 1889 sopra la Memoria del dott. Angelo Battelli, intitolata: *Sul fenomeno Peltier a diverse temperature e sulla sua relazione col fenomeno Thomson.*

« W. Thomson applicando ai fenomeni termoelettrici i principî della termodinamica ha trovato due formole, che rappresentano i due teoremi fondamentali di questa per tale caso speciale. Queste formole contengono un integrale che fu risoluto mediante una semplice ipotesi immaginata dal Tait. Il dott. Battelli, completando il lavoro di altri sperimentatori, ha voluto esaminare in modo più speciale, se la seconda delle formole Thomson, colla semplificazione introdottavi dal Tait, si verifica sperimentalmente.

« Egli ha esaminato dette coppie termoelettriche per temperature che vanno da 0° a 200° ed anche a 250°. Il metodo da lui adoperato concorda nei punti essenziali con quello immaginato dal Naccari per lo stesso studio; se non che egli lo ha modificato per determinare con esso dei valori assoluti, mentre il Naccari l'aveva impiegato soltanto per ottenere misure relative. Forse nel misurare le temperature mediante coppie termoelettriche, egli avrebbe potuto tener conto delle avvertenze fatte dal prof. Righi in una recente circostanza analoga. Però il lavoro del dott. Battelli è coscienzioso e conduce a risultati che s'accordano colle formole teoriche in modo molto sodisfacente. Egli conclude che la seconda formola del Thomson, modificata dal Tait, può considerarsi come perfettamente verificata, e che le costanti osservate da questa formola s'accordano abbastanza bene con quelle, che si hanno dalla prima formola del Thomson.

« I Commissari credono quindi di poter proporre l'inserzione della Memoria del dott. Battelli negli Atti accademici ».

Sul fenomeno Peltier a diverse temperature e sulle sue relazioni col fenomeno Thomson.

Memoria del dott. ANGELO BATTELLI.

(Con una tavola).

È di grande importanza la ricerca dei valori del fenomeno Peltier a diverse temperature, perchè la conoscenza di essi serve alla verificazione della teoria della termoelettricità.

Si sa che fino dal 1854 il Thomson [1] applicando i principî generali della termodinamica allo studio della forza elettromotrice prodotta da differenza di temperatura in un circuito di differenti metalli, e a quello degli effetti termici della corrente elettrica circolante in esso, giunse a stabilire che la forza elettromotrice E di una coppia termoelettrica, le cui congiunzioni fossero alle temperature T_1 e T_2 era data da

$$E = J \left\{ c_1 - c_2 + \int_{T_2}^{T_1} (\sigma_1 - \sigma_2)\, dT \right\} \qquad (1),$$

rappresentando con J l'equivalente meccanico del calore, con c_1 e c_2 le quantità di calore assorbite e sviluppate rispettivamente alle due congiunzioni dall'unità di corrente nell'unità di tempo, e con $\sigma_1\, dT$ e $\sigma_2\, dT$ le quantità di calore assorbite e sviluppate nei due metalli, pure nell'unità di tempo, dall'unità di corrento che passa da una regione alla temperatura T ad un'altra alla temperatura $T + dT$.

Nell'istesso tempo egli dimostrò che doveva aversi

$$\frac{c_1}{T_1} - \frac{c_2}{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{T}\, dT = 0 \qquad (2).$$

Il Tait nel 1870 [2] completò la teoria del Thomson ammettendo che la quantità σ fosse proprorzionale alla temperatura assoluta della sezione considerata.

Allora sostituendo a σ_1 e a σ_2 i valori

$$\sigma_1 = \beta_1 T \qquad e \qquad \sigma_2 = \beta_2 T \qquad (3),$$

[1] Trans. of the Roy. Societ. vol. XXI, I, p. 135.

[2] Proced. of the Roy. Soc. of Edimb., dec. XIX (1870).

dove β_1 e β_2 sono due costanti, si ricavano dalla (1) e dalla (2) le espressioni:

$$E = A(T - T')\left(T_0 - \frac{T + T'}{2}\right) \tag{4}$$

$$C = \frac{A}{J}(T_0 - T)\,T \tag{5}$$

essendo $A = (\beta_2 - \beta_1)\,J$, ed essendo T_0 la temperatura a cui si annulla c.

La verificazione sperimentale dell'ipotesi espressa dalle equazioni (3) venne fatta da me [1] con metodo diretto sopra varî metalli, cioè sul cadmio, sull'antimonio, sul bismuto, sul pakfong, sul bismuto di E. Becquerel, sul piombo, sul nichel; e soltanto il *ferro* mostrò una piccola divergenza, poichè in esso il valore di σ cresce più rapidamente che la temperatura assoluta, cosa che fu verificata in seguito anche dal Tait [2].

L'equazione (4) è stata dimostrata vera dalle esperienze dell'Avenarius [3] e da quelle dello stesso Tait [4] per i metalli semplici, e da me [5] per le leghe e per le amalgame.

Per una completa verificazione della teoria rimane a provare sperimentalmente l'equazione (5), non essendosi fatte all'uopo finora che rare e poco estese ricerche.

Le Roux [6] fu il primo a studiare direttamente l'intensità del fenomeno Peltier in una coppia bismuto-rame a temperature diverse. L'apparecchio da lui usato consisteva in un recipiente che faceva l'ufficio di bagno d'aria, nel quale erano collocati due calorimetri di lamina d'acciaio levigata all'esterno, e contenenti ciascuno due chilogrammi di mercurio. In questi calorimetri erano immersi due tubi di rame, nei quali scendevano le due branche dell'asta di bismuto piegata a ferro di cavallo, e saldata al fondo dei due tubi mediante una lega facilmente fusibile. Gli spazi annulari compresi fra l'asta e i tubi di rame erano pieni di petrolio. Ai tubi di rame erano congiunti dei fili di rame che servivano a condurre la corrente, e all'esterno i tubi stessi erano stati anneriti con acido nitrico e rivestiti con un grosso strato di vernice di gomma lacca, per proteggerli dal mercurio in cui erano immersi. Le Roux faceva passare la corrente attraverso alla coppia per 15 minuti primi in una direzione poi nell'altra: cosicchè chiamando P la quantità di calore sviluppata o assorbita a ciascuna congiunzione in virtù del fenomeno Peltier, Q e Q′ le quantità di calore Joule comunicate ai due calorimetri, k un coefficiente di proporzionalità, θ la differenza di temperatura prodotta nei due calorimetri per il passaggio della corrente, si aveva

$$2P + Q - Q' = k\theta\,;$$

[1] Atti dell'Acc. delle sc. di Torino, vol. XXII, p. 48 e p. 539. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. III, fasc. 5°, 1° sem., p. 212, e fasc. 4°, 2° sem., p. 105.

[2] Proced. of the Roy. Soc. of Edimb. Mar. 1888, p. 127.

[3] Poggen. Ann., anno CXIX, p. 406; e CXXII, p. 193.

[4] Trans. of. the R. Society of. Edimb., vol. XXVII, I, p. 125.

[5] Mem. dell'Acc. delle sc. di Torino, vol. XXXVI, p. 487; e Atti dell'Ist. veneto di sc., lettere ed arti, vol. V, ser. 4ª, p. 1134; e Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. III, fasc. 1°, 2° sem. p. 37.

[6] Ann. de chim. et phys. (4), X, 201.

e dopo invertita la corrente rimanendo però costante la sua intensità:

$$2P - Q + Q' = k\theta'.$$

Sommando e dividendo per 4, Le Roux otteneva il valore dell'effetto Peltier. Ma egli non fece che una determinazione alla temperatura ordinaria ed un'altra a 100° quindi non poteva discutere la formula (5).

Nell'anno 1877 ripresero lo studio del fenomeno Peltier a diverse temperature i prof. Naccari e Bellati ([1]), usando un apparecchio il quale nel concetto fondamentale assomiglia a quello di Le Roux, ma ne differisce nei particolari, perchè essi si spinsero fino a temperature più elevate.

Essi riuscirono a verificare pienamente la formula (5), con divergenze abbastanza piccole fra i dati dell'esperienza e del calcolo, per modo da non poterle addebitare ad inesattezza della teoria del Thomson e del Tait.

Due anni dopo il prof. Bellati diede alla luce la relazione di altre esperienze ([2]) eseguite sulla coppia ferro zinco, colle quali egli determinò in valore assoluto l'effetto Peltier nella coppia stessa, soltanto alla temperatura di circa 14°; esprimendo l'intenzione di fare in seguito delle ricerche sull'andamento del fenomeno in funzione della temperatura. Però sembra che egli abbia per ora abbandonato l'argomento.

Dal 1882 al 1884 il Campbell pubblicò due Memorie ([3]) sopra il cangiamento dell'effetto Peltier dovuto alla variazione della temperatura. Ma egii sebbene abbia studiato un discreto numero di coppie, non ha però determinato in esse il valore assoluto dell'effetto Peltier; nè lo si può ricavare dai risultati che egli riferisce nelle sue Memorie. E del resto ciò non sarebbe stato possibile con l'apparecchio da lui usato; poichè egli formava la coppia da studiare con una lamina del primo metallo piegata ad arco, all'estremità della quale saldava due lamine del secondo metallo; che poi egli per mezzo dei fili poneva in comunicazione coll'elettromotore; e da ultimo, in due incavi che praticava nel luogo delle due congiunzioni della coppia, inseriva le estremità opposte di una pila termoelettrica la quale aveva nel suo circuito un galvanometro. Inoltre siccome egli sperimentò a due sole temperature: quella dell'ambiente e quella di 99° circa, i suoi risultati non servono neppure a dare una idea ben chiara del modo in cui varia l'effetto Peltier in funzione della temperatura.

Pochi anni dopo il Gore ([4]) diede relazione di ricerche simili da lui eseguite sopra l'effetto Peltier a differenti temperature. Egli faceva passare la corrente attraverso ad una pila termoelettrica per un certo tempo, e poi sospendeva la corrente, e metteva la pila termoelettrica in comunicazione con un galvanometro e ne osservava la deviazione.

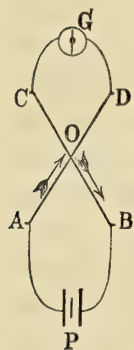
Siccome però conformemente al Campbell, egli sperimentò a due sole temperature, le sue esperienze non possono servire per conoscere il vero andamento dell'effetto Peltier. Ciò che maggiormente interessa nel lavoro del Gore, si è l'avere studiato il valore dell'effetto Peltier prodotto separatamente nel caso del riscaldamento

([1]) Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti (5), V, p. 23.

([2]) Ibid. (5), V, p. 573.

([3]) Proced. of the R. Society of Edimb. vol. XI (1882-83) p. 807; e 1883-84 p. 293.

([4]) Philos. Mag. V, ser. 21ª (1886), p. 349.

e in quello del raffreddamento. A tal uopo egli faceva passare la corrente per 30 secondi circa attraverso al circuito AOBP formato dai due fili AD e CB saldati in croce, mentre lasciava aperto il circuito CODG; indi apriva il primo circuito e chiudeva subito il secondo. Ripeteva poi l'operazione colla corrente nel senso opposto; egli ottenne per lo più che il riscaldamento prodotto nella saldatura dalla corrente in una direzione era uguale in valore assoluto al raffreddamento prodotto dalla corrente diretta nel senso apposto; eccetto che nella coppia ferro-pakfong, in cui si ottenne sempre riscaldamento sia che la corrente andasse in un senso, sia che andasse nell'altro. V'ha inoltre da notare nello stesso lavoro di Gore il risultato ottenuto sulla coppia argento-antimonio, nella quale il riscaldamento ed il raffreddamento prodotti a 12° furono uguali a quelli prodotti a 95°, e il risultato ottenuto sulla coppia sopracitata di ferro e pakfong, nella quale il calore sviluppato nella congiunzione quando la corrente andava dal pakfong al ferro, fu all'incirca lo stesso alla temperatura di 10° e a quella di 90°. Su questi risultati dovrò tornare in seguito.

Venne l'anno scorso alla luce una Memoria sopra il fenomeno Peltier a diverse temperature, dei signori Skobelzyn e Zinserling [1], i quali studiarono la coppia ferro-rame fra 0° e 100°. Il loro apparecchio consiste in due cilindri di rame a pareti piuttosto grosse, dentro i quali venivano collocate rispettivamente le estremità di una pila formata di quattro coppie ferro-rame. I due cilindri erano poi perfettamente chiusi e messi in comunicazione con due tubi che facevano parte di un particolare termometro differenziale molto sensibile. La descrizione dell'apparecchio mostra che essi non potevano ottenere valori assoluti dell'effetto Peltier; ma essi studiarono l'effetto relativo a parecchie temperature in modo da poter segnare una curva che ne indicasse bene l'andamento. Ora, tale curva non sarebbe riuscita una parabola, ma avrebbe avuto fra 0° e 100° prima un minimo e poi un massimo discretamente lontani dalla parabola che si sarebbe descritta, usando le costanti termoelettriche spettanti alla coppia ferro-rame. Come si vedrà, nello studio della stessa coppia io non ho riscontrato l'andamento che trovarono i sigg. Skobelzyn e Zinserling.

Da ultimo H. Jahn [2] determinò il valore assoluto dell'effetto Peltier in alcune coppie, ma solamente a 0°, usando il calorimetro Bunsen.

Dalla breve esposizione che ho fatta dei lavori precedenti apparisce chiaramente che non si hanno ancora dati sperimentali sufficienti per stabilire in modo generale come varii il fenomeno Peltier al cambiare della temperatura, nè per decidere se l'equazione (5) sia vera. Perciò ho creduto molto utile l'accingermi a queste ricerche.

L'apparecchio da me adoperato consisteva in due piccoli calorimetri collocati in un'ambiente che si poteva mantenere a temperatura costante, nei quali andavano a pescare le due congiunzioni della coppia in istudio. I due calorimetri erano costituiti da due tubetti da saggio uguali, a pareti sottilissime, lunghi circa 30 centimetri e

[1] Giornale della Soc. fisico-chimica russa all'Università di S. Pietroburgo. Tomo XIX, n. 4, p. 121 (1887).

[2] Wied. Ann., XXXVI, p. 755, (1888).

del diametro interno di 15 mm.; in essi veniva versato mercurio ben pulito, fino all'altezza di circa 3 cm. Questi due tubi erano fissati superiormente ad un tappo di sughero, passando a sfregamento duro attraverso a due fori in esso praticati; il tappo alla sua volta chiudeva la bocca della stufa in cui erano immersi i tubi stessi. Fra i due tubi poi erano collocate due lastrine di latta larghe due centimetri circa e distanti fra loro circa 3 mm., mentre la distanza fra ciascuna di esse era pure rispettivamente di 3 mm.; in tal modo veniva evitato lo scambio del calore per irraggiamento fra i due tubetti. Inoltre il tappo di sughero fu spalmato da ogni parte con vernice di biacca e minio affinchè chiudesse meglio la bocca della stufa specialmente ad alte temperature. La stufa era costituita da un grosso cilindro di ferro a pareti molto spesse, del diametro interno di circa 18 centimetri e chiuso da ambo le parti.

Attraverso ad un foro praticato nella base superiore, passava un secondo cilindro del diametro interno di circa 5 centimetri, chiuso inferiormente e aperto superiormente per potervi collocare il tappo che portava i due tubetti. Il tappo stesso lasciava penetrare in questo cilindro un termometro diviso in gradi il cui bulbo arrivava all'altezza del fondo dei calorimetri, e che era stato precedentemente confrontato col termometro ad aria: di tratto in tratto però durante il corso delle esperienze ne riscontravo il punto 100. Per mezzo di un secondo foro nella parete superiore del primo cilindro, il quale veniva poi chiuso con una vite, si poteva versare nello spazio annulare un liquido che desse bollendo la temperatura che si voleva ottenere nella stufa. I vapori prodotti dall'ebollizione entravano in un tubo che partiva dal grosso cilindro, e che era circondato da un refrigerante, costituito da un semplice tubo di latta in cui scorreva continuamente dell'acqua fredda; cosicchè i vapori condensati ricadevano nel cilindro stesso. Per tal modo nel cilindro interno, ove si trovavano i due piccoli calorimetri, la temperatura si mantenne perfettamente costante.

L'unico inconveniente che dapprima si incontrò per la perfetta riuscita fu quello per cui rimanendo sovente nella stufa insieme al liquido che bolliva anche poche goccie di un altro liquido dalla temperatura di ebollizione più bassa, si produceva perciò una diminuzione nella temperatura d'ebollizione del primo liquido, la quale poi andava man mano innalzandosi seguitando il liquido a bollire, senza raggiungere il suo limite per molti giorni. Anzi non di rado, siccome in gran parte i vapori del secondo liquido ricadevano condensati, si producevano nella stufa alternative di temperatura ora più alte, ora più basse nel tempo stesso che poteva durare una sola esperienza. Fu ovviato con facilità a questo difetto riscaldando fortemente la stufa dopo avervi tolto il liquido che era già stato adoperato, e facendovi passare una corrente d'aria la quale cacciava tutti i vapori; allora versando il liquido che si doveva far bollire, e che fino a quel tempo era stato tenuto in un recipiente chiuso, l'apparecchio era in grado di dare buonissimi risultati.

Qualche volta anche ad onta di tali precauzioni si osservava in sul principio che la temperatura d'ebollizione del liquido era alquanto più bassa; però in breve tempo si innalzava fino al punto spettante al liquido stesso.

Le coppie da studiare erano conformate ad U come si vede nella figura 2ª della tavola annessa. Le estremità che dovevano essere immerse nel mercurio furono coperte fino a circa 3 centimetri di altezza con uno strato sottile di una vernice a

fondo di coppale, e sopra questa, mentre era ancor fresca, fu avvolto un nastrino di seta in modo che la vernice penetrasse negli interstizi della seta; infine vi fu sovrapposto ancora un'altro strato di vernice. In questa maniera trovai che le saldature erano perfettamente al riparo dal mercurio fino a tamperature di circa 300°. Le due estremità dell' arco venivano immerse nei due calorimetri fino alla distanza di un centimetro circa dal fondo. Negli stessi calorimetri erano immerse anche le punte di una coppia termoelettrica di ferro-pakfong accuratamente studiata, la quale doveva servire a riconoscere la differenza di temperatura fra i due calorimetri. Questa coppia era rivestita di vernice isolante nel modo poc' anzi descritto. Fu posta cura perchè i fili componenti la coppia non si toccassero fra loro, nè toccassero il tubo.

Nel circuito della coppia in istudio si trovava una pila idroelettrica, la quale dapprincipio era costituita di due Bunsen; ma si ottennero poi risultati più concordanti adoperando una sola Bunsen. Oltre alla pila idroelettrica era inserito in questo circuito un reometro al quale era stata applicata una derivazione e che era stato graduato colla derivazione stessa.

Nel circuito poi della coppia ferro-pakfong si trovava un galvanometro di Thomson a riflessione e graduato con cura.

Il complesso dell'apparecchio si trova rappresentato nella fig. 1 della tavola annessa. Era necessario per queste esperienze il conoscere l'equivalente in acqua dei due calorimetri coi relativi accessori. Tale ricerca presentava una certa difficoltà poichè non potevo fare la determinazione con esattezza immergendo in ciascun tubo un dato peso di un corpo di noto calore specifico, a motivo della strettezza e della lunghezza del tubo stesso; non era neppure preciso nè molto pratico il metodo di lasciar cadere in un apposito calorimetro il tubo riscaldato già ad una data temperatura, in modo che vi si immergesse fino al livello del mercurio. Nessun altro metodo calorimetrico si prestava bene per ottenere con esattezza tale equivalente; e d'altra parte non avrei ottenuto una sufficiente precisione determinandolo col calcolo, poichè l'incertezza del calore specifico del rivestimento delle coppie termoelettriche avrebbe avuto una influenza molto sensibile sul risultato: attesa la piccola quantità di mercurio contenuta nei tubi. Perciò credetti preferibile ricorrere all'espediente che segue. Scelsi due tubi da saggio della stessa fabbrica e, per quanto fu possibile, uguali ai due che costituivano i calorimetri dell'apparecchio e li tagliai in modo che rimanessero lunghi soltanto cinque centimetri circa. Indi versai in ciascuno di essi del mercurio fino all'altezza di circa tre centimetri e nella 1ª serie di esperienze immersi nell'uno le due estremità che chiamerò M, delle due coppie termoelettriche, e nella 2ª serie di esperienze immersi nell'altro le due estremità N; per guisa che tali estremità giungessero fino alla distanza di un centimetro circa dal fondo; e in ogni asta feci poi un segno con inchiostro nel luogo fin dove arrivava a toccarle il mercurio. Al di sopra di ciascun tubetto, veniva successivamente disposto un apposito sostegno, in cui si poteva collocare, quando si voleva, una stufa, la quale lasciasse cadere nel tubetto stesso un corpo riscaldato a temperatura conosciuta. La stufa era costituita da un doppio cilindro di latta, di cui lo spazio annulare conteneva dell'acqua da far bollire, e nello spazio interno era sospeso un filo di platino ripiegato più volte sopra se stesso, in modo da formare una specie di piccolo fascio alto quasi due centimetri.

La bocca inferiore dello spazio interno era chiusa da una specie di saracinesca che si poteva aprire rapidamente. Quando il termometro collocato nell'interno della stufa era fermo da lungo tempo, si trasportava questa rapidamente sul sostegno al di sopra del tubo, e aperta la saracinesca, si faceva scendere il filo di platino esattamente nel mezzo del tubo stesso, e si allontanava subito la stufa. Si aveva poi cura di mantenere sospeso il platino dentro il mercurio, in guisa che non toccasse il vetro. È superfluo il far notare che gli aumenti di temperatura dentro il tubo si misuravano mediante la coppia termoelettrica ferro-pakfong, che aveva la seconda saldatura nell'altro tubo a temperatura nota e costante, e che era in comunicazione col galvanometro di Thomson. Le correzioni venivano fatte nel modo consueto adoperato per le comuni esperienze calorimetriche.

Trovato così mediante tre o quattro determinazioni l'equivalente in acqua di un tubo; si ripetevano le esperienze pel secondo tubo; ma si aveva cura di aggiungere e di togliere in questo tanto mercurio che fosse sufficiente a rendere il suo equivalente uguale a quello del primo.

Dopo finite le esperienze coi tubi corti si versava il mercurio ch'essi contenevano nei tubi dell'apparecchio per lo studio dell'effetto Peltier; e si immergevano in ciascuno d'essi rispettivamente le stesse estremità delle due coppie, fino ai segni fatti coll'inchiostro, badando bene che i fili non si toccassero fra di loro, nè toccassero le pareti del tubo.

Mi è sembrato di poter raggiungere una buona precisione ammettendo che gli equivalenti in acqua di questi calorimetri coi loro accessori, fossero uguali a quelli determinati per i tubetti più corti, attesa la poca conducibilità del vetro e la sottigliezza delle pareti.

Del resto si può facilmente fare un calcolo approssimato dell'errore massimo che si poteva commettere. Poichè io pesai diversi di tali tubi della stessa lunghezza (5 cm.), e trovai che il più leggiero non arrivava a differire di 4 centigrammi dal più pesante. Ora è certo che il piccolo riscaldamento prodotto dall'effetto Peltier, poteva difficilissimamente estendersi in modo sensibile nei tubetti oltre a due centimetri al di sopra della superficie del mercurio. Perciò anche ammettendo tutte le condizioni più sfavorevoli, non si potrà mai pensare che l'equivalente in vetro [1] riscaldato rispettivamente in ciascuno dei tubetti corti differisse di più di 7 o 8 centigrammi di quello riscaldato nei tubi che servivano da calorimetri. E allora, prendendo come calore specifico del vetro il numero 0,192 dato dal Regnault, la differenza fra l'equivalente in acqua di un tubetto e di un calorimetro poteva raggiungere appena $\frac{1}{200}$ dell' equivalente totale del tubetto medesimo; apportando perciò un errore molto più piccolo degli altri inerenti a questo genere di esperienze.

Siccome poi le esperienze sul fenomeno Peltier furono fatte sino alla temperatura di circa 260°, era necessario conoscere la variazione dell'equivalente in acqua dei due calorimetri al crescere della temperatura. Intorno a ciò, bisogna notare che il

[1] Chiamo equivalente in vetro di uno dei tubi, il peso di vetro che per subire un innalzamento di temperatura uguale a quello subito dal mercurio dentro contenutovi, richiederebbe la quantità di calore ricevuta in totale dal tubo.

calore specifico del mercurio soffre una diminuzione piccolissima, quasi insensibile, crescendo la temperatura ([1]), mentre invece per gli altri metalli il calore specifico va aumentando con la temperatura. E poichè il peso del mercurio era quasi di 70 gr. in ogni tubo, mentre le parti immerse delle due coppie, erano generalmente poco più di 1 gr. si poteva ammettere che la variazione negativa dell'equivalente in acqua dovuta al mercurio e la positiva dovuta alla estremità delle coppie, si compensassero senza tema di commettere un errore che potesse raggiungere quelli d'osservazione. Non si poteva però dire altrettanto per il vetro: infatti uno dei due tubetti della lunghezza di 5 cm. pesava gr. 2,75 e l'altro gr. 2,67, e quindi l'equivalente in acqua del primo era di circa gr. 0,520, e quello del secondo di gr. 0,510 circa; ossia tali equivalenti erano più della sesta parte dell'equivalente totale di ciascun calorimetro coi relativi accessori.

Inoltre il calore specifico del vetro aumenta rapidamente al crescere della temperatura. Perciò ho creduto necessario alle diverse temperature di apportare la correzione dovuta a questo cambiamento del calore specifico del vetro, ammettendo, senza pericolo di arrecare un errore sensibile, che il peso della porzione di tubo che veniva riscaldato nelle mie esperienze fosse di gr. 2,70 (media del peso dei due tubetti precedenti), e che il calore necessario per riscaldare 1 grammo di vetro dai 16° a t° fosse dato dalla formola:

$$q = 0{,}1866\,(t - 16) + 183{,}6,\,10^{-6}\,(t - 16)^2$$

quale fu determinata dal prof. Naccari (Memoria di prossima pubblicazione), poichè il vetro de' miei tubetti era della stessa qualità di quello studiato dal prof. Naccari.

La formola vale da 16° sino a 250°, ed io ho creduto di poterla anche estendere fino a 0°.

Per fare buone misure calorimetriche bisognava ancora che la coppia termoelettrica fosse ben graduata, in modo da dare con esattezza la differenza di temperatura fra i due calorimetri. A tal uopo essa era stata precedentemente collocata con le due estremità dentro due tubi contenenti petrolio, i quali pescavano alla loro volta in due palloni contenenti pure petrolio. Ciascun pallone aveva un agitatore, e ciascun tubo un agitatore e un termometro confrontato col termometro ad aria. Due fiamme collocate sotto ai palloni potevano portarli alle temperature che si desiderava. I fili estremi della coppia (lunghi più d'un metro) erano saldati a due grossi fili di rame, i quali erano congiunti al galvanometro di Thomson. Le saldature erano fortemente legate insieme, separate da un foglio di cautciù, e immerse in un recipiente di olio.

Siccome però per queste misure e per alcune di quelle sull'effetto Peltier, il galvanometro era troppo sensibile, tantochè la sua scala di 700 divisioni non avrebbe bastato a contenere le deviazioni più grandi, fui costretto ad applicare una derivazione, in maniera che la differenza di 1 grado fra le temperature delle due congiunzioni della coppia dava nel galvanometro la deviazione di 108 divisioni della scala. Ammesso che le deviazioni δ osservate nello strumento fossero legate alle temperature

([1]) Winkelmann, Pogg. Ann. CLIX, p. 152. — Naccari, Atti dell'Acc. delle scienze di Torino, vol. XXIII, p. 594.

t_1 e t_2 delle due congiunzioni della coppia mediante la legge di Tait

$$\delta = A(t_1 - t_2)\left(t_0 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

non rimaneva che a determinare i valori delle due costanti A e t_0. Per questo feci sei serie di esperienze, variando dall'una all'altra le temperature nei due tubi di petrolio, ma cercando di mantenerle costanti durante il corso di ciascuna serie, e leggendo intanto contemporaneamente i valori di t_1, di t_2 e di δ, coll'aiuto di un'altra persona. La media di tutte le determinazioni fatte in una data serie per ciascuna di queste quantità, dava il valore più giusto da attribuire alla quantità stessa in quella serie.

Onde mostrare il grado di precisione raggiunto in ciascuna serie, riferisco qui sotto i valori relativi ad una qualunque di esse.

t_1	t_2	δ
65°,70	59,30	659,2
65,70	59,30	658,4
65,65	59,35	657,2
65,60	59,35	656,3
65,60	59,40	654,7
65,60	59,40	655,1
65,60	59,45	654,6
65,55	59,45	654,2
65,50	59,50	654,8
65,50	59,50	654,6
medio 65°,60	medio 59°,40	medio 655,9

Nella tabella poi che segue dò i risultati medî delle sei serie; e accanto ai valori di δ ottenuti dalle osservazioni, pongo i valori di δ che risultano dal calcolo della formola di Tait sopra riferita, avendo determinato i valori di A e di t_0 mediante i dati delle osservazioni stesse.

t_1	t_2	δ osservato	δ' calcolato
26°,80	22°,65	div. 450,88	div. 450,82
65,60	59,40	655,90	655,35
102,45	98,35	420,48	421,33
158,10	154,60	344,36	344,54
191,55	186,20	513,15	513,23
211,40	206,20	478,32	478,49

I valori di A e t_0 che hanno servito al calcolo di δ', quali si ottennero dai risultati sperimentali, sono:

$$A = 0{,}077506 ; \quad e \quad t_0 = 1426{,}36.$$

Fra i valori ottenuti coll'esperienza e col calcolo v'è un accordo molto soddisfacente.

Così graduata la coppia, per dedurre poi dalla deviazione dell'ago del galvanometro la differenza di temperatura fra i due calorimetri dell'apparecchio, usai la formola:

$$t_1 - t_2 = \frac{\delta}{A\left[t_0 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right]} ;$$

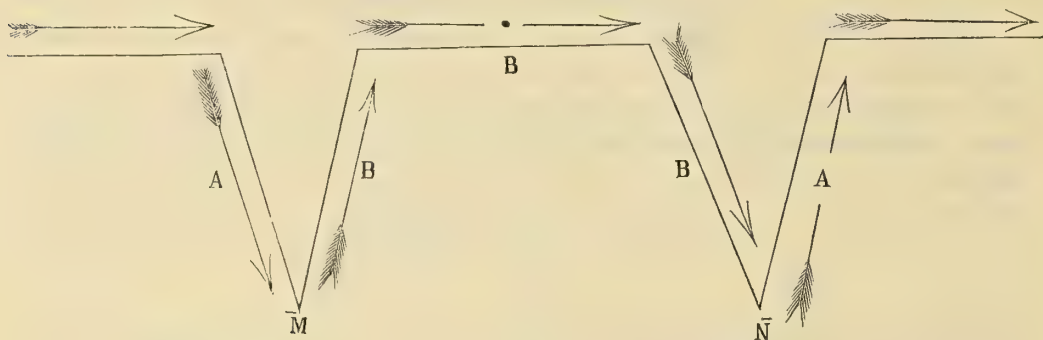
e ammettendo senza commettere errore sensibile, che $\frac{T_1 + T_2}{2}$ fosse uguale alla temperatura dell'ambiente in cui si trovavano i due calorimetri,

$$t_1 - t_2 = \frac{\delta}{0{,}077506\,[1426{,}36 - t]} ,$$

dove t rappresenta precisamente la temperatura segnata dal termometro immerso nel cilindro interno della stufa.

Nel valutare però la deviazione δ bisognava por mente che i due calorimetri, prima che s'incominciasse una qualunque delle esperienze, benchè rimasti a lungo in condizioni apparentemente uguali, non avevano quasi mai la stessa temperatura. Quindi era necessario togliere alla deviazione, che effettivamente si osservava in fine dell'esperienza, la deviazione prodotta da questa piccola differenza di temperatura. Inoltre quando si produceva nei calorimetri il riscaldamento o il raffreddamento per effetto della corrente, ciascun d'essi evidentemente perdeva o riceveva calore, e quindi la deviazione tendeva verso un limite, sebbene la corrente seguitasse a passare. Bisognava per questo apportare una seconda correzione alla deviazione effettivamente osservata; e siccome la perdita e il guadagno di calore in ciascun colorimetro avveniva nell'istesso modo che nelle comuni esperienze calorimetriche, ho calcolato questa correzione come si suole in tali esperienze, mediante letture dell'istrumento fatte a brevi intervalli prima del passaggio della corrente, durante il passaggio e dopo interrotto il circuito.

Si potrebbe pensare a primo aspetto che al calore sviluppato in ciascuna saldatura della coppia per il fenomeno Peltier, si dovesse aggiungere quello sviluppato nei fili adiacenti alla congiunzione per il fenomeno Thomson, ossia per l'ineguaglianza di temperatura che si stabilisce fra le parti vicine alla congiunzione stessa, a motivo del riscaldamento o del raffreddamento in essa prodotto dal fenomeno Peltier. È facile però dimostrare che il fenomeno Thomson non ha alcuna influenza sulle esperienze, disponendo le cose nel modo in cui erano disposte nel mio apparecchio. Infatti siano A e B i due metalli costituenti la coppia, M ed N le due congiunzioni, e la corrente si muova nel senso indicato dalle freccie, producendo in M riscaldamento e in N raffreddamento. Intanto la stessa corrente muovendosi nel filo A verso la punta M, cioè dalle parti più fredde verso le parti più calde, svilupperà una quantità di calore C_1 dovuta al fenomeno Thomson, e nel filo B, partendo la corrente dal punto M, cioè

dalle parti più calde verso le più fredde, svilupperà un'altra quantità di calore C_2. D'altra parte muovendosi la corrente nello stesso filo B, verso la saldatura N, cioè

dalle parti più calde verso le più fredde, e potendosi ammettere che la temperatura nelle due porzioni del filo adiacenti alle congiunzioni, distribuita in senso contrario, vada tuttavia variando nell'istessa misura, si svilupperà per il fenomeno Thomson un'altra quantità di calore C_2 uguale in valore ed in segno alla procedente. Per la stessa ragione nella seconda porzione del filo A, partendo la corrente dalla saldatura N si svilupperà una quantità di calore uguale in valore ed in segno alla C_1. Quindi viene per tal modo comunicata ai due calorimetri la stessa quantità di calore; e non può venire perciò alterata la differenza fra le loro temperature. E se pure una non improbabile differenza nella distribuzione della temperatura in vicinanza delle due congiunzioni avesse portato qualche alterazione, essa doveva essere così piccola che ho creduto di non doverne tenere alcun conto.

Ma non si compensano parimenti le due quantità di calore Joule sviluppate alle due estremità della coppia per cagione della resistenza opposta dal conduttore al passaggio della corrente; tuttavia è facile ovviare a questo, facendo un'esperienza con la corrente in una data direzione, e poi un'altra esperienza con la corrente nella direzione opposta. Infatti si indichi con i l'intensità della corrente che attraversa la coppia nella prima esperienza e si chiamino c e c' le quantità di calore svolte o assortite in ciascuna congiunzione per effetto del fenomeno Peltier nell'unità di tempo.

La durata della prima esperienza sia τ e quella della seconda τ'. Allora tutto il calore sviluppato nella saldatura M in causa del fenomeno Peltier è uguale a

$$C = c\tau i\,.$$

E se si rappresentano rispettivamente con r ed r' le resistenze delle due porzioni della coppia che comunicano il loro calore Joule ai due calorimetri, si avrà come espressione del calore sviluppato nella prima di queste porzioni per cagione della resistenza da essa opposta alla corrente

$$\gamma = \frac{1}{J} i^2 r\tau\,,$$

perciò il calore totale generato nel primo calorimetro è uguale a

$$C + \gamma = c\tau i + \frac{1}{J} i^2 r\tau\,.$$

Ed il calore totale generato nel secondo calorimetro è

$$C' + \gamma' = -c\tau i + \frac{1}{J} i^2 r' \tau .$$

Nel galvanometro si osserva evidentemente una deviazione proporzionale alla differenza delle quantità di calore sviluppate nei due calorimetri, cioè proporzionale a

$$2c\tau i + \frac{1}{J} i^2 \tau (r - r') .$$

Se si divide questa quantità per l'intensità della corrente e per il tempo ch'essa perdura a passare, si ottiene la differenza delle quantità di calore sviluppate nei due calorimetri nell'unità di tempo dall'unità di corrente. Questa differenza sarà espressa da

$$Q = 2c + \frac{1}{J} i (r - r') . \tag{6}$$

Nell'istesso modo si otterrà l'analoga differenza Q' nel caso in cui la corrente passa nella coppia in direzione contraria, cioè sarà:

$$Q' = 2c - \frac{1}{J} i'(r - r'). \tag{7}$$

Dalle equazioni (1) e (2) si ottiene per valore dell'effetto Peltier

$$c = \frac{Q + Q'}{4} - \frac{\frac{1}{J}(r - r')(i - i')}{4} . \tag{8}$$

Ora, nel caso delle mie esperienze le quantità Q e Q' si ottenevano moltiplicando l'equivalente in acqua comune a ciascun calorimetro per la differenza corretta delle loro temperature alla fine del primo e del secondo passaggio della corrente, le quantità i e i' si avevano dal reometro, e la quantità $h(r - r')$ si aveva senz'altro per mezzo della formola

$$\frac{1}{J}(r - r') = \frac{Q - Q'}{i + i} . \tag{9}$$

Siccome poi il più delle volte la corrente che passò nelle due esperienze successive ebbe molto prossimamente lo stesso valore I, e le due esperienze durarono uno stesso tempo τ, si determinò in tali casi il valore dell'effetto Peltier mediante la formola

$$c = \frac{V + V'}{4\tau i} I \tag{10}$$

dove V e V' sono le differenze delle quantità di calore sviluppate alla fine delle rispettive esperienze nei due calorimetri.

È superfluo notare infine che non era da prendere in nessuna considerazione il calore sviluppato nei due calorimetri dalla corrente termoelettrica che attraversava la coppia termometrica, essendo tale corrente debolissima. Inoltre siccome l'apparato riscaldante era sotto una cappa e tanto il galvanometro di Thomson quanto le congiunzioni tra i fili estremi della coppia termometrica ed i fili che conducevano al galvanometro stesso erano fuori della cappa, avviluppate con cautciù poi legate insieme,

e immerse in un recipiente di olio, non era da temere l'influenza del calore radiato dall'apparecchio riscaldante sulle indicazioni dell'istrumento termometrico.

Coppia bismuto-piombo.

La prima coppia che sottoposi allo studio fu quella di bismuto e piombo.

Per costruirla aspirai in un tubetto di vetro curvato ad U del bismuto fuso; e dopo averlo lasciato raffreddare, scopersi le estremità dell'archetto metallico fino all'altezza di circa 4 cm., e saldai alle punte due fili di piombo, per modo che ciascuna saldatura occupasse in lunghezza poco più che un millimetro.

Indi ricopersi con la vernice e col nastro di seta le congiunzioni, e poi le asticelle metalliche separatamente, affinchè il bismuto e il piombo non si toccassero possibilmente che nella sola saldatura.

Il bismuto era del più puro che fornisca la fabbrica Trommsdorff; quanto al piombo ho dovuto accontentarmi di fili che comunemente si trovano in commercio.

Immersi poi in uno dei calorimetri di aiuto, di quelli, cioè che avevano l'altezza di 5 cm., la prima congiunzione M della coppia, fino a tuffarla per circa 2 cm. nel mercurio, e la segnai con un sottilissimo tratto d'inchiostro, nel punto dove arrivava il livello del mercurio. Immersi infine nello stesso calorimetro una delle saldature della coppia termometrica, usando le medesime precauzioni; mentre l'altra saldatura della stessa coppia era tuffata in un tubo contenente petrolio, il quale era collocato alla sua volta in un ampio recipiente pieno d'acqua: in questo tubo si trovava un termometro diviso in decimi di grado, per accertare se la temperatura vi si mantenesse costante.

Intanto nella stufa, dove i vapori dell'acqua bollente mantenevano la temperatura di 98°,8 ; era sospeso un filo di platino ripiegato su se stesso come si è detto di sopra, il cui peso era di $3^{gr.},216$. Al momento opportuno fu trasportata la stufa sopra il calorimetro, si fece discendere rapidamente il platino, e di nuovo si allontanò subito la stufa.

La temperatura del calorimetro (computata mediante le letture fatte sulla scala del galvanometro) era nel momento dell'immersione uguale a 23°,6. L'aumento di questa temperatura per effetto di tale immersione, avendo fatte le debite correzioni, risultò uguale a 2°,681.

(Si noti che si prese come corrispondente al valore di un grado la deviazione di 108,6 divisioni sulla scala del galvanometro, come era risultato da parecchie esperienze eseguite a 25° circa).

Perciò l'equivalente in acqua E del calorimetro cogli accessori era

$$E = \frac{3,216 \times 0,03243 \times 75,2}{2,681} = 2^{gr.},925 ,$$

avendo preso per calore specifico del platino 0,03243, quale fu determinato dal Regnault fra 0° e 100°.

Nell' istessa maniera feci altre due determinazioni, e ottenni per equivalenti in acqua di questo calorimetro i valori: $2^{gr.},919$ e $2^{gr.},938$, i quali sono abbastanza concordanti col primo, ed ho assunto quindi come valore più esatto la media:

$$E = 2^{gr.},927 .$$

Ripetei le stesse operazioni per il secondo calorimetro, e il suo equivalente in acqua dalla media di quattro determinazioni risultò uguale ad

$$E' = 2^{gr.},763 .$$

Per renderlo uguale a quello dell'altro calorimetro vi aggiunsi una quantità di mercurio

$$P = \frac{0,164}{0,03332} = 4^{gr.},92 ,$$

avendo attribuito al calore specifico del mercurio il valore 0,03332 trovato dal Regnault.

Dopo ciò versai tutto il mercurio contenuto in questi piccoli calorimetri, rispettivamente nei due tubi dell'apparecchio pel fenomeno Peltier, ed ebbi cura di immergere quelle estremità delle coppie, che si trovavano nel primo calorimetro, nello stesso tubo in cui ne era stato versato il mercurio, e fino a che il livello del mercurio toccasse i segni di inchiostro fatti sulle aste delle coppie medesime. Altrettanto feci per l'altro tubo.

Indi lasciai passare la corrente generata da una Bunsen, nella coppia in istudio per venti minuti: leggendo di minuto in minuto le indicazioni del reometro che misurava l' intensità della corrente, e quelle del galvanometro Thomson; avendo avuto la cura di fare le letture sopra quest'ultimo strumento di minuto in minuto anche prima e dopo il passaggio della corrente per l' intervallo di 5 minuti, onde valutare la correzione necessaria per la determinazione precisa dello spostamento della luce sulla scala.

Feci così sei esperienze colla corrente in una direzione, e altre sei con la corrente nella direzione contraria. In questa prima serie di esperienze, nello spazio annulare della stufa si trovava il ghiaccio.

Nella seguente tabella sono riferiti i risultati delle determinazioni: la colonna indicata con N contiene i numeri d'ordine delle esperienze; quella indicata con t le temperature (contate dallo zero ordinario) segnate dal termometro della stufa; quella indicata con i le intensità delle correnti che attraversava la coppia in istudio, valutate in unità del sistema (G.C.S); nella colonna θ sono le differenze di temperatura prodotte fra i due calorimetri dal passaggio della corrente (a cui è sottinteso che furono arrecate le dovute correzioni); e finalmente nella colonna V sono le differenze fra le quantità di calore sviluppate nei due calorimetri, e calcolate moltiplicando la differenza θ di temperatura per l'equivalente in acqua comune ai due calorimetri.

Faccio presente, riguardo al valore di V, che avendo determinato l'equivalente in acqua dei calorimetri a circa 25°, ho arrecato all'equivalente medesimo la correzione dovuta al mutamento del calore specifico del vetro, per le diverse temperature.

Corrente nel 1° senso

N	t	i	θ	V
1	2°,2 c	0,162	1°,525	4,451
2	2,2	0,162	1,521	4,439
3	2,3	0,162	1,523	4,447
4	2,2	0,163	1,527	4,456
5	2,1	0,162	1,525	4,452
6	2,2	0,162	1,127	4,456
medio	2°,2	0,162	—	4,450
		Corrente nel 2° senso		
7	2°,3	0,163	— 1°,485	— 4,335
8	2,2	0,164	— 1,483	— 4,329
9	2,4	0,164	— 1,486	— 4,338
10	2,2	0,164	— 1,486	— 4,338
11	2,4	0,164	— 1,486	— 4,337
12	2,3	0,164	— 1,486	— 4,340
medio	2°,3	0,164	—	— 4,336

In questa tabella, come nelle seguenti, ho dato il segno (—) ai valori di θ e V nel caso in cui la corrente attraversava la coppia nella 2ª direzione; per indicare che allora la deviazione dell'ago del galvanometro era in senso opposto di quando la corrente passava nella 1ª direzione, e che perciò anche l'effetto termico nei calorimetri aveva segno contrario.

Il senso poi delle deviazioni stesse mostrò che si aveva riscaldamento nella congiunzione in cui la corrente andava dal bismuto al piombo, e raffreddamento nell'altra.

Siccome la durata del passaggio della corrente in ambedue le direzioni è stata la stessa, e siccome è stata pure prossimamente la stessa l'intensità media della corrente in ambedue le direzioni, come si vede dalla tabella, ho determinato in questo caso il valore dell'effetto Peltier mediante la formola (10):

$$c = \frac{V + V'}{4\tau i},$$

prendendo per V e V' i due valori medî di V che si trovano nella tabella. Perciò

$$c = \frac{8,786}{4 \times 1200 \times 0,163} = 0,1123 \textit{ piccole calorie.}$$

Ho tolto in seguito il ghiaccio dalla stufa, ed ho fatto altre esperienze alla temperatura ordinaria, lasciando passare anche in questo caso la corrente di una Bunsen per venti minuti in ambedue i sensi.

I risultati delle determinazioni sono nella seguente tabella:

Corrente nel 1° senso

N	t	i	θ	V
1	21°,8 c	0,160	1°,630	4,773
2	21,9	0,160	1,632	4,775
3	21,9	0,169	1,633	4,779
4	20,6	0,160	1,631	4,773
5	20,8	0,162	1,635	4,787
6	20,9	0,160	1,634	4,783
medio	21,32	0,1603	—	4,778
Corrente nel 2° senso				
7	21°,4	0,134	1°,422	— 4,162
8	21,4	0,134	1,420	— 4,158
9	21,4	0,133	1,420	— 4,158
10	21,6	0,133	1,421	— 4,160
11	21,7	0,135	1,422	— 4,162
12	21,7	0,134	1,421	— 4,160
medio	21,53	0,134	—	— 4,160

Anche qui il senso delle deviazioni dell'ago del galvanometro mostrò che si aveva riscaldamento in una congiunzione quando la corrente andava dal bismuto al piombo, e raffreddamento quando andava in senso contrario.

Dalla tabella si scorge che le intensità medie della corrente nell'e due diverse direzioni non furono in questo caso le stesse, e perciò ho determinato il valore dell'effetto Peltier mediante la formola (8):

$$c = \frac{Q + Q'}{4} - \frac{h\,(r - r')\,(i - i')}{4},$$

dove

$$Q = \frac{V}{\tau \, . \, i} = \frac{4,778}{1200 \times 0,160} = 0,024887$$

$$Q' = \frac{V'}{\tau' . \, i'} = \frac{4,160}{1200 \times 0,134} = 0,025870$$

e

$$\frac{1}{J}(r - r') = \frac{Q - Q'}{i + i'} = - \frac{0,000983}{0,294} = - 0,0033435$$

quindi

$$c = \frac{0,050767}{4} + 0,000835 \times 0,026 = 0,01271 \text{ piccole calorie.}$$

Dopo queste esperienze posi nella stufa a bollire l'alcool etilico; e lasciai passare la corrente di una Bunsen per venti minuti in ambedue i sensi.

Do nella tabella che segue i risultati ottenuti:

Corrente nel 1° senso

N	t	i	θ	V
1	79°,4 c	0,165	2°,034	6,012
2	79,4	0,165	2,029	5,999
3	79,4	0,166	2,082	6,153
4	79,3	0,167	2,072	6,125
5	79,3	0,166	2,057	6,079
6	79,4	0,167	2,080	6,149
medio	79°,36	0,166	—	6,086
Corrente nel 2° senso				
7	79°,3	0,140	— 1°,783	— 5,271
8	79,3	0,140	— 1,767	— 5,225
9	79,4	0,140	— 1,775	— 5,246
10	79,4	0,141	— 1,769	— 5,231
11	79,4	0,140	— 1,760	— 5,204
12	79,3	0,140	— 1,769	— 5,228
medio	79°,35	0,140	—	— 5,234

Anche in questo caso si produceva riscaldamento o raffreddamento in ciascuna saldatura, secondochè la corrente andava dal bismuto al piombo, o in direzione opposta.

Ho dovuto pure far uso a questa temperatura della formola (8). Dai valori riferiti nella tabella si ottiene:

$$Q = 0{,}030554$$
$$Q' = 0{,}031156$$

e

$$\frac{1}{J}(r - r') = - \frac{0{,}000602}{0{,}306} = - 0{,}0019673\,.$$

Donde

$$c = 0{,}015428 + 0{,}000013 = 0{,}015441 \textit{ piccole calorie.}$$

Ho fatto una quarta serie di esperienze, ponendo a bollire l'acqua nella stufa, e lasciando passare la corrente di una Bunsen per venti minuti in ambedue le direzioni.

La seguente tabella contiene i risultati:

Corrente nel 1° senso

N	t	i	θ	V
1	98°,6 c	0,162	2°,273	6,742
2	98,6	0,162	2,277	6,755
3	98,6	0,161	2,278	6,758
4	98,6	0,163	2,287	6,784
5	98,6	0,161	2,280	6,764
6	98,6	0,163	2,269	6,729
medio	98°,6	0,162	—	6,755
Corrente nel 2° senso				
7	98°,7	0,135	1,845	5,473
8	98,7	0,135	1,841	5,462
9	98,6	0,135	1,844	5,469
10	98,6	0,135	1,848	5,482
11	98,6	0,135	1,843	5,466
12	98,6	0,135	1,841	5,461
medio	98°,63	0,135	—	5,469

Le direzioni dell'ago del galvanometro mostrarono che il riscaldamento o il raffdamento delle congiunzioni della coppia avvenivano rispettivamente quando la corrente era nella stessa direzione dei casi anteriori.

Essendo diverse le intensità medie della corrente nei due sensi opposti, ho dovuto usare la formola (8) per il calcolo dell'effetto Peltier.

Ora, dai valori sopra riportati si ottiene:

$$Q = 0,03475$$
$$Q' = 0,03376$$

e

$$\frac{1}{J}(r - r') = \frac{0,00099}{0,297} = 0,00338.$$

Da cui

$$c = 0,017127 - 0,000228 = 0,016899 \textit{ piccole calorie.}$$

Una quinta serie di esperienze fu eseguita ponendo a bollire nella stufa l'essenza di trementina; facendo passare la corrente in ogni esperienza per venti minuti.

Ecco i risultati:

Corrente nel 1° senso

N	t	i	θ	V
1	158°,6	0,148	2°,540	7,603
8	158,6	0,148	2,543	7,613
9	158,8	0,148	2,553	7,641
10	158,8	0,149	2,555	7,649
11	158,7	0,149	2,550	7,632
12	158,7	0,149	2,543	7,611
medio	158°,70	0,148,5	—	7,625
		Corrente nel 2° senso		
7	158°,7	0,149	2°,527	7,563
8	158,7	0,150	3,530	7,574
9	158,7	0,149	2,533	7,583
10	158,8	0,149	2,531	7,575
11	158,8	0,148	2,524	7,555
12	158,8	0,150	2,523	7,554
medio	158°,75	0,149	—	7,567

Siccome l' intensità media della corrente nel 1° senso e nel 2° senso è stata prossimamente la stessa, come indica la tabella, ho ricavato il valore di c mediante la formola (10):

$$c = \frac{15,192}{4 \times 1200 \times 0,149} = 0,021242 \textit{ piccole calorie.}$$

Anche in questo caso si ebbe riscaldamento in ciascuna saldatura colla corrente diretta dal bismuto al piombo, e raffreddamento colla corrente opposta.

In fine, ponendo nella stufa del petrolio, ben omogeneo, estratto dal petrolio comune mediante la distillazione, e che perciò bolliva a temperatura abbastanza costante, ho potuto fare esperienze anche alla tamperatura di circa 202°.

I risultati furono i seguenti:

Corrente nel 1° senso

N	t	i	θ	V
1	201°,8 c	0,151	2°,881	8,693
2	201,9	0,150	2,883	8,697
3	201,8	0,150	2,889	8,715
4	202 2	0,151	2,885	8,706
5	202,3	0,152	2,886	8,708
6	202,2	0,151	2,890	8,718
medio	202,03	0,151	—	8,706
		Corrente nel 2° senso		
7	202,3	0,151	2°,863	8,637
8	202,4	0,152	2,861	8,633
9	202,3	0,151	2,862	8,634
10	202,1	0,150	2,8545	8,611
11	202,4	0,152	2,865	8,644
12	202,1	0,150	2,857	8,618
medio	202,27	0,151	—	8,629

È lecito, certamente di attribuire a T la media dei due valori medi 202°,05 e 202°,27; per cui

$$c = \frac{17,335}{4 \times 1200 \times 0,151} = 0,023918 \textit{ piccole calorie.}$$

Il riscaldamento si ebbe sempre nella congiunzione in cui la corrente andava dal bismuto al piombo, e il raffreddamento nell'altra.

Quindi si può concludere che da 0° a 202° l'effetto Peltier in questa coppia è positivo quando la corrente passa dal bismuto al piombo.

Una prima verificazione della teoria si ottiene esaminando se i valori così trovati dell'effetto Peltier possano bene rappresentarsi con un'equazione della forma della (5), ossia se la curva descritta con questi valori come ordinate e le relative temperature come ascisse, sia una parabola.

Per questo ho tracciata la curva in grandissima scala, contando le ascisse da 0° C, e le ordinate dal valore 0,0100, e rappresentando con il millimetro $\frac{1}{2}$ grado sulle ascisse, e 0,0001 piccole calorie sulle ordinate; e per mezzo di punti convenientemente scelti sulla curva stessa, calcolai le costanti A e T_0 della formola: (badando di sostituire in luogo di T i valori delle temperature assolute)

$$C = \frac{A}{J}(T_0 - T)\,T,$$

Risultò

$$A = -2{,}168 \dots \textit{ in unità del sistema } (C.G.S)$$
$$T_0 = -533{,}5 \dots\dots \textit{ contata dallo zero assoluto.}$$

Con questa formola calcolai in seguito i valori dell'effetto Peltier corrispondenti alle diverse temperature a cui avevo fatto le determinazioni sperimentali. E nel seguente quadro pongo i risultati del calcolo di fronte a quelli dell'esperienza, onde se ne possa fare il confronto:

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
2,25° C.	0,01123	0,01122	— 0,00001
21,42	0,01271	0,01230	— 0,00041
79,355	0,01544	0,01574	+ 0,00030
98,615	0,01690	0,01697	+ 0,00007
158,725	0,02124	0,02107	— 0,00017
202,15	0,02392	0,02418	+ 0,00024

La concordanza fra i valori osservati e calcolati è soddisfacente, perchè si possa concludere che per la coppia bismuto-piombo l'effetto Peltier in funzione della temperatura è rappresentato da una parabola.

Per avere una completa verificazione della formola (5), bisognava trovare i valori delle costanti A e T_0 mediante lo studio termoelettrico della coppia; e poi sostituendo questi valori nella (5), osservare se ne risultavano per l'effetto Peltier valori concordanti con quelli ottenuti sperimentalmente.

A tal uopo, tolta dalla stufa la coppia da studiare, la immersi rispettivamente colle sue estremità coperte in due palloni; l'uno dei quali conteneva ghiaccio e l'altro, dapprima acqua, e poi paraffina. Così la prima saldatura rimaneva a temperatura sempre costante e la seconda poteva portarsi a temperature via via più alte.

Per avere poi i valori delle forze termoelettromotrici, inserii nel circuito della coppia un sensibile galvanometro con specchio e scala, e determinai quale fosse il valore della corrente che produceva nello strumento la deviazione di una particella della scala, e quale fosse il valore della resistenza totale del circuito. Per la prima di queste determinazioni applicai direttamente al galvanometro una coppia Daniell accuratamente preparata, interponendo nel circuito resistenze assai grandi e conosciute; per la seconda determinazione usai il metodo del ponte di Wheatstone.

Nella seguente tabella si trovano i valori delle temperature t_1 e t_2 assunte successivamente dalle due congiunzioni, e di fronte in una colonna, i valori E delle rispettive forze termoelettromotrici in unità del sistema [C. G. S] quali risultarono dalle esperienze, e in una seconda colonna i valori di E ricavati alle diverse temperature col calcolo della formola: $E = A(t_1 - t_2)\left(t_0 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$, avendo determinato mediante i dati esperimentali le costanti A e t_0.

t_1	t_2	E. 10^{-2} osservata	E. 10^{-2} calcolata
24°,4 c,	0° c.	428	428
78,2	»	1419	1411
98,8	»	1787	1804
152,6	»	2859	2873
188,6	»	3650	3623

I valori di A e T_0, ricavati da queste determinazioni sono:

$A = -2,126.....$ *in unità del sistema* [C.G.S]

e $t_0 = -809,4$ C.; quindi $T_0 = -536,4.....$ *contata dello zero assoluto*;

valori molto vicini a quelli precedentemente determinati mediante le esperienze sull'effetto Peltier. Ciò mostra che esiste per questa coppia una buona concordanza fra la teoria e i risultati sperimentali; nullameno per dare una più chiara idea di tale concordanza, credo utile di riferire nel seguente quadro i valori dell'effetto Peltier ottenuti coll' esperienza alle diverse temperature, e i valori ottenuti alle stesse temperature mediante il calcolo della formola $c = \frac{A}{J}(T_0 - T)\,T$, dove le costanti A e T_0 vennero prese uguali a quelle quì sopra riferite; ossia a quelle ricavate dallo studio delle proprietà termoelettriche della coppia.

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
2°,25 c.	0,01123	0,01130	+ 0,00007
21,42	0,01271	0,01238	— 0,00033
79,355	0,01544	0,01585	+ 0,00041
98,615	0,01689	0,01708	+ 0,00019
158,725	0,02124	0,02116	— 0,00008
202,15	0,02391	0,02423	+ 0,00042

L'accordo fra i valori di c osservati e calcolati, può certo ritenersi come soddisfacente. Cosicchè si può concludere che per la coppia bismuto piombo, si verifica pienamente la teoria termoelettrica di Thomson e di Tait.

Coppia ferro-pakfong.

Per costruire la coppia ferro-pakfong, adoperai un filo di ferro, di quelli che si adoprano per le corde da pianoforte, e che si possono ritenere di metallo sufficientemente puro; il filo di pakfong poi era di quelli che comunemente si trovano in commercio. Fu piegato ad U il ferro, e alle due punte furono saldati i due fili di pakfong, di cui l'uno era congiunto ad un polo della pila idroelettrica, e l'altro

andava a immergersi in un bicchierino pieno di mercurio, per poter aprire e chiudere a piacimento il circuito.

Fu presa cura perchè i fili dentro i tubi non si toccassero fra loro, nè toccassero le pareti.

Furono fatte, come nel caso della coppia precedente le esperienze preliminari per valutare l'equivalente in acqua dei due calorimetri coi relativi accessori; e fu seguito l' identico metodo con le identiche precauzioni. Ottenni come valore di tale equivalente comune ad ambedue i calorimetri a 25°,

$$2^{gr},744.$$

Dapprima posi nella stufa il ghiaccio; e feci passare per la coppia la corrente prodotta da una Bunsen per venti minuti primi in ambedue i sensi.

Nella seguente tabella sono i risultati delle esperienze; però in questa tabella, come in tutte quelle che seguiranno, sia appartenenti alla seguente coppia che alle altre di cui riferirò lo studio, mi limiterò, per occupare minor spazio, a riferire soltanto i valori medii, che nelle tabelle precedenti figuravano in fondo a ciascuna colonna. Ora la lettera N indica perciò il numero delle esperienze eseguite per ottenere le rispettive medie. Inoltre aggiungo in principio della tabella una colonna, nella quale i numeri 1 e 2, che vi si trovano, servono per distinguere le esperienze fatte colla corrente nel 1° senso, da quelle fatte con la corrente nel 2° senso.

	N	t	i	θ	V
1	5	3°,18 c	0,160	1°,854	5,068
2	5	3,08	0,162	1,846	5,047

A questa temperatura la corrente produceva riscaldamento nella congiunzione in cui andava dal pakfong al ferro, o raffreddamento nell'altra congiunzione.

Essendo la corrente prossimamente la stessa nelle due serie di esperienze, ed essendo uguali il tempo del loro passaggio, il valore dell'effetto Peltier è dato da

$$c = \frac{10,115}{4 \times 1200 \times 0,161} = 0,01309 \textit{ piccole calorie.}$$

Tolto in seguito il ghiaccio dalla stufa furono fatte le determinazioni alla temperatura della stanza. Eccone i risultati:

	N	t	i	θ	V
1	6	24°,67 c	0,154	1°,888	5,180
2	6	24,47	0,154	1,862	5,109

Da cui si ottiene

$$c = \frac{10,289}{4 \times 1200 \times 0,154} = 0,01392 \textit{ piccole calorie.}$$

Anche a questa temperatura si riscaldava la congiunzione, in cui la corrente andava dal pakfong al ferro.

Fu messo poi nella stufa l'alcool a bollire; e si fecero le esperienze delle quali i risultati sono riferiti nella seguente tabella:

	N	t	i	θ	V
1	6	79°,36 c	0,161	2°,172	6,017
2	6	79,35	0,147	2,112	5,853

Le intensità della corrente in ambedue i sensi non furono le stesse; perciò deve determinarsi il valore di c mediante la formola (8).

Ora, dai valori qui sopra riferiti si ottiene

$$Q = 0{,}03114$$
$$Q' = 0{,}03318$$
$$\frac{1}{J}(r - r') = -\frac{0{,}00203}{0{,}308} = -006604,$$

e perciò

$$c = 0{,}01608 + 0{,}00002 = 0{,}01610 \textit{ piccole calorie.}$$

La corrente riscaldava quella congiunzione attraverso la quale andava dal pakfong al ferro.

Quando nella stufa fu posta a bollire l'acqua, i risultati che si ottennero furono i seguenti:

	N	t	i	θ	V
1	5	98°,6 c	0,154	2°,285	6,353
2	5	98,8	0,158	2,2865	6,356

Essendo stata prossimamente equale l' intensità della corrente nei due sensi, ottiene

$$c = \frac{12{,}710}{4 \times 1200 \times 0{,}156} = 0{,}01684 \textit{ piccole calorie.}$$

Veniva riscaldata quella congiunzione, attraverso alla quale la corrente andava dal pakfong al ferro.

Nella quinta serie di esperienze sopra questa coppia, fu posta a bollire nella stufa l'anilina. Bisogna ch' io avverta, che per parecchie delle prime esperienze la temperatura data dai vapori di questo liquido non fu perfettamente costante, ma andò sempre lentamente crescendo; le osservazioni però furono fatte sempre in condizioni sufficientemente buone, da non avere alcun dubbio sulla sicurezza dei risultati.

Essi sono esposti nella tabella che segue:

	N	t	i	θ	V
1	6	180°,45 c	0,1475	2°,404	6,782
2	6	181,67	0,148	2,3755	6,701

Donde si ricava

$$c = \frac{13,483}{4 \times 1200 \times 0,148} = 0,01898 \textit{ piccole calorie.}$$

Come nei casi precedenti si produceva riscaldamento nella congiunzione, attraverso alla quale la corrente passava dal pakfong al ferro, e raffreddamento nell'altra.

Finalmente nella stufa fu posto del petrolio, il quale però bolliva a temperatura più elevata e un po' meno costante di quello usato per la coppia antecedente. Nella seguente tabella sono riferiti i risultati dell'esperienze:

	N	t	i	θ	V
1	7	251°,60 c	0,151	2°,812	8,029
2	7	252,35	0,151	2,801	7,999

Da cui si ricava:

$$c = \frac{16,018}{4 \times 1200 \times 0,151} = 0,02210 \textit{ piccole calorie.}$$

Il riscaldamento e il raffreddamento in ciascuna congiunzione si produceva con la corrente diretta nello stesso senso che nei casi antecedenti.

Come si vede, le esperienze riferite mostrano che da 0° a 250° la congiunzione in cui la corrente andava dal pakfong al ferro si riscaldava, mentre l'altra si raffreddava. Il Gore invece aveva trovato nelle ricerche ricordate in principio di questa Memoria, che andando la corrente attraverso ad una congiunzione sia dal ferro al pakfong che dal pakfong al ferro, si produceva sempre riscaldamento. Ma si può facilmente sospettare che il riscaldamento da lui osservato quando la corrente passava dal ferro al pakfong fosse la differenza fra l'abbassamento di temperatura prodotto alla congiunzione dell'effetto Peltier e l' innalzamento prodotto dal calore Joule nella congiunzione medesima, e più ancora nelle parti adiacenti del filo e ad essa trasmesso per conduzione. Per assicurarmi di ciò ho voluto ripetere le esperienze di Gore, arrecando al suo apparecchio qualche piccola modificazione, che valesse a diminuire l' influenza del calore Joule.

Scelsi perciò un filo di pakfong del diametro di quasi 4^{mm} e un filo di ferro del diametro di 5^{mm}. Così, per la piccola resistenza che potevano offrire alla corrente, doveva svilupparsi in essi una quantità di calore Joule molto più piccola che nei fili di Gore, i quali erano all' incirca del diametro di mezzo millimetro. Saldai

questi due fili in croce, e poi in vicinanza della saldatura, in ciascun filo e da ambedue le parti, praticai un taglio sottile e profondo con una lima; questo taglio accresceva in quel punto la resistenza e quindi lo sviluppo del calore Joule, ma il vantaggio che ne proveniva d'altra parte per la diminuita conducibilità termica, superava per certo e di gran lunga tale piccolo svantaggio. Inoltre ricopersi i fili con sottile strato di nero fumo, affinchè fosse più grande la perdita del loro calore verso l'esterno. Le estremità dei fili da una parte erano saldati a due reofori di rame, che potevano essere messi in comunicazione con una Bunsen; e le estremità dall'altra parte erano saldati ad altri due reofori che potevano essere messi in comunicazione con un galvanometro a specchio. Facevo passare nel filo la corrente prodotta dalla Bunsen per *cinque* minuti, tenendo aperto il circuito del galvanometro; poi aprivo il circuito della Bunsen e rapidamente chiudevo quello del galvanometro, ed osservavo la deviazione prodotta dopo un minuto. Sottraevo da questa deviazione quella che si era ottenuta chiudendo il circuito stesso prima di far passare attraverso alla saldatura la corrente della Bunsen. Indi lasciavo raffreddare l'apparecchio, e ripetevo l'esperienza mandando la corrente della Bunsen attraverso alla saldatura nella direzione opposta.

Da quattro coppie di esperienze ho ottenuto i seguenti risultati:

Essendo passata per 5 minuti la corrente	
Dal pakfong al ferro si ottennero:	Dal ferro al pakfong si ottennero:
la 1.ª volta . . . + 94,6 particelle di deviazione	la 1.ª volta . . . — 79,2 particelle di deviazione
» 2.ª » . . . + 92,8 » » »	» 2.ª » . . . — 77,6 » » »
» 3.ª » . . . + 93,6 » » »	» 3.ª » . . . — 79,6 » » »
» 4.ª » . . . + 95,4 » » »	» 4.ª » . . . — 78,4 » » »

I segni (+) indicano che le deviazioni accusavano un innalzamento di temperatura della congiunzione, e i segni (—) indicano il contrario.

Come si vede, in ciascuna coppia di esperienze si è trovato che la corrente andando dal pakfong al ferro produceva riscaldamento, mentre che andando nella direzione opposta produceva raffreddamento. È vero che il raffreddamento non apparisce uguale al riscaldamento, ma è lecito supporre che ciò dipendesse soltanto dal non aver potuto eliminare del tutto l' influenza dell'effetto Joule.

Oltre a ciò il Gore aveva trovato che il calore sviluppato ad una saldatura di questa coppia era lo stesso a 10° e a 90°. Le esperienze fatte da me alle diverse temperature mostrano che ciò non è in realtà; quindi si ha una nuova ragione per credere che il riscaldamento prodotto nelle saldature della coppia di Gore fosse dovuto nella massima parte all'effetto Joule.

Coi valori sopra riferiti dell'effetto Peltier, ne ho descritta la curva in funzione della temperatura; e per mezzo di punti scelti su di essa ho calcolato le costanti della formola (5), ed ho ottenuto

$A = - 1{,}223\ldots\ldots$ in unità del sistema [C.G.S.]

$T_0 = + 1904{,}14\ldots$ contata dallo zero assoluto.

Nella seguente tabella sono posti a confronto i valori di c ricavati direttamente dalle esperienze alle diverse temperature con quelli ricavati alle stesse temperature dal calcolo della formola (5).

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
3°,13 c.	— 0,01309	— 0,01309	0,00000
24,57	— 0,01392	— 0,01392	0,00000
79,355	— 0,01610	— 0,01592	+ 0,00018
98,70	— 0,01684	— 0,01659	+ 0,00025
181,06	— 0,01898	— 0,01917	— 0,00019
251,97	— 0,02210	— 0,02208	+ 0,00002

L'accordo è soddisfacente.

Ho dato il segno negativo ai valori di c in questa tabella per uniformarmi alla denominazione *ferro-pakfong*; volendo indicare che quando la corrente va nel senso della denominazione della coppia, cioè, dal ferro al pakfong, si ha raffreddamento.

Alla stessa regola mi sono attenuto nel dare il segno ai valori di c nelle coppie seguenti.

Indi studiai le proprietà termoelettriche di questa coppia coll' istesso metodo usato per la coppia bismuto-piombo; e coi valori delle forze elettromotrici ottenuti alle diverse temperature calcolai le costanti A e t_0 della formola

$$E = A(t_1 - t_2)\left(t_0 - \frac{t_1 + t_2}{2}\right);$$

ed ottenni

$A = -1,235........$ in unità del sistema (C.G.S.)

$t_0 = 1619,2$C.

e quindi $T_0 = 2892,2......$ contata dallo zero assoluto.

Nella seguente tabella riferisco i valori di E ricavati dall'esperienza e dal calcolo per le diverse temperature:

t_1	t_2	$E.10^{-2}$ osservata	$E.10^{-2}$ calcolata
22°,6 c.	0° c.	— 448	— 449
59,4	»	— 1162	— 1166
104,5	»	— 2044	— 2022
161,6	»	— 3082	— 3070
194,9	»	— 3665	— 3663
218,4	»	— 4038	— 4073

L'accordo, come si vede, è molto buono fra i valori calcolati e osservati.

V'ha pure un buon accordo fra i valori di A e T_0 ottenuti colle esperienze sull'effetto Peltier e quelli ottenuti collo studio delle proprietà termoelettriche della

coppia. Ciò mostra che per la coppia stessa si verifica la formola (5); ma per meglio porre in evidenza tale verificazione riporto nel quadro che segue i valori di C ottenuti colle esperienze, e quelli ottenuti mediante il calcolo della medesima formola (5), nella quale si sono presi A e T_0 quali risultarono dallo studio delle proprietà termoelettriche:

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
3°,13 c.	— 0,01309	— 0,01312	— 0,00003
24,57	— 0,01392	— 0,01395	— 0,00003
79,355	— 0,01610	— 0,01595	+ 0,00015
98,70	— 0,01684	— 0,01661	+ 0,00023
181,06	— 0,01898	— 0,01920	— 0,00022
251,97	— 0,02210	— 0,02110	+ 0,00100

Coppia ferro-rame.

Adoperai, per costruire questa coppia, del filo di ferro delle corde da piano forte, e del filo di rame del commercio. Fu piegato ad U il ferro, e i fili di rame saldati alle due estremità furono disposti in modo nell'apparecchio, da non toccarsi fra loro e da non toccare nè gli altri fili, nè i tubi.

L'equivalente in acqua comune ai due calorimetri a 23° fu trovato uguale a $2^{gr.}$, 837.

I risultati delle esperienze fatte sull'effetto Peltier, quando la stufa fu riempita di ghiaccio, o fu lasciata alla temperatura dell'ambiente, o vi si fecero bollire i diversi liquidi, sono riportati nella seguente tabella; dove nell'ultima colonna c si trovano i valori dell'effetto stesso.

La corrente passò, al solito, per 20 minuti in ciascuna esperienza.

Col ghiaccio fondente

	N	t	i	θ	V	c
1	6	2°,80 c	0,160	1°,167	3,301	0,00865
2	6	2,90	0,160	1,182	3,343	alla temperatura di 2°,85 c.
			Alla temperatura della stanza			
1	7	19°,25	0,161	1,157	3,282	0,00855
2	7	19,55	0,163	1,153	3,370	alla temperat. di 19°,4 c.

	N	*t*	*i*	*θ*	V	*c*
			Coll'alcool bollente			
1	6	81°,10	0,160	1°,0765	3,081	0,007900
2	6	80,10	0 162	1,0555	3,021	alla temperat. di 80°,60 c.
			Coll'acqua bollente			
1	6	98°,46	0,155	0,964	2,771	0,08755
2	6	98,50	0,147	0,940	2,702	alla temperat. di 98°,48 c.
			Con l'anilina bollente			
1	6	182°,60	0,150	0,617	1,798	0,00499
2	6	183,12	0,150	0,6165	1,797	alla temperat. di 182°,86 c.
			Col petrolio bollente			
1	6	246°,90	0,158	0,242	0,714	0,00187
2	6	248,98	0,162	0,244	0,7191	alla temperat. di 247°,94

A tutte le temperature si riscaldava la congiunzione attraverso alla quale la corrente passava dal rame al ferro.

Nella maniera riferita per le coppie precedenti ho calcolate le costanti A e T_0 della formola (5) ed ho ottenuto:

$$A = -4,732..... \text{ in unità del sistema (C.G.S.)},$$

$$T_0 = 552,66.. \text{ contata dallo zero assoluto.}$$

La seguente tabella poi contiene i valori di *c* ottenuti mediante il calcolo della formola (5) di fronte a quelli ottenuti coll'esperienza.

Temperatura	*c* osservato	*c* calcolato	Differenza
2°,85 c.	— 0,00865	— 0,00860	+ 0,00005
19,40	— 0,00855	— 0,00857	— 0,00002
80,60	— 0,00790	— 0,00793	— 0,00003
98,48	— 0,00755	— 0,00758	— 0,00003
182,86	— 0,00499	— 0,00497	+ 0,00002
247,94	— 0,00187	— 0,00186	+ 0,00001

L'accordo è tale da poter concludere che l'effetto Peltier in funzione della temperatura è rappresentato anche per questa coppia da una parabola.

Invece le esperienze fatte dai sig. Skobelzyn e Zinserling fra 0° e 100° darebbero per l'effetto Peltier una curva che male si accorda con una parabola.

Essa è rappresentata nella fig. 3 della tavola annessa, in AMNB; e d'accanto si è rappresentata con AM'N'B' la parabola che si ottiene coi valori dell'effetto Peltier calcolati mediante la formola (5).

Quindi per meglio assicurarmi che anche fra 0° e 100° la parabola rappresentasse bene l'andamento del fenomeno Peltier al variare della temperatura, feci oltre le precedenti altre serie di esperienze sulla stessa coppia a 26°,85, a 39°.74, e a 56°,47; cercando di avere la temperatura costante nella stufa, col mantenervi dentro dell'acqua calda mediante una lampada opportunamente regolata. Ecco i risultati:

	N	t	i	θ	V	c
1	6	26°,80 c.	0,156	1,103	3,131	0,00847
2	6	26,90	0,156	1,1315	3,212	alla temperat. di 26°,85 c.
1	6	39,88	0,155	1,055	3,001	0,00846
2	6	39,60	0,145	1,086	3,088	alla temperat. di 39°,74
1	6	56,10	0,149	1,0525	3,001	0,00831
2	6	56,85	0,149	1,032	2,943	alla temperat. di 56°,47

Così avevo sei valori da 0° a 100° per l'effetto Peltier; con essi ho descritto, in funzione della temperatura la curva, che si trova nella fig. 4, e che è evidentemente una parabola. Secondo le mie esperienze non si può dunque ammettere come giusta la curva trovata dai sig. Skobelzyn e Zinserling

Feci da ultimo lo studio delle proprietà termoelettriche di questa coppia; e coi valori delle forze elettromotrici ottenuti alle diverse temperature, ho calcolate le costanti A e T_0 della formola (4), ed ho ottenuto:

$$A = -4,831.... \text{ in unità del sistema (C.G.S.)}$$

$$t_0 = 274,1.... \text{ contata dallo zero ordinario}$$

e quindi $$T_0 = 547,1.... \text{ contata dallo zero assoluto.}$$

Nella seguente tabella riferisco i valori di E dati dall'esperienza di fronte a quelli dati dal calcolo della formola (4), perchè si veda il buon accordo che esiste fra essi.

t_1	t_2	E. $_{10}^{-2}$ osservata	E. $_{10}^{-2}$ calcolata
25°,4 c.	0° c.	— 322	— 321
59,8	»	— 708	— 705
99,1	»	— 1067	— 1075
151,4	»	— 1450	— 1451
209,8	»	— 1705	— 1715
238,6	»	— 1799	— 1784

In questa coppia è pure molto buona la concordanza fra i valori di A e T_0 ottenuti dallo studio dell'effetto Peltier, e quelli ottenuti dallo studio termoelettrico. La tabella seguente la quale contiene i valori di c dati dalle osservazioni e quelli dati dal calcolo della formola (5) prendendo $A = -4{,}831$ e $T_0 = 547{,}1$, mostra che anche per questa coppia si può ritenere verificata la teoria di Thomson e di Tait.

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
2°,85 c.	— 0,00865	— 0,00861	+ 0,00004
19,40	— 0,00855	— 0,00857	— 0,00002
80,60	— 0,00790	— 0,00787	+ 0,00003
98,48	— 0,00755	— 0,00750	+ 0,00005
182,86	— 0,00499	— 0,00478	+ 0,00021
247,94	— 0,00166	— 0,00167	+ 0,00019

Coppia ferro-alluminio.

Il filo di ferro usato per costruire la coppia ferro-alluminio era come per le coppie antecedenti, di quelli che si adoprano per le corde da pianoforti; e il filo di alluminio era del più puro che fornisca la fabbrica di Trommsdorff. Fu piegato ad U l'alluminio e i due fili di ferro che vi furono saldati, vennero presi molto lunghi e la seconda estremità di ciascuno d'essi fu unita pure con saldatura a un filo di rame, per avere nel circuito i contatti più buoni e più costanti. L'equivalente in acqua comune ai due calorimetri a 20° fu trovato uguale a

$$2^{gr},972$$

La corrente si fece passare in ogni caso per l'intervallo di venti minuti. I risultati delle esperienze sull'effetto Peltier, si trovano nel seguente quadro:

Col ghiaccio fondente.

	N	t	i	θ	V	c
1	5	3°,00 c.	0,154	0°,889	2,635	0,00715
2	5	3,20	0,154	0,894	2,650	alla temperatura di 3°,10 c
			Alla temperatura della stanza			
1	6	26°,90	0,170	0,979	2,912	0,00716
2	6	26,70	0,162	0,939	2,793	alla temperat. di 26°,80 c.
			Coll'alcool bollente			
1	6	79°,50	0,1505	0,820	2,461	0,00685
2	6	79,60	0,151	0,834	2,501	alla temperat. id 79°,55 c.
			Coll'acqua bollente			
1	6	99°,00	0,160	0,863	2,600	0,00650
2	6	99,20	0,140	0,730	2,198	alla temperat. di 99°,10 c.
			Coll'anilina bollente			
1	7	181°,80	0,149	0,531	1,622	0,00480
2	7	183,00	0,147	0,588	1,789	alla temperat. di 182°,40 c.
			Col petrolio bollente			
1	6	247°,0	0,156	0,291	0,899	0,00242
2	6	248,2	0,156	0,296	0,914	alla temperat. di 247°,60 c.

A tutte le temperature si riscaldava la congiunzione, attraverso la quale la corrente passava dall'alluminio al ferro.

Ho sostituito i valori così trovati dell'effetto Peltier nella formola (5) e ne ho calcolato le costanti A e T_0, che sono:

$A = -3,641......$ in unità del sistema (C.G.S.)
$T_0 = 574,80....$ contata dallo zero assoluto.

Per mostrare come per questa coppia si verifichi la formola stessa, riporto nella seguente tabella i valori di *c* calcolati poi col mezzo della formola, di fronte a quelli avuti direttamente dalle osservazioni:

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
3°,10	— 0,00715	— 0,00717	— 0,00002
26,80	— 0,00716	— 0,00716	— 0,00000
79,55	— 0,00685	— 0,00681	+ 0,00004
99,10	— 0,00650	— 0,00655	— 0,00005
182,40	— 0,00480	— 0,00472	+ 0,00008
247,60	— 0,00242	— 0,00245	— 0,00003

Come si vede l'accordo è soddisfacente. Ho calcolato poi le costanti A e T_0 per mezzo delle esperienze fatte sulle proprietà termoelettriche della coppia, sostituendo i valori delle forze elettromotrici ottenuti alle diverse temperature nella formola (4); ed ho ottenuto:

$A = -3{,}861\ldots$ in unità del sistema (C.G.S.)

$T_0 = 570{,}0\ldots$ contata dallo zero assoluto.

Nella tabella che segue sono posti a confronto i valori delle forze elettromotrici E dedotti dal calcolo della formola (4), con quelli avuti direttamente dalle osservazioni:

t_1	t_2	E 10^{-2} osservata	E. 10^{-2} calcolata
22°,6 c.	0° c.	— 250	— 249
74,9	»	— 759	— 751
102,8	»	— 979	— 775
156,4	»	— 1312	— 1324
206,9	»	— 1523	— 1547
250,4	»	— 1653	— 1661

Come si vede, è molto buono l'accordo fra i valori calcolati e i valori osservati.

Vi è anche una concordanza abbastanza buona fra i valori di A e T_0 ricavati dallo studio del fenomeno Peltier e da quelli ricavati dallo studio delle proprietà termoelettriche.

Per mostrare con più evidenza la completa verificazione della formola (5) per questa coppia, riporto al solito in un quadro i valori dell'effetto Peltier avuti dalle osservazioni e quelli avuti dal calcolo della stessa formola, prendendo $A = -3{,}861$, e $T_0 = 570{,}0$, quali risultarono dallo studio delle proprietà termoelettriche.

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
3°,10 c.	— 0,00745	— 0,00746	— 0,00001
26,80	— 0,00716	— 0,00745	— 0,00029
79,55	— 0,00685	— 0,00705	— 0,00020
99,10	— 0,00650	— 0,00677	— 0,00027
182,40	— 0,00489	— 0,00480	+ 0,00009
247,60	— 0,00242	— 0,00236	+ 0,00006

Coppia zinco-stagno.

Lo zinco adoperato per questa coppia era in fili di circa due millimetri di diametro, quali si trovano in commercio. Lo stagno invece era del più puro che fornisca la fabbrica Trommdorff; per costruirne un arco, com'era di bisogno pel mio caso, lo aspirai mentr'era fuso in un tubetto di vetro piegato ad U. siccome già avevo fatto precedentemente pel bismuto; indi, scopertene le estremità, vi saldai i due fili di zinco, che al solito vennero disposti in modo da non toccare nel tubo nè gli altri fili, nè le pareti.

L'equivalente in acqua comune ai due calorimetri a 19° fu trovato in questo caso uguale a

$$3^{gr.},004 .$$

Riferisco nel quadro che segue i risultati delle determinazioni sopra l'effetto Peltier, essendo passata la corrente per venti minuti in ogni esperienza.

Col ghiaccio fondente

	N	t	i	θ	V	c
1	6	2°,60 c.	0,150	0°,2215	0,664	0,00175
2	6	3,00	0,152	0,228	0,683	alla temperatura di 2°,8 c.
			Alla temperatura della stanza			
1	5	18°,40	0,160	0,2855	0,858	0,00224
2	5	18,50	0,160	0,2875	0,863	alla temperat. di 17°,60 c.
			Coll'alcool bollente			
1	6	79°,90	0,154	0,4635	1,406	0,003884
2	6	79,80	0,150	0,4695	1,428	alla temperat. di 79°,85 c.

	N	t	i	θ	V	c
			Coll'acqua bollente			
1	6	98°,60	0,161	0°,575	1,746	0,00451
2	6	98,92	0,163	0,580	1,763	alla temperat. di 98°,76 c.
			Con la trementina bollente			
1	5	156°,70	0,149	0,7495	2,304	0,00660
2	5	158,98	0,145	0,7665	2,356	alla temperat. di 157°,84 c.
			Col petrolio bollente			
1	6	201°,80	0,150	1,027	3,178	0,00866
2	6	206,12	0,156	1,069	3,308	alla temperat. di 203°,96 c.

In ogni caso veniva riscaldata la congiunzione in cui la corrente passava dallo stagno allo zinco.

Sostituendo questi valori di c nella formola (5) ho calcolato le costanti A e T_0, ed ho ottenuto

$A = 2,411$ in unità del sistema (C.G.S)

$T_0 = 163,15$ contata dallo zero assoluto.

Onde mostrare come i valori dell'effetto Peltier per questa coppia si possano con discreta approssimazione rappresentare in funzione della temperatura con una parabola, metto a confronto nella seguente tabella i risultati dell'esperienza con quelli del calcolo della formola (5).

Temperatura	c osservata	c calcolata	Differenza
2°,80 c.	— 0,00175	— 0,00178	— 0,00003
17,60	— 0,00224	— 0,00213	+ 0,00011
79,85	— 0,00388	— 0,00384	+ 0,00004
98,76	— 0,00451	— 0,00445	+ 0,00005
157,84	— 0,00660	— 0,00662	— 0,00002
203,96	— 0,00866	— 0,00859	+ 0,00007

Dallo studio delle proprietà termoelettriche della stessa coppia, ho ricavato pure le costanti A e T_0, sostituendo i valori delle forze termoelettromotrici trovati alle diverse temperature nella formola (4); esse sono:

$A = 2,423$ in unità del sistema (C.G.S)

$T_0 = 167,3$ contato dallo zero assoluto.

La tabella che segue mostra l'accordo fra i valori delle forze elettromotrici avute direttamente dalle determinazioni, e quelli che si ricavano dal calcolo della formola (4):

t_1	t_2	E. 10^{-2} osservata	E. 10^{-2} calcolata
24°,3	0° c.	— 69	— 69
64,6	»	— 218	— 217
98,6	»	— 373	— 370
149,4	»	— 653	— 655
200,6	»	— 1000	— 1001

È da osservare inoltre che esiste una concordanza soddisfacente fra i valori di A e T_0 ricavati dallo studio del fenomeno Peltier, e quelli ricavati dallo studio delle proprietà termoelettriche della coppia; il che indica che la formola (5) rimane per la coppia stessa verificata pienamente. Ma, come per le coppie precedenti, onde meglio mostrare qual'è il grado di precisione a cui è giunta la verificazione, riferisco in un quadro i valori di c ottenuti coll'esperienza, e quelli ottenuti col calcolo della formola, dando in essa alle costanti A e T_0 i valori ricavati dallo studio delle proprietà termoelettriche.

Temperatura	c osservata	c calcolata	Differenza
2°,80 c.	— 0,00175	— 0,00173	+ 0,00002
17,60	— 0,00224	— 0,00207	+ 0,00017
79,85	— 0,00388	— 0,00378	+ 0,00010
98,76	— 0,00451	— 0,00438	+ 0,00013
157,84	— 0,00660	— 0,00625	+ 0,00035
203,96	— 0,00866	— 0,00852	+ 0,00014

I valori assoluti di c dati dal calcolo sono tutti più piccoli dei valori dati dall'osservazione, ma tuttavia le differenze si mantengono dentro tali limiti, da ritenere sufficiente la concordanza fra di essi.

Coppia piombo-cadmio.

Nella costruzione di questa coppia, ho adoperato il cadmio più puro della fabbrica Transdorf; e ne ho formato un arco, aspirandolo mentr'era fuso in un tubetto di vetro piegato ad U. I fili di piombo che ho saldato alle estremità dell'arco di cadmio, erano del commercio.

L'equivalente in acqua comune ai due calorimetri a 18°, fu trovato uguale a

$2^{gr.},959$.

I risultati delle esperienze sull'effetto Peltier sono i seguenti:
(La corrente passa in ogni esperienza per venti minuti).

Col ghiaccio fondente

	N	t	i	θ	V	c
1	6	2°,2 c.	0,152	0°,248	0,733	0,00200
2	6	2,2	0,150	0,244	0,719	alla temperatura di 2°,20 c.
			Alla temperatura della stanza			
1	6	18°,32	0,160	0,290	0,858	0,00224
2	6	18,58	0,160	0,292	0,863	alla temperat. di 18°,45 c.
			Coll'alcool bollente			
1	6	79°,80	0,148	0,413	1,235	0,00341
2	6	79,40	0,152	0,407	1,218	alla temperat. di 79°,60 c.
			Coll'acqua bollente			
1	6	99°,00	0,147	0,438	1,313	0,00386
2	6	98,60	0,151	0,483	1,449	alla temperat. di 98°,80 c.
			Colla trementina bollente			
1	6	155°,80	0,164	0,730	2,211	0,00547
2	6	158,10	0,160	0,6745	2,0427	alla temperat. di 156°,95 c.
			Col petrolio bollente			
1	6	202°,20	0,140	0,726	2,215	0,00661
2	6	205,08	0,162	0,8485	2,588	alla temperat. di 203°,64 c.

A ciascuna temperatura si produsse riscaldamento nella congiunzione attraverso alla quale la corrente andava dal piombo al cadmio.

Con questi valori di c sostituiti nella formola (5) si sono ricavate le costanti:

$$A = -1,362 \text{ in unità del sistema (C.G.S)}$$
$$T_0 = 51,1 \quad \text{contata dallo zero assoluto.}$$

Nella seguente tabella si trovano posti a confronto i valori di c dati dalle esperienze con quelli dati dal calcolo della formola (5), quando si diano in essa ad A e T_0 i valori sopra trovati.

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
2°,20 c.	0,00200	0,00200	0,00000
18,45	0,00224	0,00227	+ 0,00003
79,60	0,00341	0,00345	+ 0,00004
98,80	0,00386	0,00387	+ 0,00001
156,95	0,00547	0,00540	— 0,00007
203,64	0,00661	0,00657	— 0,00004

L'accordo è abbastanza buono per poterne dedurre con sicurezza che anche per questa coppia l'effetto Peltier in funzione della temperatura viene rappresentato da una parabola.

Dallo studio delle proprietà termoelettriche, ho ricavato pure i valori delle costanti A e T_0, usando la formola (4); essi sono

$A = -1,452$ in unità del sistema (C.G.S)
$T_0 = 64,6$ contata dallo zero assoluto.

Sostituendo poi i valori di queste costanti nella formola (4), ho calcolato le forze elettromotrici della coppia alle diverse temperature, per metterle a confronto con quelle trovate sperimentalmente. Esse sono contenute nella tabella che segue:

t_1	t_2	$E.\,10^{-2}$ osservata	$E.\,10^{-2}$ calcolata
26°,8 c.	0° c.	87	86
57,4	»	199	198
98,2	»	369	367
134,9	»	537	540
194,6	»	860	864
224,8	»	1048	1047

I valori osservati coincidono abbastanza bene con quelli calcolati. Faccio notare infine che i valori ricavati per A e T_0 dallo studio dell'effetto Peltier, ad onta del numero grande di determinazioni fatte, non concordano bene con i valori ricavati dallo studio delle proprietà termoelettriche, come per le coppie precedenti; ma tuttavia non si può certamente attribuirlo ad una contraddizione alla teoria. E se si sostituiscono questi ultimi valori di A e T_0 nella formola (5), si ottengono per c risultati che si possono ancora ritenere discretamente concordanti con quelli ottenuti direttamente dalle osservazioni; come lo mostra la seguente tabella:

Temperatura	c osservata	c calcolata	Differenza
2°,20 c.	0,00200	0,00200	0,00000
18,45	0,00224	0,00229	+ 0,00005
79,60	0,00341	0,00351	+ 0,00010
98,80	0,00386	0,00395	+ 0,00009
156,95	0,00547	0,00543	— 0,00004
203,64	0,00661	0,00679	+ 0,00018

Coppia bismuto-zinco.

Il bismuto adoprato per questa coppia era di quello stesso, che servì per la coppia bismuto-piombo; e fu piegato ad U nell' istessa maniera. I fili di zinco che vi furono saldati alle estremità erano eguali a quelli usati per la coppia zinco-stagno.

L'equivalente in acqua comune ai due calorimetri a 18°, fu trovato eguale a

$3^{gr.},019$.

Per le determinazioni sull'effetto Peltier si ebbero i risultati che seguono: (La corrente si fece passare in ogni esperienza per 20 minuti).

Col ghiaccio fondente

	N	t	i	θ	V	c
1	6	2°,30 c.	0,160	2°,0735	6,245	0,0164
2	6	2,50	0,164	2,1525	6,483	alla temperat. di 2°,40 c.
			Alla temperatura della stanza			
1	6	18°,00	0,1495	2,216	6,691	0,01863
2	6	19,32	0,151	2,557	7,720	alla temperat. di 18°,66 c.
			Coll'alcool bollente			
1	7	79°,68	0,155	3,1215	9,518	0,02554
2	7	79,60	0,154	3,091	9,424	alla temperat. di 79°,64 c.
			Coll'acqua bollente			
1	6	98°,26	0,152	3,332	10,192	0,02760
2	6	98,86	0,156	3,339	10,214	alla temperat. di 98°,56 c.

	N	t	i	θ	V	c
			Colla trementina bollente			
1	6	158°,04	0,1395	4°,1255	12,744	0,03745
2	6	158,60	0,144	4,138	12,783	alla temperat. di 158°,32 c.
			Col petrolio bollente			
1	6	204°,30	0,150	5,174	16,092	0,04472
2	6	206,62	0,150	5,180	16,108	alla temperat. di 205°,46 c.

A tutte le temperature si produsse riscaldamento nella congiunzione, attraverso la quale la corrente passava dal bismuto allo zinco.

Con questi valori dell'effetto Peltier ho calcolato le costanti A e T_0, della formola (5); ed ho ottenuto

$$A = -6{,}811 \text{ in unità del sistema (C.G.S)}$$
$$T_0 = -99{,}85 \text{ contata dallo zero assoluto.}$$

Per mostrare come tale formola rappresenti bene l'effetto Peltier per la coppia presente, sono riportati nella tabella che segue i valori di c dati dalle osservazioni, vicino a quelli dati dal calcolo della formola stessa.

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
2°,40 c.	0,01643	0,01676	+ 0,00032
18,66	0,01863	0,01852	— 0,00011
79,64	0,02554	0,02588	+ 0,00034
98,56	0,02760	0,02840	+ 0,00080
158,32	0,03745	0,03715	— 0,00030
205,46	0,04472	0,04456	— 0,00016

Avendo fatto poi lo studio delle proprietà termoelettriche della coppia, ho calcolato anche per la formola (4) le costanti A e T_0; ed ho ottenuto

$$A = -6{,}896 \text{ in unità del sistema (C.G.S)}$$
$$T_0 = -90{,}80 \text{ contata dallo zero assoluto.}$$

Il quadro seguente contiene i valori delle forze elettromotrici determinati alle diverse temperature coll'esperienza, e di fronte ad essi quelli determinati col calcolo della formola (4).

t_1	t_2	E. $_{10}^{-2}$ osservata	E. $_{10}^{-2}$ calcolato
16°,4 c.	0° c.	422	421
61,6	»	1680	1676
98,8	»	2801	2815
147,6	»	4432	4454
187,7	»	6013	5999

I valori osservati vanno bene d'accordo con quelli calcolati.

Come si vede, i secondi valori delle costanti A e T_0 ottenuti collo studio delle proprietà termoelettriche, quasi coincidono con quelli ottenuti precedentemente mediante lo studio del fenomeno Peltier. Tuttavia, come per le coppie antecedenti, riporto anche in questa coppia i valori di c dati dalle osservazioni alle diverse temperature, e di fronte quelli dati dal calcolo della formola (5), quando si assegnino in essa alle costanti A e T_0 i secondi valori:

Temperatura	c osservato	c calcolato	Differenza
2°,40 c.	0,01643	0,01653	+ 0,00010
18,66	0,01863	0,01831	— 0,00032
79,64	0,02554	0,02567	+ 0,00013
98,56	0,02760	0,02857	+ 0,00097
158,32	0,03745	0,03698	— 0,00047
205,46	0,04472	0,04565	+ 0,00093

La concordanza che esiste fra i valori calcolati e quelli osservati mostra che anche per questa coppia si verifica sotto tutti gli aspetti la formola (5).

Siccome di alcuni dei metalli adoperati in queste coppie studiai antecedentemente anche l'effetto Thomson ([1]), dimostrando verificata la formola (3), sarà utile vedere se esiste fra i risultati ottenuti allora e quelli ottenuti presentemente quella corrispondenza che dovrebbe esistere, secondo la teoria. Se si considera variabile la temperatura T_1 nella equazione (2), e se si pone c e T in luogo di c_1 e T_1; differenziando rispetto alla variabile T, si ottiene:

$$\frac{d \cdot \frac{c}{T}}{d \cdot T} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{T} = 0 \, .$$

([1]) Vedi citazione in principio della Memoria.

Differenziando poi anche la (5) rispetto alla variabile T, si ha:

$$\frac{d\frac{c}{\mathrm{T}}}{d\mathrm{T}} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{J}};$$

e quindi

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{J}}. \tag{10}$$

Ora, i valori di $\frac{\sigma_1}{\mathrm{T}}$ e $\frac{\sigma_2}{\mathrm{T}}$ per i metalli della coppia, si trovano riferiti in fine della 2ª delle Memorie già citate sull'effetto Thomson, dove sono indicati colla lettera *a*.

Ma soltanto per il piombo, per il bismuto, e pel cadmio, fra i metalli componenti le coppie da me usate nello studio del fenomeno Peltier, determinai anche il valore di $\frac{\sigma}{\mathrm{T}}$; e quindi può essere stabilito un confronto soltanto per le due coppie, piombo-cadmio, e bismuto-piombo.

Ricordando che per il cadmio si ha

$$\frac{\sigma_1}{\mathrm{T}} = 3{,}678 \times 10^{-8}$$

e per il piombo (come si deduce dalla 3ª delle Memorie or ora citate)

$$\frac{\sigma_2}{\mathrm{T}} = 0{,}0433 \times 10^{-8},$$

espressi in unità del sistema assoluto (C.G.S); ed assumendo

$$\mathrm{J} = 4{,}2 \times 10^7 \text{ ergs},$$

si ottiene per la coppia piombo cadmio

$$(0{,}0433 - 3{,}678)\, 4{,}2 \times 10^{-1} = \mathrm{A},$$

ossia

$$\mathrm{A} = -1{,}527$$

mentre che dallo studio del fenomeno Peltier si è ottenuto:

$$\mathrm{A} = -1{,}452.$$

L'accordo fra i due ultimi valori di A e il primo deve ritenersi come molto soddisfacente, tanto più quando si considerino le grandi difficoltà che offre lo studio del fenomeno Thomson.

Per il bismuto poi si ha

$$\frac{\sigma_1}{\mathrm{T}} = -3{,}909 \times 10^{-8}$$

e quindi per la coppia bismuto-piombo,

$$(-3{,}909 - 0{,}0433) \times 4{,}2 \times 10^{-1} = \mathrm{A}$$

ossia

$$\mathrm{A} = -1{,}660;$$

mentre che dallo studio del fenomeno Peltier si era ottenuto:

$$\mathrm{A} = -2{,}168;$$

e dallo studio della forza elettromotrice:

$$A = -2{,}126 .$$

In questo caso non si ha l'accordo riscontrato nell'altro; ma più che ad una discordanza fra l'esperienza e la teoria, mi pare si debba attribuire questo fatto a qualche diversità fra i pezzi dello stesso metallo adoperato nelle varie serie di esperienze.

Per avere un'idea più precisa, della corrispondenza che esiste fra i risultati ottenuti nel presente studio, e in quello sull'effetto Thomson, sarà bene calcolare il valore di A per la coppia bismuto-cadmio; poichè ciascuno di questi due metalli furon tolti dallo stesso pezzo, sia per formare le aste nelle ricerche sul fenomeno Thomson, sia per formare le coppie nelle ricerche sul fenomeno Peltier.

È facile dimostrare che se si rappresenta con A la costante che spetta a due metalli M ed N, e con A' ed A'' rispettivamente quella che appartiene ad M per rispetto a un terzo metallo P, e ad N per rispetto allo stesso metallo P, si ha la relazione semplicissima:

$$A = A' - A'' .$$

Infatti, differenziando la (4) rispetto a T si ottiene il così detto *potere termoelettrico*

$$\frac{dE}{dT} = A\,(T_0 - T) .$$

Ora è noto, che il potere termoelettrico della coppia MN è uguale alla differenza dei poteri termoelettrici della MP e della NP: ossia

$$\frac{dE}{dT} = \frac{dE'}{dT} - \frac{dE''}{dT} ,$$

attribuendo le lettere senza indice alla coppia MN, quelle con un indice alla coppia MP e quelle con due indici alla NP; perciò

$$\frac{dE}{dT} = A'(T'_0 - T) - A''(T''_0 - T) ;$$

e alla temperatura T'

$$\frac{dE}{dT'} = A'(T'_0 - T') - A''(T''_0 - T') .$$

Rappresentando queste due differenze con Q e Q' si avrà

$$A\,(T_0 - T\,) = Q$$
$$A\,(T_0 - T') = Q'$$

da cui

$$A = \frac{Q' - Q}{T - T'} = A' - A''.$$

Quindi per mezzo delle costanti che spettano alle coppie bismuto-piombo, e piombo-cadmio, si ottiene per la coppia bismuto-cadmio il valore

$$A = -3{,}530$$

secondo le determinazioni fatte sull'effetto Peltier; ed

$$A = -3{,}578$$

secondo le determinazioni delle forze termoelettrometrici.

Mentrechè dalle determinazioni fatte sull'effetto Thomson risulta:

$$A = -(3,909 + 3,678)\,4,2 \times 10^{-1} = 3,186\,.$$

I due primi valori sono poco concordanti con quest'ultimo; ma la discordanza non è così grande da non potersi spiegare colle gravi difficoltà che offre la misura del fenomeno Thomson, specialmente nel bismuto.

Conclusione.

Dalle esperienze riferite si conclude:

1.° I valori dell'effetto Peltier in funzione della temperatura sono rappresentati da una parabola, per le sette coppie da me studiate.

2.° Il valore dell'effetto Peltier si annulla per ciascuna di queste coppie prossimamente alla temperatura T_0 del punto neutrale.

3.° Il valore assoluto dell'effetto Peltier a una data temperatura risulta con la diretta misura calorimetrica prossimamente uguale a quello calcolato con la formola (5): $c = \frac{A}{J}(T_0 - T)\,T$, quando le costanti A e T_0 siano state ricavate dallo studio delle forze elettromotrici della relativa coppia.

4.° Infine i valori delle forze elettromotrici delle coppie formate col piombo, col cadmio e col bismuto, e quelli dell'effetto Peltier hanno con i valori dell'effetto Thomson in questi metalli quella corrispondenza, che dovrebbero avere secondo la teoria.

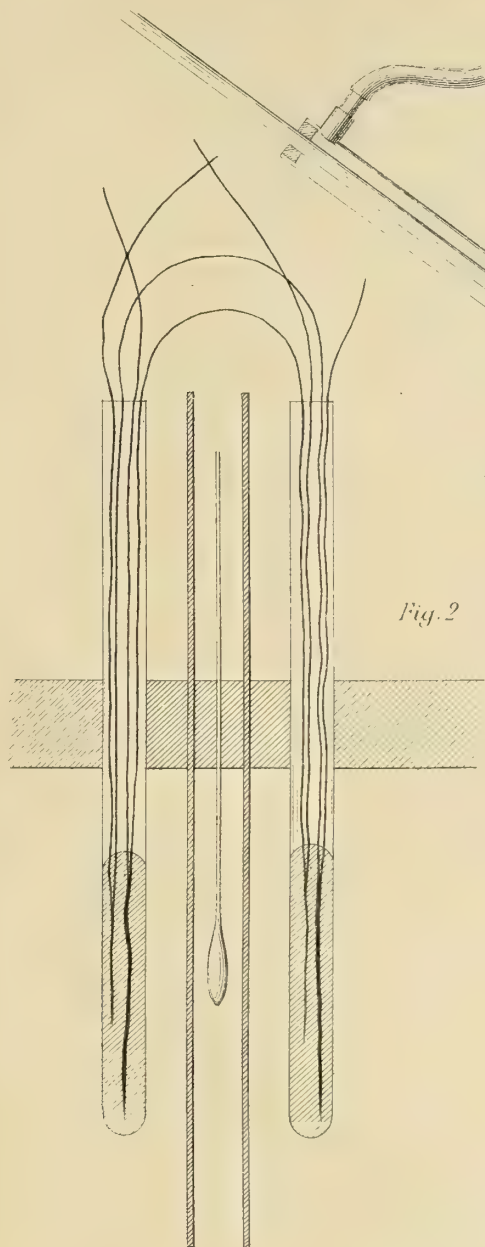
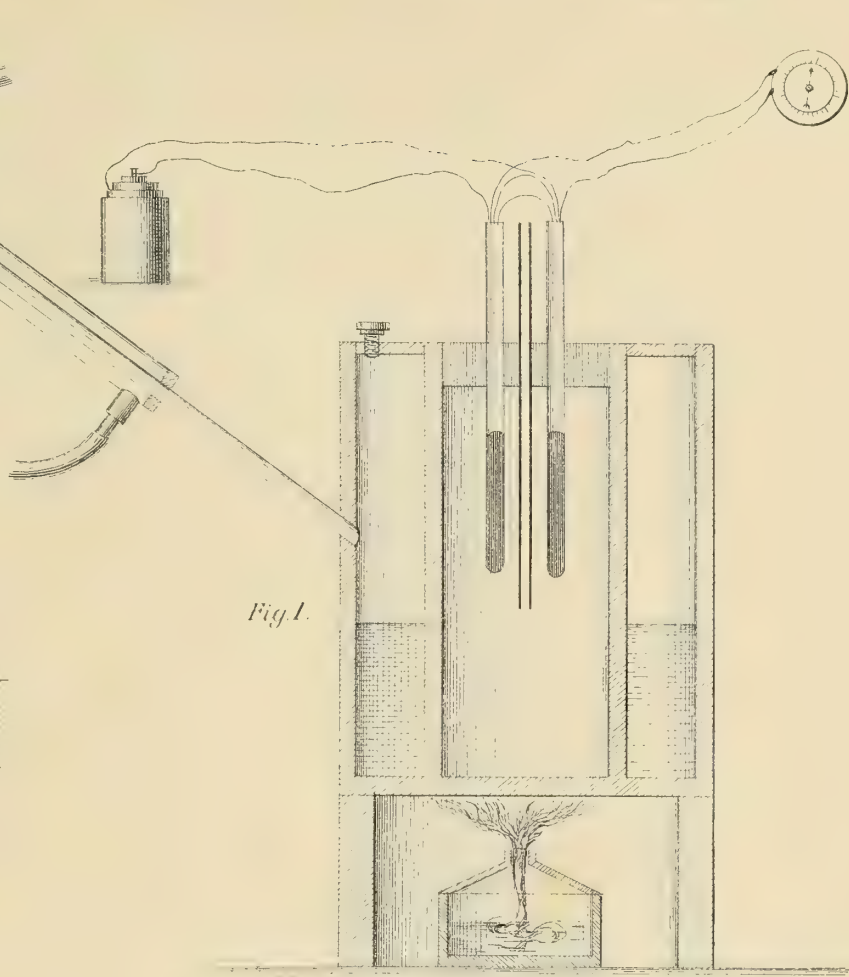
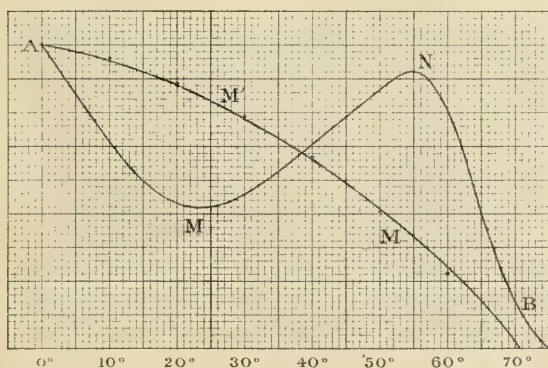
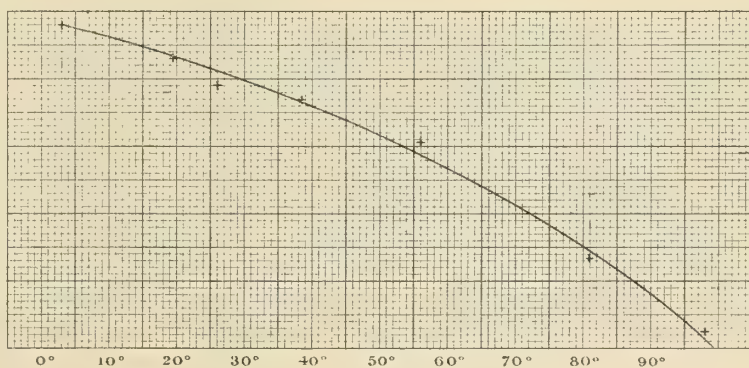
Chiudendo questo lavoro, sento il dovere di ringraziare, come nei lavori passati, il chiarmo prof. Naccari, per la squisita cortesia colla quale mi fornì tutti i mezzi che mi furono necessari per eseguire le esperienze.

Fig. 2

Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.

Lit. Bruno e Salomone, Roma

INDICE DEL VOL. V — SERIE 4.ª

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I, II, III, IV. (1884-88).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*